Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2010/2011
Master 1 — Introduction à la Logique

Théorie des ensembles
Feuille 3.

Exercice 1 (Cardinaux de Hartogs)**.** Soit α un ordinal. On dit que α est un *cardinal* si aucun ordinal strictement inférieur à α n'est équipotent à α.

– Vérifier que tous les ordinaux finis sont des cardinaux.
– Soit X un ensemble. Montrer qu'il existe un ordinal qui n'est équipotent à aucune partie de X.
– Soit X un ensemble et soit α le plus petit ordinal non équipotent à une partie de X. Montrer que α est un cardinal. On l'appelle le *cardinal de Hartogs* de X.

Exercice 2. Montrer qu'il existe un ordinal α tel que $\alpha = \aleph_\alpha$.

Exercice 3.

1. Trouver des suites de cardinaux (κ_i) et (λ_i) telles que $\kappa_i < \lambda_i$ pour tout i mais $\sum \kappa_i = \sum \lambda_i$.
2. Trouver une suite de cardinaux non nuls (κ_i) (avec I infini) telle que $\sum \kappa_i = \prod \kappa_i$.
3. Calculer $\prod_{i=1}^{+\infty} i$ (comme produit de *cardinaux*).

Exercice 4.

1. Soit κ un cardinal infini. Montrer que $\kappa^\kappa = 2^\kappa$.
2. Montrer que $\prod_{n\in\omega} \aleph_n = \aleph_\omega^{\aleph_0}$.

Exercice 5. Un ordre total $<$ sur l'ensemble X est *discret* si pour toute paire $x < y$ dans X il existe $x', y' \in X$ tels que $x < x'$ et $y' < y$ tels que pour tout $z \in X$, si $x < z < y$ alors $x' \leq z \leq y'$.

1. Montrer qu'à isomorphisme près il existe $2^{\aleph_0}$ ordres totaux denombrables.
2. Montrer qu'à isomorphisme près il existe $2^{\aleph_0}$ ordres discrets.

Exercice 6. On rappelle que la *cofinalité* d'un ordinal α est définie comme le plus petit ordinal β pour lequel il existe une fonction $f \colon \beta \to \alpha$ strictement croissante et d'image non majorée dans α. On dit qu'un cardinal est *régulier* si pour toute partie $X \subseteq \kappa$ de cardinal strictement inférieur à κ on a $\sup(X) < \kappa$.

1. Montrer que $\mathrm{cof}(\alpha)$ est le plus petit ordinal γ tel qu'il existe une fonction $f \colon \gamma \to \alpha$ dont l'image ne soit pas strictement majorée.
2. Montrer que, pour tout ordinal α, $\mathrm{cof}(\alpha)$ est un cardinal.

3. Montrer que $\mathrm{cof}(\mathrm{cof}(\alpha)) = \mathrm{cof}(\alpha)$ pour tout ordinal α.
4. Montrer qu'un cardinal λ infini est régulier si et seulement si $\mathrm{cof}(\lambda) = \lambda$.

Exercice 7.

1. Montrer qu'un cardinal κ est régulier si, et seulement si, pour tout $\lambda < \kappa$ et toute famille $(X_\alpha)_{\alpha\in\lambda}$ d'ensembles tels que $|X_\alpha| < \kappa$ pour tout $\alpha < \lambda$, on a $|\cup X_\alpha| < \kappa$.
2. Soit κ un cardinal ; montrer que $\mathrm{cof}(\kappa)$ est le plus petit ordinal γ tel que α soit la réunion de γ ensembles de cardinal strictement inférieur à κ.
3. On appelle *faiblement inaccessible* un cardinal non dénombrable à la fois limite et régulier. Montrer qu'un tel cardinal α doit vérifier $\alpha = \aleph_\alpha$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 8.

1. Soit κ un cardinal infini et $\lambda < \mathrm{cof}(\kappa)$. Montrer que toute fonction croissante $f\colon \kappa \to \lambda$ est constante sur un segment final de κ.
2. Soit κ un cardinal infini et λ un cardinal non nul. Montrer que $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^+.\kappa^\lambda$
3. Soit n un entier et λ un cardinal non nul. Montrer que $\aleph_n^\lambda = \aleph_n.2^\lambda$.