Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2010/2011
Master 1 — Introduction à la Logique

Théorie des ensembles
Feuille 2.

Exercice 1. On rappelle que l'axiome de fondation est l'énoncé suivant : pour tout ensemble non vide x, il existe un ensemble $y \in x$ tel que $y \cap x = \emptyset$. Vérifier que cet axiome interdit l'existence d'ensembles x tels que $x \in x$, ou l'existence de suites $(x_n)_{n<\omega}$ telles que $x_{n+1} \in x_n$ pour tout n.

Exercice 2. On définit une hiérarchie d'ensembles (V_α) indexée par les ordinaux en posant :

- $V_0 = \emptyset$;
- $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$;
- Si α est limite, $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$.

1. Montrer que V_α est un ensemble transitif pour tout α.
2. Montrer que $\beta < \alpha$ ssi $V_\beta \in V_\alpha$, et que $\beta \leq \alpha$ ssi $V_\beta \subseteq V_\alpha$.
3. Si x est un ensemble, on définit son *rang* $rg(x)$ en posant

$$rg(x) = \begin{cases} \text{le plus petit } \gamma \text{ tel que } x \in V_{\gamma+1} \text{ si un tel } \gamma \text{ existe.} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que $rg(\alpha) = \alpha$ pour tout ordinal α.
4. Montrer que l'axiome de fondation est équivalent à l'énoncé suivant : pour tout ensemble x, il existe un ordinal γ tel que $x \in V_\gamma$.

Exercice 3. Une *fonction de choix* sur une famille S d'ensembles est une fonction sur S telle que pour $X \in S$,

$$f(X) \in X.$$

Si $\{X_i : i \in I\}$ est une famille d'ensembles alors le produit de ces ensembles est l'ensemble

$$\prod_{i \in I} X_i = \{f : f \text{ est une fonction sur } I \text{ telle que } f(i) \in X_i \text{ pour tout } i \in I\}.$$

Autrement dit un élément du produit correspond à une fonction de choix.

L'axiome du choix (AC) est l'énoncé suivant : toute famille d'ensembles non vides admet une fonction de choix (ou encore tout produit d'ensembles non vides est non vide).

Vérifier que les énoncés suivants sont équivalents à l'axiome du choix :

1. (AC') Pour tout ensemble A non vide il existe une fonction $\varphi\colon \mathcal{P}(A)\setminus\{\emptyset\} \to A$ telle que pour tout $X \in \mathcal{P}(A)\setminus\{\emptyset\}$ on ait $\varphi(X) \in X$.
2. (AC") Pour tous les ensembles X, Y et toute application surjective $g\colon X \to Y$, il existe une application $h\colon Y \to X$ telle que $g \circ h$ soit l'application identique de Y dans Y.

Exercice 4. – L'axiome des choix dépendants (ACD) est l'énoncé suivant : pour tout ensemble X et toute relation binaire sur X tels que pour tout $x \in X$ il existe $y \in X$ vérifiant xRy, il existe alors une suite $(x_n)_{n<\omega}$ de X telle que $x_n R x_{n+1}$ pour tout n.
– L'axiome du choix dénombrable (ACden) est l'énoncé : tout produit dénombrable d'ensembles non vides est non vide.

1. Montrer que (AC) implique (ACD).
2. Montrer que (ACD) implique (ACden).

Exercice 5. Donner une démonstration des deux résultats classiques d'analyse suivants :
(a) Soit X un espace métrique et F une partie de X. Alors F est fermé si, et seulement si, toute suite convergente d'éléments de F a sa limite dans F.
(b) Soit X un espace métrique et $f\colon X \to \mathbb{R}$ (muni de sa topologie usuelle). Alors f est continue (i.e l'image réciproque par f d'un fermé de $\mathbb{R}$ est un fermé de X) si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in X$ on a $\lim f(x_n) = f(x)$.
Que pensez-vous de vos démonstrations ? Pourriez-vous convaincre quelqu'un qui ne croit pas à l'axiome du choix que les résultats sont corrects ? Avez-vous vraiment besoin de l'axiome du choix ou d'une version plus faible ?

Exercice 6. On rappelle qu'un ensemble est fini s'il est équipotent à un ordinal fini (c.à.d. à un entier $n < \omega$) et qu'un ensemble est dénombrable s'il est équipotent à ω.

Un ensemble X est dit *Dedekind-fini* si toute injection de X dans X est surjective.

1. Montrer que tout ensemble fini est Dedekind-fini.
2. Montrer qu'un ensemble est Dedekind-infini si et seulement si il contient un sous-ensemble dénombrable.
3. Montrer qu'un ensemble infini est Dedekind-infini.
4. Montrer la question précédente en utilisant (ACden) mais pas (ACD).