Université Claude Bernard Lyon I
Master 1

2nd semestre 2010/2011
Introduction à la Logique mathématique [1]

Théorie des ensembles
DM 2 (Corrigé).

Exercice I. Lemme de König

1. *Un* arbre *est la donnée d'un ensemble N (les noeuds) muni d'une relation binaire de succession immédiate et d'une noeud origne r (sa racine) tel que :*
   - *r n'est successeur immédiat d'aucun autre noeud ;*
   - *tout noeud autre que la racine est successeur immédiat d'un unique noeud ;*
   - *tout noeud appartient à une branche partant de r (une suite de successeurs immédiats d'origine r).*

   On dit qu'un arbre est à branchement fini *lorsque chacun des noeuds n'a qu'un nombre fini de successeurs immédiats.*

   Montrer, à l'aide de l'axiome des choix dépendants, qu'un arbre infini qui est à branchement fini possède au moins une branche infinie.

   Soit Γ un arbre infini à branchement fini d'origine r. (On dénotera également par Γ l'ensemble des noeuds de cet arbre.)

   Un noeud y est dit successeur d'un noeud x s'il existe une suite de successeurs immédiats $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y$ avec $n \geq 1$ et x_{i+1} successeur immédiat de x_i pour tout $i < n$.

   Pour tout noeud x, on note Γ_x le sous-arbre de Γ ayant pour racine x, c'est-à-dire l'arbre constitué de x et de ces successeurs. On considère l'ensemble X des noeuds x tels que Γ_x est infini.

   Alors
   - $X \neq \emptyset$ car $r \in X$;
   - si x est un noeud dans X, au moins un des successeurs immédiats de x est dans X : en effet comme Γ est à branchement fini, x a un nombre fini $y_1, \ldots, y_n$ de successeurs immédiats et alors Γ_x est la réunion disjointe de $\{x\}$ et des sous-arbres Γ_{y_i}. L'un au moins de ces sous-arbres est nécessairement infini.

   Par l'axiome des choix dépendants, il existe une suite infinie $(x_n)_{n<\omega}$ d'éléments de X tel que pour tout i, le noeud x_{i+1} est successeur immédiat de x_i. Cette suite forme donc une branche infinie de Γ.

2. *Un* graphe *est la donnée d'un ensemble S de sommets et d'un ensemble A d'arêtes formé de paires d'éléments de S (ne contenant pas de singleton).*

   Un chemin *dans un graphe est une suite finie $(x_i)_{i<n}$ de sommets (chemin fini) ou une suite infinie $(x_i)_{i<\omega}$ (chemin infini) telle que $\{x_i, x_{i+1}\}$ est une arête pour chaque $i < n-1$*

1. Page du cours : `http://math.univ-lyon1.fr/~blossier/M1Logique2011/`

ou pour chaque $i < \omega$ (dans le second cas). Un chemin est simple *s'il ne contient pas deux fois le même sommet.*

Un graphe est connexe *si pour toute paire de sommets, il existe un chemin contenant les sommets de cette paire.*

Deux sommets sont dits adjacents *s'ils forment une arête. Le* degré *d'un sommet est le nombre de sommets adjacents à celui-ci. Un graphe est de* degré fini *si tous ses sommets le sont.*

Montrer, à l'aide de l'axiome des choix dépendants, qu'un graphe connexe infini de degré fini possède un chemin simple infini.

Soit $\mathcal{G}$ un graphe connexe infini de degré fini. Nous allons procéder de manière analogue à la question précédente.

On appelle distance entre deux sommets x et y de $\mathcal{G}$ le minimum des longueurs des chemins entre ces deux sommets, que l'on note $d(x, y)$ (cette distance est toujours finie car $\mathcal{G}$ est connexe).

Fixons r un sommet de $\mathcal{G}$. On dira qu'un sommet y est successeur immédiat d'un sommet x si x et y sont adjacents et $d(y, r) = d(x, r) + 1$. Le nombre de successeurs immédiats d'un sommet donné est fini car $\mathcal{G}$ est de degré fini. (Notons que cette relation ne définit pas nécessairement un arbre car un sommet peut être apriori successeur immédiat de plusieurs noeuds.)

Pour tout sommet x on note $\mathcal{G}_x$ le sous-graphe constitué de x et des successeurs de x (sommets appartenant à des suites de successeurs immédiats d'origine x). On considère X l'ensemble des sommets x pour lesquels $\mathcal{G}_x$ est infini. Alors $r \in X$ car $\mathcal{G}$ est connexe et tout élément de X a un successeur immédiat dans X car $\mathcal{G}$ est de degré fini. Il existe donc une suite $(x_n)_{n<\omega}$ telle que x_{i+1} est successeur immédiat de x_i pour tout $i < \omega$. Cette suite forme alors un chemin infini simple car $d(x_i, r) = d(x_0, r) + i$ pour tout $i < \omega$.

Exercice II. Clubs

Soit κ un cardinal régulier infini non dénombrable. Une partie C de κ est un club *("closed unbounded") si c'est une partie close et cofinale, c'est-à-dire si C est cofinale dans κ et pour tout $A \subseteq C$ et $A \neq \emptyset$, $\sup A \in C \cup \{\kappa\}$.*

1. *Montrer que l'ensemble des ordinaux limites appartenant à κ forme un club.*

   Montrons que cet ensemble est cofinal : soit $\lambda < \kappa$. La somme ordinale $\lambda + \omega$ est un ordinal limite et supérieur à λ. De plus $\lambda + \omega < \kappa$ car κ est régulier et non dénombrable et $\lambda + \omega = \sup_{i<\omega} \lambda + i$.

   Cet ensemble est également clos : soit A une partie non vide de cet ensemble alors ou bien $\sup A \in A$ ou bien $\sup A$ est un ordinal limite inférieur ou égal à κ.

2. *Montrer que l'intersection de deux clubs est un club.*

   Soient C_0 et C_1 deux clubs.

   Vérifions que l'intersection $C_0 \cap C_1$ est close : soit A une partie non vide de $C_0 \cap C_1$. Alors
   $$\sup A \in (C_0 \cup \{\kappa\}) \cap (C_1 \cup \{\kappa\}) = (C_0 \cap C_1) \cup \{\kappa\}.$$

Pour montrer que $C_0 \cap C_1$ est cofinale on construit pour chaque $\lambda < \kappa$, une suite croissante $(\alpha_i)_{i<\omega}$ d'ordinaux supérieurs à λ dont les éléments d'indice pair sont dans C_0 et les élements d'indice impairs sont dans C_1, par la récurrence suivante

- $\alpha_0 = \min\{x \in C_0 : x \geq \lambda\}$. L'ordinal α_0 est bien défini puisque cet ensemble est non vide du fait que C_0 est cofinale ;
- $\alpha_{2i+1} = \min\{x \in C_1 : x \geq \alpha_{2i}\}$ (cet ensemble est non vide car C_1 est cofinale) ;
- $\alpha_{2i+2} = \min\{x \in C_0 : x \geq \alpha_{2i+1}\}$ (cet ensemble est non vide car C_0 est cofinale) ;

Soit $\alpha = \sup\{\alpha_i : i < \omega\}$. Alors $\lambda \leq \alpha < \kappa$ car κ est régulier non dénombrable. De plus $\alpha = \sup\{\alpha_{2i} : i < \omega\} = \sup\{\alpha_{2i+1} : i < \omega\}$, donc comme C_0 et C_1 sont clos, $\alpha \in C_0 \cap C_1$. On en déduit que $C_0 \cap C_1$ est cofinale.

3. *Soient* $0 < \lambda < \kappa$ *et* $(C_i)_{i<\lambda}$ *une famille de clubs, montrer que* $\cap_{i\in\lambda} C_i$ *est un club.*

   De la même façon que pour deux clubs, l'intersection d'une famille quelconque de clubs est close.

   Montrons par récurrence que pour tout $0 < \alpha \leq \lambda$, l'intersection $\cap_{i<\alpha} C_i$ est un club.
   - C'est évident pour $\alpha = 1$;
   - Supposons que pour un ordinal α tel que $0 < \alpha < \lambda$, l'intersection $\cap_{i<\alpha} C_i$ est un club, alors par la question précédente $\cap_{i<\alpha+1} C_i = (\cap_{i<\alpha} C_i) \cap C_\alpha$ est un club ;
   - Supposons que pour un ordinal limite α tel que $0 < \alpha \leq \lambda$, le résultat soit vérifié pour tout $0 < \beta < \alpha$. Soit $\gamma < \kappa$. On construit une suite croissante $(x_\beta)_{0<\beta<\alpha}$ supérieure à γ par la récurrence suivante
     - $x_1 = \min\{x \in C_0 : x \geq \gamma\}$ (cet ensemble est non vide car C_0 est cofinale) ;
     - si $\beta > 1$, on pose
     $$x_\beta = \min\left\{x \in \bigcap_{i<\beta} C_i : x \geq \sup_{0<\beta'<\beta} x_{\beta'}\right\}.$$
     L'élément x_β est bien défini : en effet $\sup_{0<\beta'<\beta} x_{\beta'} < \kappa$ car κ est régulier et $\beta < \kappa$; donc l'ensemble $\{x \in \cap_{i<\beta} C_i : x \geq \sup_{0<\beta'<\beta} x_{\beta'}\}$ est non vide car $\cap_{i<\beta} C_i$ est un club par hypothèse de récurrence.

     Posons $x_\alpha = \sup_{0<\beta<\alpha} x_\beta$. Alors $\gamma \leq x_\alpha < \kappa$ car κ est régulier et $\alpha < \kappa$. De plus pour tout $i < \alpha$, $x_\alpha \in C_i$ car $x_\alpha = \sup_{i<\beta<\alpha} x_\beta$ et C_i est clos. On en déduit que $\cap_{i<\alpha} C_i$ est cofinale et est donc un club.

4. *Soit* $(C_i)_{i<\kappa}$ *une famille de clubs, montrer que l'intersection diagonale*
   $$\Delta_{i<\kappa} C_i := \{\alpha < \kappa : \alpha \in \cap_{i<\alpha} C_i\}$$
   est un club.

   Montrons que $\Delta_{i<\kappa} C_i$ est close : soit A une partie non vide de $\Delta_{i<\kappa} C_i$ telle que $\sup A \notin A$ et $\sup A < \kappa$. Alors $\sup A$ est un ordinal limite et $\sup A = \sup\{x \in A : x > \beta\}$ pour chaque $\beta < \sup A$. Or $\{x \in \Delta_{i<\kappa} C_i : x > \beta\} \subseteq C_\beta$ pour chaque $\beta < \kappa$ et donc $\sup A \in C_\beta$ pour chaque $\beta < \sup A$ (car chacun des C_β est clos). On en déduit que $\sup A \in \Delta_{i<\kappa} C_i$.

   Montrons que $\Delta_{i<\kappa} C_i$ est cofinale : soit $0 < \gamma < \kappa$. Posons $x_0 = \gamma$ et par récurrence sur $n < \omega$,
   $$x_{n+1} = \min\{x \in \cap_{i<x_n} C_i : x \geq x_n\}.$$

(L'ensemble $\{x \in \cap_{i<x_n} C_i : x \geq x_n\}$ est non vide par la cofinalité de $\cap_{i<x_n} C_i$.)

La suite $(x_n)_{n<\omega}$ est croissante. Posons $x_\omega = \sup_{n<\omega} x_n$. Par régularité de κ on a $x_\omega < \kappa$. Soit $m < \omega$, on a $x_\omega = \sup_{m<n<\omega} x_n$ et comme $\cap_{i<x_m} C_i$ est close on en déduit que $x_\omega \in \cap_{i<x_m} C_i$. D'où $x_\omega \in \cap_{i<x_\omega} C_i$, c'est-à-dire $x_\omega \in \Delta_{i<\kappa} C_i$.

5. *Un ensemble $S \subseteq \kappa$ est dit* stationnaire *s'il intersecte tous les clubs. Montrer que tout club est stationnaire.*

   C'est évident par la question 2.

6. *Montrer que l'intersection d'un ensemble stationnaire avec un club est stationnaire.*

   Soit S un ensemble stationnaire et C un club. Si C' est un club alors par la question 2, $C \cap C'$ est également un club et donc $S \cap C \cap C'$ est non vide.

7. *(Lemme de Fodor) Soit $S \subseteq \kappa$ un ensemble stationnaire et $f : S \to \kappa$ une fonction régressive (c'est-à-dire telle que $f(x) < x$ pour tout $x \in S$). Montrer qu'il existe un ensemble stationnaire $T \subseteq S$ tel que f soit constante sur T.*

   Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors pour tout $\alpha < \kappa$, $f^{-1}(\{\alpha\})$ n'est pas stationnaire. On peut alors choisir une famille $(C_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ de clubs telle que pour tout $\alpha < \kappa$, l'intersection $f^{-1}(\{\alpha\}) \cap C_\alpha$ est vide. Par la question 4, l'intersection diagonale de cette famille est un club, elle a donc une intersection non vide avec S. Soit x un élément de $S \cap \Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha$. Alors $y = f(x) < x$, donc $x \in C_y$, c'est-à-dire $f(x) \neq y$ (contradiction).