Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2010/2011
Master 1 — Introduction à la Logique mathématique[1]

Théorie des ensembles
DM 1.

Exercice I.

Soit R une relation binaire sur X, c'est-à-dire une partie de $X \times X$. Pour $x \in X$ l'ensemble des R-prédécesseurs de x est la partie

$$R[x] = \{y \in X | (y, x) \in R\}.$$

On dit que (X, R) est *bien fondée* si tout sous-ensemble non-vide Y de X contient un élément R-minimal y_0, c'est-à-dire un élément $y_0 \in Y$ tel que $R[y_0] \cap Y = \emptyset$.

Par induction sur les ordinaux, on définit pour chaque ordinal α une partie X_α de X de la façon suivante :
- $X_0 = \emptyset$;
- pour tout ordinal α,
$$X_{S(\alpha)} = \{x \in X | R[x] \subseteq X_\alpha\};$$
- pour tout ordinal limite λ,
$$X_\lambda = \cup_{\alpha<\lambda} X_\alpha.$$

1. Montrer que pour tous ordinaux α et β tels que $\alpha \leq \beta$ on a $X_\alpha \subseteq X_\beta$.
2. Soit
$$Y = \{x \in X | x \in X_\alpha \text{ pour un } \alpha \in ON\}.$$
Pour chaque $y \in Y$, on définit le *rang* de y comme
$$\mathrm{rg}(y) = \min\{\alpha \in ON | y \in X_{S(\alpha)}\}.$$
Montrer que pour tout $y \in Y$ et $x \in X$, si $(x, y) \in R$ alors $x \in Y$ et $\mathrm{rg}(x) < \mathrm{rg}(y)$.
3. Montrer que (X, R) est bien fondée si et seulement si $Y = X$.

Exercice II. La dérivation de Hausdorff

Soit $(X, \leq)$ un ensemble totalement ordonné.

1. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur X compatible avec l'ordre $\leq$, c'est-à-dire tel que $\leq$ passe au quotient. Expliciter cette propriété. On définit alors $D(\sim)$ la relation sur X obtenue en posant
$$xD(\sim)y \Leftrightarrow \text{ il y a un nombre fini de } \sim\text{-classes entre celle de } x \text{ et celle de } y.$$
2. Montrer que $D(\sim)$ est une relation d'équivalence qui étend $\sim$ et qui est toujours compatible avec $\leq$.
3. Expliciter une construction par récurrence transfinie qui, partant de la relation triviale $\sim_0$ (c'est-à-dire $x \sim_0 y$ ssi $x = y$), permette de répéter l'opération D et ainsi de définir, pour tout ordinal α une relation d'équivalence $\sim_\alpha$ compatible avec $\leq$.
4. Que peut-on dire si on applique cette construction à $\mathbb{N}$, à $\mathbb{Q}$ ou à $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ muni de l'ordre lexicographique ?
5. Montrer que pour tout ordinal α, la relation $\sim_\alpha$ est grossière sur la puissance ordinale ω^α.

---
[1] Page du cours : `http://math.univ-lyon1.fr/~blossier/M1Logique2011/`