
Fiche Algèbre linéaire 1

APPLICATIONS LINÉAIRES - THÉORÈME DU RANG

Notions abordées

- *Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels.*
- *Bases, dimension.*
- *Applications linéaires, noyau, image, rang d'une application linéaire.*
- *Théorème du rang. Injectivité, surjectivité d'une application linéaire.*

Rappel de quelques définitions

Un **espace vectoriel** sur un corps commutatif K est un ensemble non vide E muni de deux lois :

- une loi de composition $\boxed{\quad\quad\quad}$ $+ \ : \ E \times E \to E$, appelée addition,
- une loi de composition $\boxed{\quad\quad\quad}$ $\cdot \ : \ K \times E \to E$, appelée multiplication par un scalaire,

telles que :

(i) $(E, +)$ est un $\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$ (on note 0 ou 0_E l'élément $\boxed{\quad\quad}$ de $+$, appelé le vecteur $\boxed{\quad\quad}$),

(ii) la loi $\cdot$ est distributive à gauche par rapport à la loi $+$, c'est-à-dire pour tous vecteurs u, v de E et tout scalaire λ de K on a $\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$,

(iii) la loi $\cdot$ est distributive à droite par rapport à l'addition du corps K, c'est-à-dire pour tout vecteur v de E et tous scalaires λ et μ de K on a $\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$,

(iv) pour tout vecteur v de E et tous scalaires λ et μ de K on a $\boxed{(\lambda\mu) \cdot v = \quad\quad\quad}$,

(v) l'élément neutre 1_K de K pour la multiplication est neutre à gauche pour la loi $\cdot$, c'est-à-dire pour tout vecteur v de E, on a $\boxed{\quad\quad\quad}$.

De la définition d'un K-espace vectoriel E découle les propriétés suivantes : pour tout vecteur v de E et tout scalaire λ de K,

$$\boxed{0_K \cdot v = \quad\quad} \qquad \boxed{\lambda \cdot 0_E = \quad\quad} \qquad \boxed{(-1_K) \cdot v = \quad\quad}.$$

Soit E un K-espace vectoriel. Une partie F de E est un **sous-espace vectoriel** de E si F est non vide et $\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$.

Une famille $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E est une **famille génératrice** de E si
$\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$.

Une famille $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E est une **famille libre** de E si
$\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$.

Une famille $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E est une **base** de E si
$\boxed{\text{pour tout } v \in E, \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$.

Une base de E est une famille $\boxed{}$.

L'espace vectoriel E est de **dimension finie** s'il existe $\boxed{}$.

On suppose pour la suite de cette partie que E est de dimension finie.
La **dimension de** E correspond au $\boxed{}$.

Si $(v_1, \ldots, v_n)$ est une famille libre de E et $(w_1, \ldots, w_r)$ est une famille génératrice de E alors

$$\boxed{n \quad \dim E \quad r}$$

Donner un exemple d'un espace vectoriel de dimension infinie et d'une base infinie.

Soit F et G deux K-espace vectoriels. Une application $\varphi \ : \ F \to G$ est dite **linéaire** si $\boxed{}$.

PARTIE I : Une démonstration du théorème du rang

Le but de cette partie est d'étudier l'énoncé du théorème du rang, puis de le démontrer. Pour la suite, on fixe un corps commutatif K.

> ***Théorème du rang***
> Soit $u : E \to F$ une **application linéaire** d'un K-espace vectoriel E de **dimension finie** vers un K-espace vectoriel F. Alors,
>
> $$\boldsymbol{\dim E = \dim \ker u + \mathrm{rg}\, u}$$

1 - (a) Rappeler la définition du noyau d'une application linéaire $u : E \to F$.

$$\boxed{\ker u = }$$

(b) Montrer que $\ker u$ est un sous-espace vectoriel de E.
(c) Montrer que u est injective si et seulement si $\ker u = \{0_E\}$.

2 - (a) Compléter les deux formes suivantes de la définition de l'image d'une application linéaire $u : E \to F$.

$$\boxed{\mathrm{Im}\, u = \Big\{ \qquad\qquad : x \in E \Big\} = \Big\{ y \in F : \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big\}}$$

(b) Montrer que $\mathrm{Im}\, u$ est un sous-espace vectoriel de F.
(c) Montrer que si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E alors $\mathrm{Im}\, u$ est engendrée par $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$.

3 - (a) Rappeler la définition du rang d'une application linéaire $u : E \to F$.

$$\boxed{\mathrm{rg}\, u = }$$

(b) Démontrer le théorème du rang. *(Indication : on pourra considérer une base de* $\ker u$ *et la compléter en une base de E.)*

PARTIE II : Exercices d'application

<u>Exercice 1 :</u> *Exemple*

On considère la fonction $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par

$$u(x, y, z, t) = (x + y + 2z - t, x - y - z + t, -x + 5y + 7z - 5t).$$

1 - Vérifier que u est une application linéaire.
2 - Donner un encadrement pour $\dim \ker u$. L'application u peut-elle être injective ?
3 - Donner une base de $\ker u$, puis de $\operatorname{Im} u$.

<u>Exercice 2 :</u> *Injectivité, surjectivité d'une application linéaire en dimensions finies*

Soit une application linéaire $u : E \to F$, où E et F sont deux K-espaces vectoriels de dimensions finies.
1 - Montrer que si u est injective alors $\dim E \leq \dim F$.
2 - Montrer que si u est surjective alors $\dim F \leq \dim E$.
3 - Montrer que si $\dim E = \dim F$, alors u est injective si et seulement si u est surjective.

<u>Exercice 3 :</u> *Exemple en dimension infinie*

On note $C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications réelles infiniment dérivables sur $[0, 1]$.

1 - On considère l'application linéaire $\varphi : C^\infty([0, 1], \mathbb{R}) \to C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ définie pour tout $f \in C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ par $\varphi(f) = f'$.
  (a) φ est-elle injective ?
  (b) φ est-elle surjective ?
  (c) Que peut-on dire de la dimension de $C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$?

2 - On considère l'application linéaire $\psi : C^\infty([0, 1], \mathbb{R}) \to C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ définie pour tout $f \in C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ par

$$\begin{array}{rccl} \psi(f) : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \displaystyle\int_0^t f(x)dx \end{array}$$

  (a) ψ est-elle injective ?
  (b) ψ est-elle surjective ?

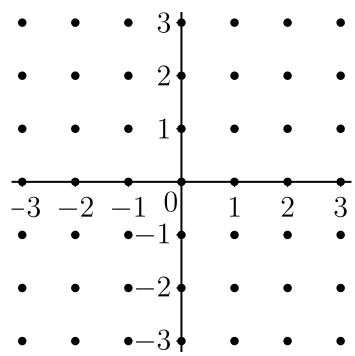
3 - Calculer $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$.

PARTIE III : Extrait sujet 1 Capes Externe 2017

Notations.
$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure usuelle de plan euclidien. La distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ est notée d.
Les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont représentés par des vecteurs colonnes à 2 lignes. On note

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On appelle réseau l'ensemble $\mathbb{Z}^2$, inclus dans le plan $\mathbb{R}^2$. On le note $\mathcal{R}$. Le schéma ci-dessous représente une partie du réseau $\mathcal{R}$.



Partie A : $\mathbb{Z}$-bases du réseau

Soient $\mathcal{B} = (e'_1, e'_2)$ une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On dit que $\mathcal{B}$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$ si :

- $e'_1, e'_2 \in \mathcal{R}$.
- Tout élément X de $\mathcal{R}$ s'écrit de façon unique $X = ae'_1 + be'_2$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

I. Soit $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

II. Soient $e'_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ et $e'_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On note :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $X \in \mathbb{R}^2$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $X = xe'_1 + ye'_2$ si, et seulement si,

$$X = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

2. On suppose dans cette question que (e'_1, e'_2) est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

a. Montrer que $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{Z}^4$.

b. Montrer qu'il existe $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^4$ tels que

$$x_1 e_1' + y_1 e_2' = e_1 \qquad\qquad x_2 e_1' + y_2 e_2' = e_2.$$

c. Soit $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$. Montrer que $AB = I_2$.

d. En déduire que $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

3. On suppose dans cette question que $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{Z}^4$ et que $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

a. Montrer que A est une matrice inversible et que les coefficients de A^{-1} sont tous des entiers relatifs.

b. Montrer que (e_1', e_2') est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

4. Conclure.

III. Soit $e_1' = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathcal{R}$.

1. Montrer que si e_1' est le premier vecteur d'une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$, alors a_1 et b_1 sont premiers entre eux.

2. Réciproquement, montrer que si a_1 et b_1 sont premiers entre eux, alors il existe un vecteur e_2' de $\mathcal{R}$ tel que (e_1', e_2') soit une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

3. Donner une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$ dont le premier vecteur est $\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Partie B : transformations linéaires du réseau

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire. Sa matrice dans la base $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ est notée A.

I. Montrer que $f(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}$ si, et seulement si, les coefficients de A sont tous des entiers relatifs.

II. On suppose dans cette question que $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

1. Montrer que $\mathrm{Im} f$ contient deux vecteurs linéairement indépendants.

2. En déduire que f est surjective, puis bijective.

3. Montrer que $f^{-1}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}$.

4. Justifier que A est inversible et que les coefficients de A^{-1} sont tous des entiers relatifs.

5. Montrer que $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

III. On suppose dans cette question que les coefficients de A sont des entiers relatifs et que $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

1. En utilisant les résultats de la partie **A.**, montrer que $(f(e_1), f(e_2))$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

2. En déduire que $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

IV. Conclure.

Extraits du rapport de jury 2017 :

Le jury a été particulièrement attentif aux items suivants :

— *Exploiter le calcul matriciel.*

Pour cet item, il était demandé au candidat de répondre correctement aux questions A.II.1 et A.II.2c du premier problème. Environ 72% des candidats ont répondu correctement à cet item ; 24% n'ont pas répondu correctement ou de manière incomplète ; 4% n'ont pas abordé cet item. Environ 75% des candidats ayant abordé cette question y ont répondu correctement.

— *Exploiter les propriétés du déterminant.*

Il s'agissait ici de répondre correctement à l'une des questions A.II.2d ou B.II.4 du premier problème. Environ 43% des candidats ont répondu correctement à cette question ; 34% n'ont pas répondu correctement ou de manière incomplète ; 23% n'ont pas abordé cette question. Environ 56% des candidats ayant abordé cette question y ont répondu correctement.

[...]

Certaines compétences ont été régulièrement manifestées par les candidats. Le calcul matriciel et plus généralement l'algèbre linéaire sont bien connus et maîtrisés ; le théorème du rang est utilisé à bon escient, même si bien souvent l'hypothèse de dimension finie a été oubliée. L'identification des transformations géométriques, lorsqu'elle a été abordée, a été souvent bien menée, mais signalons tout de même un manque de rigueur dans le vocabulaire utilisé (« translation glissée ») et l'existence de symétries qui ne sont pas othogonales. Enfin, nombre de candidats connaissent et utilisent à bon escient le théorème de Bézout.

Malheureusement, les problèmes de logique signalés les années précédentes sont toujours bien présents. L'établissement des équivalences laisse souvent à désirer et, fréquemment, seule une implication est démontrée ; il en est de même de l'établissement d'une existence et unicité, où régulièrement l'unicité est passée sous silence. Comme les années précédentes, les symboles mathématiques d'équivalence et d'implication sont utilisés à mauvais escient : rappelons-le, il ne s'agit pas d'abréviations pour le mot « donc ». En outre, la qualité de la rédaction des récurrences apparaît en recul : bien souvent, l'implication de P(n) à P(n+1) n'est pas formulée ou est formulée avec une absence de quantificateurs préjudiciable ; on constate aussi souvent un hiatus entre l'initialisation de la récurrence et la conclusion. Il est également conseillé aux candidats de lire attentivement l'énoncé : quand les hypothèses sur les objets sont différentes d'une partie à l'autre, il convient de les utiliser au bon endroit.

Les éléments de théorie des ensembles nécessaire à la résolution du premier problème ont mis en difficulté de nombreux candidats. Outre la confusion entre les symboles d'inclusion et d'appartenance, régulièrement mentionnée dans les rapports du jury, on constate que la manipulation des images réciproques a donné lieu à de grossières erreurs sur de nombreuses copies. L'injectivité et la surjectivité d'une application sont des notions mal comprises et les questions portant sur ces notions ont été peu traitées. Signalons au passage que le théorème du rang ne s'applique que sur des applications linéaires… Les questions portant sur les notions de groupe et de sous-groupe, dans le premier problème, ont été souvent peu réussies. De nombreux candidats sont incapables de trouver la loi du groupe : ici, pour les isométries vectorielles, il s'agissait de la composition et non de l'addition.

Pour terminer avec les erreurs trop souvent constatées, signalons l'apparition régulière dans les copies du théorème suivant : si deux entiers *a* et *b* ne sont pas premiers entre eux, alors *a* divise *b* ou *b* divise *a*.

Enfin, rappelons que la qualité de la rédaction est un élément essentiel pris en compte dans l'évaluation de l'épreuve. Les démonstrations ne peuvent se limiter à une succession d'arguments sans lien logique, les quantificateurs doivent être utilisés à bon escient et il est attendu de futurs professeurs une grande rigueur dans les raisonnements. De plus, le soin apporté à a copie et l'orthographe ne sont pas non plus à négliger ; les correcteurs apprécient, entre autres, que le numéro de la question traitée soit clairement indiqué par le candidat.

Pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Partie A : interpolation de Lagrange

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on considère le polynôme

$$L_k(X) = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n, \\ i \neq k}} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}.$$

I. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que L_k est l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$P(a_i) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k, \\ 1 \text{ si } i = k. \end{cases}$$

II. On considère l'application

$$F : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R}^n \\ P & \mapsto & (P(a_1), \ldots, P(a_n)). \end{array} \right.$$

1. Montrer que F est une application linéaire.

2. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, montrer qu'il existe un polynôme P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $F(P) = e_k$.

3. Montrer que F est surjective, puis justifier que F est bijective.

III. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(a_k) = f(a_k)$. Ce polynôme P est appelé *polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses $a_1, \ldots, a_n$*.

2. Exprimer le polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses $a_1, \ldots, a_n$ à l'aide des polynômes $L_1, \ldots, L_n$ et des valeurs de f en $a_1, \ldots, a_n$.

Extraits du rapport de jury 2016 :

Le jury a été particulièrement attentif aux questions suivantes :

Question A.II. 3. du premier problème

Dans cette question, on demandait de montrer qu'une application linéaire était bijective, en s'appuyant sur un argument de dimension finie. Environ 22 % des candidats ont répondu correctement à cette question ; 36 % n'ont pas répondu correctement ou de manière incomplète ; 42 % n'ont pas abordé cette question. Environ 38 % des candidats ayant abordé cette question y ont répondu correctement. [...]

Le jury a constaté que les méthodes algébriques qui sous-tendaient les premières parties du premier problème sont en général bien maîtrisées : calculs de déterminant, démonstration de la linéarité d'une application,[...]. On regrette toutefois un manque de précision dans la rédaction : l'argument de dimension finie pour montrer la bijectivité à partir de la surjectivité d'une application linéaire est parfois passé sous silence [...]

Le jury a également apprécié les efforts faits par certains candidats pour traiter une ou plusieurs parties complètes (en particulier dans le premier problème) plutôt que d'adopter une stratégie de « grapillage ».[...]

Problème 2 : équations différentielles

Après avoir étudié la structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients non constants, on s'intéresse à quelques propriétés des solutions d'équations différentielles linéaires du second ordre particulières.

Notations et rappels

1. Pour une équation différentielle appelée E, on note :
   – EH l'équation homogène associée ;
   – $\mathrm{Sol}(E)$ l'ensemble des solutions de l'équation E ;
   – $\mathrm{Sol}(EH)$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée EH.
2. On admet le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire pour les équations différentielles du second ordre, selon lequel :
   étant donnés un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide, a, b et c des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ et $(t_0, y_0, y'_0) \in I \times \mathbb{R}^2$, il existe une unique fonction y, définie et de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle I qui vérifie le problème de Cauchy :
$$\begin{cases} \forall t \in I, & y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \\ & y(t_0) = y_0 \text{ et } y'(t_0) = y'_0 \end{cases}.$$

Partie A : généralités

Soit E l'équation différentielle définie sur un intervalle I :
$$E : \; y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t).$$
où a, b et c sont des applications continues de I dans $\mathbb{R}$ et y une application de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$, ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ de I dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\mathrm{Sol}(EH)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$.
2. Soit t_0 un réel de l'intervalle I. On considère l'application φ_{t_0}, de $\mathrm{Sol}(EH)$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :
$$\forall y \in \mathrm{Sol}(EH), \quad \varphi_{t_0}(y) = \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}.$$
   Démontrer que φ_{t_0} est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
3. En déduire que $\mathrm{Sol}(EH)$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ de dimension 2.
4. *Expression des solutions de E.*
   Soit (y_1, y_2) une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{Sol}(EH)$ et p une solution particulière de E. Démontrer que les solutions de l'équation E sont les fonctions y qui s'écrivent sous la forme $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + p$, où $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.