Université Claude Bernard Lyon I | 2nd semestre 2010/2011
Master 1 | Introduction à la Logique mathématique [1]

Théorie des ensembles
DM 2.

Exercice I. Lemme de König

1. Un *arbre* est la donnée d'un ensemble N (les noeuds) muni d'une relation binaire de succession immédiate et d'une noeud origne r (sa racine) tel que :
   – r n'est successeur immédiat d'aucun autre noeud ;
   – tout noeud autre que la racine est successeur immédiat d'un unique noeud ;
   – tout noeud appartient à une branche partant de r (une suite de successeurs immédiats d'origine r).
   On dit qu'un arbre est à *branchement fini* lorsque chacun des noeuds n'a qu'un nombre fini de successeurs immédiats.

   Montrer, à l'aide de l'axiome des choix dépendants, qu'un arbre infini qui est à branchement fini possède au moins une branche infinie.
2. Un *graphe* est la donnée d'un ensemble S de sommets et d'un ensemble A d'arêtes formé de paires d'éléments de S (ne contenant pas de singleton).

   Un *chemin* dans un graphe est une suite finie $(x_i)_{i<n}$ de sommets (chemin fini) ou une suite infinie $(x_i)_{i<\omega}$ (chemin infini) telle que $\{x_i, x_{i+1}\}$ est une arête pour chaque $i < n-1$ ou pour chaque $i < \omega$ (dans le second cas). Un chemin est *simple* s'il ne contient pas deux fois le même sommet.

   Un graphe est *connexe* si pour toute paire de sommets, il existe un chemin contenant les sommets de cette paire.

   Deux sommets sont dits *adjacents* s'ils forment une arête. Le *degré* d'un sommet est le nombre de sommets adjacents à celui-ci. Un graphe est de *degré fini* si tous ses sommets le sont.

   Montrer, à l'aide de l'axiome des choix dépendants, qu'un graphe connexe infini de degré fini possède un chemin simple infini.

Exercice II. Clubs

Soit κ un cardinal régulier infini non dénombrable. Une partie C de κ est un *club* ("closed unbounded") si c'est une partie close et cofinale, c'est-à-dire si C est cofinale dans κ et pour tout $A \subseteq C$, $\sup A \in C \cup \{\kappa\}$.

1. Montrer que l'ensemble des ordinaux limites appartenant à κ forme un club.
2. Montrer que l'intersection de deux clubs est un club.
3. Soient $\lambda < \kappa$ et $(C_i)_{i<\lambda}$ une famille de clubs, montrer que $\cap_{i\in\lambda} C_i$ est un club.
4. Soit $(C_i)_{i<\kappa}$ une famille de clubs, montrer que l'intersection diagonale
$$\Delta_{i<\kappa} C_i := \{\alpha < \kappa : \alpha \in \cap_{i<\alpha} C_i\}$$
   est un club.
5. Un ensemble $S \subseteq \kappa$ est dit *stationnaire* s'il intersecte tous les clubs. Montrer que tout club est stationnaire.
6. Montrer que l'intersection d'un ensemble stationnaire avec un club est stationnaire.
7. (Lemme de Fodor) Soit $S \subseteq \kappa$ un ensemble stationnaire et $f : S \to \kappa$ une fonction régressive (c'est-à-dire telle que $f(x) < x$ pour tout $x \in S$). Montrer qu'il existe un ensemble stationnaire $T \subseteq S$ tel que f soit constante sur T.

1. Page du cours : `http://math.univ-lyon1.fr/~blossier/M1Logique2011/`