Université Claude Bernard Lyon I
Master 1

2nd semestre 2010/2011
Introduction à la Logique

Théorie des ensembles

DM 3 – arithmétique des cardinaux – Corrigé.

Exercice I. a. Nous avons vu que pour tout cardinal infini κ il existe une bijection $\varphi\colon \kappa\times\kappa \to \kappa$. Montrer qu'il existe une bijection $\psi\colon \kappa\times\kappa \to \kappa$ tel que, en outre, pour chaque $i<\kappa$ l'application $j\mapsto \psi(i,j)$ est strictement croissante. (On pourrait le faire en examinant la preuve donnée en cours du premier fait, ou comme une conséquence de ce fait.) En déduire que $\psi(i,j)\geq j$.

Solution : Nous avons montré en cours qu'il existe une bijection $\varphi\colon \kappa\times\kappa\to\kappa$ qui vérifie

$$\varphi(i,j)<\varphi(i',j') \iff \begin{cases} \max(i,j)<\max(i',j') & \text{ou}\\ \max(i,j)=\max(i',j') \text{ et } i<i' & \text{ou}\\ \max(i,j)=\max(i',j') \text{ et } i=i' \text{ et } j<j'. \end{cases}$$

Si $i<\kappa$ et $j<j'<\kappa$ alors nous avons $\varphi(i,j)<\varphi(i,j')$ par le premier cas si $j'>i$ et par le troisième si $j'\leq i$.

Nous avons également démontré que si X est bien ordonné et $f\colon X\to X$ est strictement croissante alors $f(x)\geq x$ pour tout x. Ceci appliqué ici donne $\varphi(i,j)\geq j$.

b. Soit μ un cardinal infini, et $\{\theta_i\}_{i<\mu}$ une suite croissante (faiblement) de cardinaux. Montrer que

$$\sum_{i<\mu}\theta_i=\mu\cdot\sup_i\theta_i=\max\mu,\sup_i\theta_i, \qquad \prod_{i<\mu}\theta_i=\big(\sup_i\theta_i\big)^{\mu}.$$

Solution : Il existe plusieurs approches... Donnons-en une qui marche à la fois pour la somme et pour le produit. Nous fixons une bijection $\varphi\colon \mu\times\mu\to\mu$ comme plus haut. Alors d'un côté nous avons

$$\theta_i\leq\sup_{j<\mu}\theta_j \quad\Longrightarrow\quad \sum_{i<\mu}\theta_i\leq\sum_{i<\mu}\sup_{j<\mu}\theta_j=\mu\cdot\sup_{j<\mu}\theta_j,$$

et d'un autre

$$\sum_{i<\mu}\theta_i\leq\theta_j \quad\Longrightarrow\quad \sum_{i<\mu}\theta_i\leq\sup_{j<\mu}\theta_j,$$

d'où

$$\sum_{i<\mu}\theta_i=\sum_{i,j<\mu}\theta_{\varphi(i,j)}\geq\sum_{i,j<\mu}\theta_j=\mu\cdot\sum_{j<\mu}\theta_j\geq\mu\cdot\sup_{j<\mu}\theta_j.$$

Remplaçant somme par produit et produit par puissance, le même argument donne le résultat pour le produit.

c. Soit κ un cardinal infini. Montrer que $\mathrm{cf}(\kappa)$ est le plus petit cardinal μ tel qu'il existe une suite croissante de cardinaux $\{\theta_i\}_{i<\kappa}$ avec $\theta_i<\kappa$ et $\sum_{i<\mu}\theta_i=\kappa$.

Solution : Soit μ le plus petit tel cardinal.

Par la question précédente nous obtenons $\kappa=\max\mu,\sup_{i<\mu}\theta_i$ avec $\theta_i<\kappa$, d'où en particulier $\kappa\geq\mu$. Si $\mu=\kappa$ alors $\mu\geq\mathrm{cf}(\kappa)$; et si $\mu<\kappa$ alors $\kappa=\sup_{i<\mu}\theta_i$ avec $\theta_i<\kappa$, d'où encore $\mu\geq\mathrm{cf}(\kappa)$. Ainsi de toute manière $\kappa\geq\mu\geq\mathrm{cf}(\kappa)$. En particulier, si κ est régulier alors $\kappa=\mu=\mathrm{cf}(\kappa)$.

Reste à montrer que $\mu \leq \mathrm{cf}(\kappa)$ quand κ est singulier. En particulier, κ est limite. Alors nous avons $\kappa = \sup_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} \alpha_i$ où les α_i sont des ordinaux. Pour chaque ordinal $\beta < \kappa$, nous avons $\beta < |\beta|^+ < \kappa$ (car κ est limite), d'où l'existence d'un i tel que $\alpha_i \geq |\beta|^+$. Nous avons alors $\beta < |\beta|^+ \leq |\alpha_i| \leq \alpha_i$. Tout cela pour dire que $\kappa = \sup_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} |\alpha_i|$ également. Or la suite $|\alpha_i|$ n'est pas nécessairement croissante. Posons $\theta_i = \sup_{j<i} |\alpha_j|$ pour $i < \mathrm{cf}(\kappa)$. Alors chaque θ_i est un cardinal plus petit que κ, car $|\alpha_j| < \kappa$ et $i < \mathrm{cf}(\kappa)$. Ainsi $\kappa = \sup_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} \theta_i$ et $\mathrm{cf}(\kappa) \geq \mu$.

Exercice II. a. Supposons que λ est singulier. Montrer qu'il existe des cardinaux réguliers $\mu < \lambda$ et $\theta_i < \lambda$ pour $i < \mu$ tels que pour tout cardinal κ :

$$\kappa^\lambda = \big(\sup_i \kappa^{\theta_i}\big)^\mu.$$

Solution : Soit $\mu = \mathrm{cf}(\lambda) < \lambda$, et $\theta_i < \lambda$ croissants tels que $\lambda = \sum_{i<\mu} \theta_i$. Alors

$$\kappa^\lambda = \kappa^{\sum_{i<\mu} \theta_i} = \prod_{i<\mu} \kappa^{\theta_i} = \big(\sup_{i<\mu} \kappa^{\theta_i}\big)^\mu.$$

b. À partir de maintenant, λ est régulier. Montrer que si $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$ alors

$$\kappa^\lambda = \max \kappa, \sup_{\theta<\kappa} \theta^\lambda.$$

Solution : L'inégalité $\geq$ est facile. Montrons $\leq$. Puisque $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$, chaque fonction $f \in \kappa^\lambda$ (i.e., $f\colon \lambda \to \kappa$) est bornée, i.e., appartient à l'ensemble α^λ pour un certain $\alpha < \kappa$. Ainsi, en tant qu'ensemble, $\kappa^\lambda = \bigcup_{\alpha<\kappa} \alpha^\lambda$, d'où

$$\kappa^\lambda \leq \sum_{\text{ordinal } \alpha<\kappa} |\alpha^\lambda| = \sum_{\text{ordinal } \alpha<\kappa} |\alpha|^\lambda \leq \kappa \cdot \sup_{\text{cardinal } \theta<\kappa} \theta^\lambda.$$

c. Montrer que si $\lambda \geq \kappa$ (et λ est régulier !) alors

$$\kappa^\lambda = \lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)}.$$

Solution : Nous avons déjà vu que (pour λ infini) $2^\lambda = \lambda^\lambda$, d'où

$$\lambda^\lambda \geq \kappa^\lambda \geq 2^\lambda = \lambda^\lambda.$$

En outre, $\lambda = \mathrm{cf}(\lambda)$.

d. Montrer que si $\mu = \mathrm{cf}(\kappa) < \lambda < \kappa$ alors κ est singulier, et il existe une suite de cardinaux $\theta_i < \kappa$ pour $i < \mu$ tels que

$$\kappa^\lambda = \max \mu^\lambda, \big(\sup_{i<\mu} \theta_i^\lambda\big)^\mu.$$

(On choisit $\theta_i < \kappa$ tels que $\kappa = \sum_{i<\mu} \theta_i$. Fixons une bijection entre κ et la réunion disjoint $\coprod_{i<\mu} \theta_i$. Alors pour toute application $f\colon \lambda \to \kappa$ nous obtenons une application $g\colon \lambda \to \mu$, et pour chaque $i < \mu$, une application $h_i\colon g^{-1}(\{i\}) \to \theta_i$...)

Solution : L'inégalité $\geq$ est facile. Montrons $\leq$. Nous fixons une bijection $\xi\colon \kappa \to \coprod_{i<\mu} \theta_i = \bigcup_i \{i\} \times \theta_i$, et soient π_1 et π_2 les deux projections. Fixons $f \in \kappa^\lambda$. Alors nous pouvons poser $g = \pi_1 \circ \xi \circ f \in \mu^\lambda$, et pour chaque $i < \mu$ définir $h_i \in \theta_i^\lambda$ par :

$$h_i(j) = \begin{cases} \pi_2 \circ \xi \circ f(j) & \text{si } g(j) = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors l'application $f \mapsto g, (h_i)_{i<\mu}$ est injective, d'où

$$\kappa^\lambda \leq \mu^\lambda \cdot \prod_{i<\mu} \theta_i^\lambda.$$

Nous appliquons 1.b pour conclure.

e. Quel cas n'a-t-on pas traité ?

Solution : $\lambda = \mathrm{cf}(\kappa)$.

f. Petite récapitulation (à vérifier !) : pour tous λ et κ nous connaissons la valeur de κ^λ si nous connaissons :

1. Les valeurs de θ^μ pour tout $\mu < \lambda$ (et tout θ).
2. Les valeurs de θ^λ pour tout $\theta < \kappa$.
3. L'application $\theta \mapsto \theta^{\mathrm{cf}(\theta)}$.

Conclure que la fonction $\theta \mapsto \theta^{\mathrm{cf}(\theta)}$ détermine la fonction $(\kappa, \lambda) \mapsto \kappa^\lambda$.

Solution : Nous connaissons κ^λ par cas :
– Si λ est singulier : par 1 et a.
– Si $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$ et λ est régulier : par 2 et b. [rq : nous n'utilisons pas l'hypothèse que λ soit régulier]
– Si $\mathrm{cf}(\kappa) = \lambda$ (nécessairement régulier) : par 3.
– Si $\mathrm{cf}(\kappa) < \lambda < \kappa$ et λ est régulier : par 1, 2 et d. [rq : nous n'utilisons pas l'hypothèse que λ soit régulier, et il suffit que $\mathrm{cf}(\kappa) < \min \lambda, \kappa$]
– Si $\kappa \geq \lambda$ et λ est régulier : par 3 et c. [rq : seul cas où la régularité de λ est véritablement utilisée].
Maintenant supposons que nous connaissons $\theta \mapsto \theta^{\mathrm{cf}(\theta)}$. Nous faisons une *double récurrence* : Montrons par récurrence (1) sur λ que pour tout κ, la valeur de κ^λ est déterminée. Pour un λ fixé, nous montrons par récurrence (2) sur κ que κ^λ est déterminé. En effet, l'hypothèse de récurrence (1) nous donne la donnée 1, l'hypothèse de récurrence (2) nous donne la donnée 2, et la donnée 3 est connue par hypothèse. Donc κ^λ est déterminé, ce qui conclut l'étape de récurrence intérieure (la (2)), qui, à son tour, conclut l'étape de récurrence extérieure (la (1)) et c'est bon.