Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2010/2011
Master 1 — Introduction à la Logique mathématique

Théorie des ensembles
DM 1 (Corrigé).

Exercice I.

1. *Montrer que pour tous ordinaux α et β tels que $\alpha \leq \beta$ on a $X_\alpha \subseteq X_\beta$.*
   Montrons ce résultat par récurrence transfinie sur β.
   - Si $\beta = 0$ c'est évident.
   - Si $\beta = \gamma + 1$, par hypothèse de récurrence il suffit de montrer que $X_\gamma \subseteq X_\beta$. Soit $x \in X_\gamma$.
     - Ou bien $\gamma = \delta + 1$. On a $X_\delta \subseteq X_\gamma$ et alors $R[x] \subseteq X_\delta \subseteq X_\gamma$. Donc $x \in X_\beta$.
     - Ou bien γ est limite. Alors il existe $\delta < \gamma$ tel que $x \in X_\delta \subseteq X_{\delta+1}$. D'où $R[x] \subseteq X_\delta \subseteq X_\gamma$ et $x \in X_\beta$.
   - Ou bien β est limite et c'est évident par définition.
2. *Montrer que pour tout $y \in Y$ et $x \in X$, si $(x, y) \in R$ alors $x \in Y$ et $\mathrm{rg}(x) < \mathrm{rg}(y)$.*
   Notons tout d'abord que tout élément de Y a bien un rang car pour tout ordinal α, $X_\alpha \subseteq X_{\alpha+1}$.
   Remarquons de plus que pour tout ordinal α, si $z \in X_\alpha$ alors $\mathrm{rg}(z) < \alpha$: c'est évident si α est un ordinal successeur ; dans le cas où α est limite, alors il existe $\beta < \alpha$ tel que $z \in X_\beta \subseteq X_{\beta+1}$ et donc $\mathrm{rg}(z) \leq \beta < \alpha$.
   Soient $y \in Y$ et $x \in X$ tels que $(x, y) \in R$. Alors $y \in X_{\mathrm{rg}(y)+1}$ et $x \in R[y] \subseteq X_{\mathrm{rg}(y)}$. Donc $x \in Y$ et $\mathrm{rg}(x) < \mathrm{rg}(y)$.
3. *Montrer que (X, R) est bien fondée si et seulement si $Y = X$.*
   $(\Leftarrow)$ Supposons $Y = X$. Soit Z une partie non vide de X. Il existe alors un élement $z_0 \in Z$ de rang minimal (les rangs étant à valeurs ordinales). Par la question précédente et la minimalité du rang de z_0, il suit que $R[z_0] \cap Z = \emptyset$.
   $(\Rightarrow)$ Supposons que $Y \neq X$. Soit $Z = X \setminus Y$. Considérons $z \in Z$. Si $R[z]$ était inclus dans Y alors on aurait $R[z] \subseteq X_{\sup_{t \in R[z]} (\mathrm{rg}(t)+1)}$ et donc z serait un élement de Y. Donc $R[z]$ n'est pas inclus dans Y et donc $R[z] \cap Z \neq \emptyset$. Donc (X, R) n'est pas bien fondée.

Exercice II. La dérivation de Hausdorff

1. Une relation d'équivalence $\sim$ sur X compatible avec l'ordre $\leq$ si pour tout $x_1 \sim x_2$ et $y_1 \sim y_2$ tel que $x_1 \not\sim y_1$ alors $x_1 \leq y_1$ si et seulement si $x_2 \leq y_2$.
2. *Montrer que $D(\sim)$ est une relation d'équivalence qui étend $\sim$ et qui est toujours compatible avec $\leq$.*
   Si $x \sim y$ il n'y a aucune classe d'équivalence strictement entre celle de x et celle de y (qui sont les mêmes) donc $xD(\sim)y$. La relation $D(\sim)$ étend donc $\sim$. La réflexivité suit

donc de cette propriété. La symétrie est évidente et enfin la transitivité suit du fait que s'il y a un nombre fini k de classes entre les classes de x et de y et un nombre fini k' de classes entre celles de y de z, il y a au plus $k+k'+1$ classes entre celles de x et de z.

Soient $x_1 D(\sim) x_2$ et $y_1 D(\sim) y_2$ tel que x_1 et y_1 ne sont pas dans la même classe définie par la relation $D(\sim)$. Supposons que $x_1 \leq y_1$. Comme il y a une infinité de $\sim$-classes entre x_1 et y_1 et seulement un nombre fini entre x_1 et x_2 et entre y_1 et y_2, il suit que $x_2 \leq y_2$.

3. On définit par récurrence transfinie une relation binaire $\sim_\alpha$ sur X pour tout ordinal α de la façon suivante :
   - $x \sim_0 y$ ssi $x = y$;
   - pour tout ordinal α, $\sim_{\alpha+1} = D(\sim_\alpha)$;
   - pour tout ordinal limite λ, $\sim_\lambda = \cup_{\alpha<\lambda} \sim_\alpha$.

   On vérifie alors par récurrence et en utilisant la question précédente que pour tout ordinal α, la relation $\sim_\alpha$ est une relation d'équivalence compatible avec $\leq$ qui prolonge toutes les relations $\sim_\beta$ pour $\beta < \alpha$.
4. - $\mathbb{N}$: comme il n'y a qu'un nombre fini entre deux entiers, la relation $\sim_1$ est grossière (et ensuite pour tout $\alpha \geq 1$, $\sim_\alpha = \sim_1$.
   - $\mathbb{Q}$: comme il y a une infinité de rationnels entre deux rationnels distincts, on a $\sim_1 = \sim_0$ (et donc pour tout α, $\sim_\alpha = \sim_0$).
   - $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: on a $(n_1, m_1) \sim_1 (n_2, m_2)$ si et seulement si $n_1 = n_2$, puis $\sim_2$ est grossière.
5. On montre ce résultat par récurrence transfinie :
   - L'ordinal $\omega^0 = 1$ est réduit à un unique élément donc $\sim_0$ est grossière.
   - Si $\alpha = \beta + 1$ alors $\omega^\alpha = \omega^\beta \cdot \omega$. Donc ω^α est isomorphe à ω copies bout à bout de ω^β. Par récurrence, $\sim_\beta$ est grossière sur chacune des copies de ω^β. Entre deux $\sim_\beta$-classes sur ω^α il n'y a donc qu'un nombre fini de classes et donc $\sim_\alpha = D(\sim_\beta)$ est grossière.
   - Si α est un ordinal limite alors $\omega^\alpha = \cup_{\beta<\alpha} \omega^\beta$ et pour tout $\beta < \alpha$, la relation $\sim_\beta$ est grossière sur ω^β donc la relation $\sim_\alpha$ est grossière sur ω^α