Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2010/2011
Master 1 — Introduction à la logique mathématique

Théorie des ensembles
Feuille 4 – filtres et ultrafiltres.

Exercice 1. Soit X un ensemble quelconque et $\mathcal{F}$ un filtre sur X. Montrer que si $\mathcal{F}$ contient un ensemble fini alors $\mathcal{F}$ est principal.

Exercice 2. Soit X un ensemble quelconque et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur X. Montrer que exactement l'une des deux possibilités suivantes est vraie :
- $\mathcal{U}$ n'est pas principal, et contient le filtre de Fréchet.
- $\mathcal{U}$ est principal, et il existe un (unique) $x \in X$ tel que $\mathcal{U} = \langle \{x\} \rangle = \{A \subseteq X : x \in A\}$.

Exercice 3. Soit X un ensemble et βX l'ensemble des ultrafiltres sur X.

Pour une partie $A \subseteq X$, soit $A' \subseteq \beta X$ l'ensemble des ultrafiltres qui contiennent A.

1. Montrer que $A' \cap B' = (A \cap B)'$, $A' \cup B' = (A \cup B)'$ et $(X \setminus A)' = \beta X \setminus A'$.
2. Montrer que $\{A' : A \subseteq X\}$ est la base d'une topologie compacte, totalement discontinue sur βX.
3. Montrer que les ouvert-fermés de βX sont exactement les A'.
4. Montrer qu'un ultrafiltre $u \in \beta X$ est topologiquement isolé si et seulement si c'est un ultrafiltre principal.
5. D'après l'exercice précédent nous pouvons identifier X avec la partie de βX qui consiste en les ultrafiltres principaux. Montrer que sous cette identification, X est une partie discrète et dense de βX.

Exercice 4. Soit $(I, \leq)$ un ordre partiel *filtrant*, c.à.d. que pour tous $i, j \in I$ il existe $k \in I$ tel que $k \geq i, j$. (Par exemple : parties finies de X avec inclusion ; les voisinages d'un point x dans un espace topologique, avec l'inclusion inverse ; ...)

Pour $i \in I$, posons $I_i = \{j \in I : j \geq i\}$. Montrer que $\mathcal{A} = \{I_i : i \in I\}$ est une base de filtre. Caractériser les membres du filtre engendré.

Exercice 5. Soit X un espace topologique. Montrer que X est séparé si et seulement si un filtre sur X admet au plus une limite.

Exercice 6. Soit X un espace topologique et I un ensemble d'indice. Une *I-suite* dans X est simplement un membre de X^I, notée $\{x_i\}_{i \in I}$. Soit aussi $\mathcal{F}$ un filtre sur I.

Nous disons que la suite $\{x_i\}$ converge ver $y \in X$ *modulo* $\mathcal{F}$, en symboles

$$x_i \xrightarrow[i \to \mathcal{F}]{} y,$$

si pour tout voisinage $V \ni y$ nous avons

$$\text{pour tout voisinage } V \ni y : \qquad \{i : x_i \in V\} \in \mathcal{F}.$$

1. Considérons l'application $x. : I \to X$, $x. : i \mapsto x_i$. Montrer que $x_i \xrightarrow[i \to \mathcal{F}]{} y$ si et seulement si le filtre image $x.(\mathcal{F})$ converge en y.
2. Soit $\mathcal{F}$ le filtre de Fréchet sur $\mathbb{N}$ et $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Montrer que $x_n \to y$ dans le sens ordinaire si et seulement si $x_n \xrightarrow[n \to \mathcal{F}]{} y$.

Exercice 7. Soit X un espace topologique compact, et I un ensemble. Soit $\{x_i\}_{i \in I}$ une I-suite dans X.

1. Montrer que pour tout ultrafiltre $u \in \beta I$, la limite $\lim_{i \to u} x_i$ existe (et est unique).
2. Montrer que l'application $u \mapsto \lim_{i \to u} x_i$ est une application continue de βI dans X.
3. Montrer que c'est l'unique application continue qui étend $x_\cdot : i \mapsto x_i$ (quand on identifie I avec les ultrafiltres principaux dans βI).