Théorie des modèles
Feuille 5.

Exercice 1 Soit K un corps commutatif.

1. Vérifier que toute sous-structure de la structure $\langle K, 0, 1, +, -, \cdot \rangle$ est un anneau.
2. Ajouter une fonction f au langage telle que toute sous-structure de $\langle K, 0, 1, +, -, \cdot, f \rangle$ soit un corps.

Exercice 2 Soit $L = \{R\}$ le langage réduit à une relation binaire R. Montrer qu'il existe deux L-structures non isomorphes $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ telles que $\mathcal{M}$ se plonge dans $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}$ se plonge dans $\mathcal{M}$.

Exercice 3 Donner un exemple de deux ordres totaux discrets infinis qui ne sont pas ∞-équivalents.

Exercice 4 Montrer que la relation d'∞-équivalence est une relation d'équivalence.

Exercice 5

1. Soit K un corps algébriquement clos. Montrer que pour tout sous-corps k fini ou dénombrable de K, la clôture algébrique de k est dénombrable.
2. Soit K_1 et K_2 deux corps algébriquement clos de même caractéristique et non dénombrables. Montrer que K_1 et K_2 sont ∞-équivalents.

Exercice 6 Soit $L = \{B, \leq\}$, où B est un prédicat unaire, et $\leq$ une relation binaire. On appelle *chaîne bicolore* une L-structure totalement ordonnée par $\leq$ (les éléments satisfaisant B seront dits *blancs*, les autres *noirs*) ; elle est *générique* si entre deux éléments blancs il y en a toujours au moins un noir, et entre deux noirs il y a toujours au moins un blanc.

1. Donner des exemples de chaînes bicolores génériques dénombrables et non dénombrables.
2. Donner un exemple d'une chaîne bicolore générique tel que l'ensemble des points blancs est dénombrable et tel que l'ensemble des points noirs n'est pas dénombrable.
3. Soit B l'ensemble des points blancs d'une chaîne bicolore générique et N l'ensemble des points noirs de cette même chaîne. Montrer que $|B| \leq 2^{|N|}$ et $|N| \leq 2^{|B|}$.
4. Donner un exemple de deux chaînes bicolores génériques non ∞-équivalentes.

Exercice 7 Montrer que l'ensemble des nombres premiers est une partie définissable dans la structure $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$. A-t-on besoin de paramètres ?

Exercice 8

1. Soit T une théorie complète. Montrer que si T a un modèle fini alors tous les modèles de T sont isomorphes. Le résultat est-il encore vrai si l'on ne suppose pas que T est complète ?
2. Soit T une théorie complète. Montrer que si T a un modèle infini alors tous les modèles de T sont infinis. Sont-ils tous isomorphes ?

Exercice 9 La théorie des groupes infinis est-elle complète ? Même question avec la théorie des corps infinis.

Exercice 10

1. Donner une axiomatisation de la théorie des ordres totaux denses sans extrémité. Montrer que cette théorie est complète.
2. Donner une axiomatisation de la théorie de la relation d'équivalence à deux classes infinies. Montrer que cette théorie est complète.
3. Donner une axiomatisation de la théorie de la relation d'équivalence à une infinité de classes toutes infinies. Montrer que cette théorie est complète.

Exercice 11

1. Donner un exemple de structures $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ tel que $\mathcal{M}$ est une sous-structure de $\mathcal{N}$ mais n'est pas élémentairement équivalente à $\mathcal{N}$.
2. Donner un exemple de structures $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ tel que $\mathcal{M}$ est une sous-structure de $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont élémentairement équivalentes mais $\mathcal{M}$ n'est pas une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$.

Exercice 12

1. Soient $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_3$. Montrer que
   (a) $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_2 \prec \mathcal{M}_3$ implique $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_3$;
   (b) $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_3$ et $\mathcal{M}_2 \prec \mathcal{M}_3$ implique $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$.
2. Soit I un ensemble totalement ordonné et $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ une chaîne élémentaire de L-structures ($\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}_j$, pour tout $i < j$). Montrer que pour tout $i \in I$, $\mathcal{M}_i \prec \cup_{i\in I}\mathcal{M}_i$.

Exercice 13 Entre quelles structures dans la liste suivante existe-t-il un plongement ? un plongement élémentaire ?

$$\langle \mathbb{Q}, <, +, 0\rangle, \quad \langle \mathbb{Q}, <, \cdot, 1\rangle, \quad \langle \mathbb{R}, <, +, 0\rangle, \quad \langle \mathbb{R}, <, \cdot, 1\rangle, \quad \langle \mathbb{R}^+, <, \cdot, 1\rangle$$

Exercice 14 Soit L le langage réduit au symbole de relation binaire $<$. Soit T la théorie des ordres totaux dans ce langage.

1. Décrire une axiomatisation de T.
2. Soit $n > 0$. Expliciter une formule du premier ordre $\phi_n(x, y)$ telle que pour tout modèle $\mathcal{M}$ de T, $\mathcal{M} \models \phi(a, b)$ si et seulement si $a < b$ et il existe exactement $n - 1$ éléments de $\mathcal{M}$ strictement compris entre a et b.
3. Soit $\mathcal{N}$ la L-structure $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ muni de l'ordre lexicographique, c'est-à-dire tel que
$$(a, m) <^{\mathcal{N}} (b, n) \text{ si et seulement si } a < b \text{ ou } (a = b \text{ et } m < n).$$
   Soit $\mathcal{M}$ la sous-structure de $\mathcal{N}$ de domaine $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$. En utilisant la méthode de va-et-vient infini, montrer que $\mathcal{M}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$.
4. On considère $\mathcal{N}'$ la sous-structure de $\mathcal{N}$ de domaine $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}) \cup ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times 2\mathbb{Z})$. Que peut-on dire de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}'$, et de $\mathcal{N}'$ et $\mathcal{N}$?
5. Si $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_3$ sont trois structures tel que $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_3$, a-t-on nécessairement $\mathcal{M}_2 \prec \mathcal{M}_3$?