
Fiche Espaces euclidiens 2
GROUPES DES ISOMÉTRIES VECTORIELLES

Notions abordées

- Matrices orthogonales
 - Changement de base orthonormée.
 - Isométries vectorielles
 - Isométries de l'espace
 - Groupe orthogonal.
 - Orientation.
 - Isométries du plan
 - Endomorphismes symétriques
-

Pour toute la suite, E désignera un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de E , et $\| \cdot \|$ la norme associée. On fixe une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de E .

———— PARTIE I : Groupe orthogonal ————

1 - Rappeler la définition d'une matrice orthogonale :

Une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ est **orthogonale** si

- 2 - Montrer qu'une matrice orthogonale a pour déterminant 1 ou -1 .
- 3 - On note O_n l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$ et SO_n l'ensemble des matrices de O_n de déterminant 1. Montrer que O_n est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ et que SO_n est un sous-groupe de O_n . On les appelle respectivement **groupe orthogonal** et **groupe spécial orthogonal**.
- 4 - Soit u_1, \dots, u_p des vecteurs de E et $M \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice ayant pour colonne C_j , les coordonnées du vecteur u_j dans la base orthonormée (e_1, \dots, e_n) . Vérifier que pour tous entiers k et l dans $\{1, \dots, p\}$, on a

$$({}^tMM)_{kl} = \langle u_k, u_l \rangle.$$

- 5 - En déduire que si P est la matrice de passage de la base orthonormée (e_1, \dots, e_n) à une base (u_1, \dots, u_n) alors (u_1, \dots, u_n) est une base orthonormée si et seulement si $P \in O_n$.
- 6 - Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in O_n$ si et seulement les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormée de l'espace euclidien usuel \mathbb{R}^n .
- 7 - **Orientation.** On dit que deux bases orthonormées de E ont **même sens** si la matrice de passage de l'une vers l'autre appartient à SO_n .
- (a) Montrer qu'avoir même sens définit une relation d'équivalence sur les bases orthonormées de E .
 - (b) Montrer que cette relation d'équivalence a exactement deux classes.
 - (c) **Orienter** l'espace euclidien consiste à choisir une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) . On dit alors qu'une autre base orthonormée de E est directe si elle a même sens que la base choisie (e_1, \dots, e_n) . Donner des exemples de bases orthonormées directes et indirectes pour les espaces euclidiens usuels \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 (pour chacun de ces espaces, la base choisie est la base canonique).

- (d) Pour une base \mathcal{B} de E et des vecteurs x_1, \dots, x_n de E , on note $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ le déterminant de la matrice dont chaque colonne C_j correspond aux coordonnées du vecteur x_j dans la base \mathcal{B} . Vérifier que ce déterminant est le même pour toute base orthonormée directe, on le notera donc simplement $\det(x_1, \dots, x_n)$ (une fois qu'une orientation a été choisie).

PARTIE II : Isométries vectorielles.

Une **isométrie** de E est un endomorphisme de E qui préserve la norme, c'est-à-dire un endomorphisme u tel que pour tout $x \in E$, on a $\|u(x)\| = \|x\|$.

- 1 - Vérifier qu'une isométrie est bijective (remarque ce n'est pas en général le cas en dimension infinie).
- 2 - On note $O(E)$ l'ensemble des isométries de E . Montrer que $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$ (groupe des endomorphismes bijectifs).
- 3 - Montrer qu'un endomorphisme u de E est une isométrie si et seulement si il préserve le produit scalaire, c'est-à-dire pour tous x et y de E , on a $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.
- 4 - Quelles sont les homothéties vectorielles qui sont des isométries ?
- 5 - Est-ce que les projections orthogonales sont des isométries ? Est-ce que les symétries orthogonales sont des isométries ?
- 6 - Soit u un endomorphisme de E . Montrer que u est une isométrie si, et seulement si, l'image par u d'une (de toute) base orthonormée est également orthonormée si, et seulement si, la matrice de u dans une (toute) base orthonormée est orthogonale.
- 7 - En déduire les déterminants possibles pour une isométrie. On notera pour la suite $SO(E)$ le sous-groupe des isométries de déterminant 1.
- 8 - Soit u une isométrie de E .
 - (a) Montrer que les valeurs propres de u sont dans $\{-1, 1\}$. Montrer de plus, que si u a deux sous-espaces propres, ils sont orthogonaux.
 - (b) Montrer que l'orthogonal d'un espace propre de u est également stable par u .
 - (c) Montrer que u est diagonalisable si, et seulement, u est une symétrie orthogonale.
 - (d) Montrer que $\ker(u - id_E)$ et $\text{Im}(u - id_E)$ sont des supplémentaires orthogonaux.
- 9 - **Isométries du plan.** On suppose pour cette question que E est de dimension 2 avec le choix d'une orientation donnée par la base orthonormée (e_1, e_2) .
 - a) Montrer qu'un endomorphisme u de E est une isométrie si, et seulement si, la matrice de u dans la base (e_1, e_2) est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \quad \text{avec } a, b \text{ réels tels que } a^2 + b^2 = 1.$$

- b) Montrer que le groupe SO_2 est commutatif. (Indication : on pourra décomposer une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ sous la forme $aI_2 + bU$ où $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.)

- c) En déduire que si $u \in SO(E)$, alors la matrice de u dans toute base orthonormée directe est la même. Montrer qu'il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ telle cette matrice vaut

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Ainsi, u se nomme **rotation** d'angle θ . Que se passe-t-il si l'on change l'orientation de E ?

- d) Que vaut la composition de deux rotations ?
 e) Montrer qu'une isométrie u de E de déterminant -1 est diagonalisable. En déduire que u est une symétrie orthogonale.
 f) Montrer que toute rotation est égale au produit de deux symétries orthogonales.

10 - Isométries de l'espace. On suppose pour cette question que E est de dimension 3 avec le choix d'une orientation donnée par la base orthonormée (e_1, e_2, e_3) .

- a) Soit $u \in O(E)$. Montrer que u a au moins une valeur propre (qui vaut donc 1 ou -1).
 b) Soit $u \in SO(E)$ différent de l'identité.
 i. Montrer que 1 est valeur propre de u et l'espace propre associé est une droite D .
 ii. Soit P le plan orthogonal à la droite D . Montrer que $u|_P$ une rotation du plan P .
 iii. Fixons un vecteur unitaire e_D de D . Montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0, 2\pi[$, tel que dans toute base orthonormée directe de la forme (e_D, f_1, f_2) , la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

On dit que u est une rotation d'axe D et θ est la mesure de u relative au choix de la direction e_D .

- c) Soit $u \in O(E)$ de déterminant -1 .
 i. Montrer que si 1 est valeur propre de u alors u est une symétrie orthogonale par rapport un plan P . Une telle symétrie est appelée **réflexion** par rapport au plan P . En déduire qu'il existe une base orthonormée (directe) telle que la matrice de u dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- ii. On suppose que 1 n'est pas valeur propre de u . Montrer que u est la composée d'une rotation d'axe D et d'une réflexion par rapport au plan $P = D^\perp$. Si on fixe un vecteur unitaire e_D de D , montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0, 2\pi[$, tel que dans toute base orthonormée directe de la forme (e_D, f_1, f_2) , la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

1. Le début du problème a été traité dans la fiche 1 algèbre linéaire.

Partie C : isométries du réseau

Soit G l'ensemble des isométries affines f de \mathbb{R}^2 telles que $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ et soit G_0 l'ensemble des éléments f de G tels que $f(O) = O$.

I. Montrer que G , muni de la loi de composition des applications, est un groupe et que G_0 est un sous-groupe de G .

II. Soit $f \in G_0$. On remarque qu'alors f est une application linéaire et que les résultats de la partie **B.** s'appliquent. Soit A la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^2 .

1. Déterminer tous les points X de \mathcal{R} situés à la distance 1 de O .

2. Montrer que $f(e_1)$ et $f(e_2)$ appartiennent à l'ensemble

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Montrer que A appartient à l'ensemble

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

III. Soient s_1 et s_2 les applications linéaires de matrices respectives dans la base \mathcal{C}

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Décrire la nature géométrique de s_1 et s_2 .

2. Décrire la nature géométrique de $s_1 \circ s_2$ et de $s_2 \circ s_1$ et donner leurs matrices dans la base canonique.

3. Montrer que s_1 et s_2 sont des éléments de G_0 .

4. En déduire que, si la matrice dans la base canonique d'une application linéaire f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 est dans H , alors f est un élément de G_0 .

IV. Donner tous les éléments de G_0 .

V. Soit t la translation de vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Montrer que $t \in G$ si, et seulement si, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{R}$.

VI. Soit $f \in G$ et soit t' la translation de vecteur $-f(O)$. Montrer que t' est un élément de G et que $g = t' \circ f$ est un élément de G_0 .

VII. Montrer que tout élément f de G s'écrit de façon unique $f = t \circ g$, avec t une translation de vecteur dans \mathcal{R} et g un élément de G_0 .

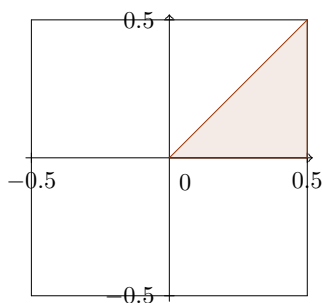
Partie D : un pavage du plan

On note T la surface délimitée par le triangle de \mathbb{R}^2 de sommets

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et on note C la surface délimitée par le carré de sommets

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$



I. 1. Justifier que

$$C = \bigcup_{g \in G_0} g(T).$$

2. Montrer que, si g_1 et g_2 sont deux éléments distincts de G_0 , alors l'intersection des triangles $g_1(T)$ et $g_2(T)$ est, soit un segment, soit un point.

II. Pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, on note t_X la translation de vecteur X .

1. Justifier que

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{X \in \mathcal{R}} t_X(C).$$

2. Montrer que si X et Y sont deux éléments distincts de \mathcal{R} , alors l'intersection des carrés $t_X(C)$ et $t_Y(C)$ est, soit un segment, soit un point, soit l'ensemble vide.

III. 1. Justifier que

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{f \in G} f(T).$$

2. Montrer que si f_1 et f_2 sont deux éléments distincts de G , alors l'intersection des triangles $f_1(T)$ et $f_2(T)$ est, soit un segment, soit un point, soit l'ensemble vide.

Partie E : un sous-groupe et deux frises

I. Soit k un entier relatif. On considère les applications

$$t_k : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} x+k \\ y \end{pmatrix} \end{cases} \quad s_k : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} -x+k \\ -y \end{pmatrix} \end{cases}$$

1. Quelle est la nature géométrique de t_k et s_k ?
2. Soit k et l deux entiers relatifs. Décrire $t_k \circ s_l$, $s_k \circ t_l$, $s_k \circ s_l$ et $t_k \circ t_l$.

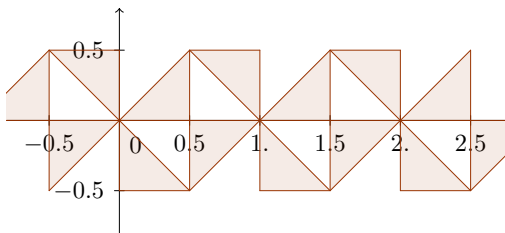
II. Soit $H = \{t_k, s_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que H est un sous-groupe de G .

III. On considère l'ensemble

$$F = \bigcup_{f \in H} f(T),$$

où T est le triangle défini dans la section D. Décrire l'ensemble F .

IV. On considère la frise suivante :



Montrer que le groupe des isométries qui conservent cette frise est un sous-groupe de G qu'on décrira.

— PARTIE IV : endomorphismes symétriques —

Un endomorphisme u de E est **symétrique** si pour tous x et y de E , on a $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$.

- 1 - Montrer qu'un endomorphisme u de E est symétrique si, et seulement si, sa matrice dans une (toute) base orthonormée est symétrique.
- 2 - Montrer que toute projection orthogonale est symétrique.
- 3 - Montrer que toute symétrie orthogonale est symétrique.
- 4 - Soit u un endomorphisme symétrique. Montrer que $\ker u \subset (\operatorname{Im} u)^\perp$. En déduire que $\ker u = (\operatorname{Im} u)^\perp$.
- 5 - Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. On considère $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A éventuellement complexe et $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé à cette valeur propre. On note \bar{X} le vecteur conjugué de X .
 - (a) Montrer que ${}^t X A \bar{X} = \bar{\lambda} {}^t X \bar{X}$.
 - (b) Montrer que ${}^t X A \bar{X} = \lambda {}^t X \bar{X}$.
 - (c) En déduire que $\lambda \in \mathbb{R}$ et que le polynôme caractéristique de A est scindé sur \mathbb{R} .
- 6 - Montrer que si un sous-espace vectoriel F de E est stable par un endomorphisme symétrique u , alors F^\perp l'est aussi.

- 7 - Montrer par récurrence sur la dimension de E que tout endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée de E .
- 8 - En déduire que toute matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans une base orthonormée de l'espace euclidien usuel \mathbb{R}^n .

PARTIE V : extraits second sujet capes 2011

n désigne un entier naturel non nul.

Ce problème a pour objet de démontrer que tout compact de \mathbb{R}^n d'intérieur non vide est inclus dans un unique ellipsoïde de volume minimal.

La partie I est indépendante du reste du problème.

Notations et définitions

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: ensemble des matrices à n lignes et à p colonnes, à coefficients dans \mathbb{R} , et on identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à \mathbb{R}^n .
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes, à coefficients dans \mathbb{R} .
- $GL_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Si n et p sont deux entiers naturels non nuls, $0_{n,p}$ désigne la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls.
- Pour $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $k \in \{1, \dots, n\}$, on note M_k la matrice $(m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k}} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques, c'est-à-dire telles que ${}^t M = M$.
- On rappelle qu'une matrice M de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive lorsque pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t X M X \geq 0$. On notera $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.
- On rappelle qu'une matrice M de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive lorsque pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$, ${}^t X M X > 0$. On notera $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.
- On dit qu'une partie \mathcal{E} de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (ou de \mathbb{R}^n) est un **ellipsoïde**, s'il existe $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathcal{E} = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / {}^t X A X \leq 1\}$$

Pour $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, l'ellipsoïde $\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / {}^t X A X \leq 1\}$ sera noté \mathcal{E}_A .

Partie II : étude de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

1. Montrer que si $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, alors $D \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
 - (a) Montrer que, si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors les valeurs propres de A sont strictement positives.
 - (b) Énoncer le théorème permettant d'affirmer qu'il existe des matrices D diagonale et P orthogonale telles que $A = {}^t P D P$.
 - (c) Montrer que, si les valeurs propres de A sont strictement positives, alors $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^t Q Q$.
4. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\det(A) > 0$. La réciproque est-elle vraie ?
5. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\det(A_k) > 0$.
6. Soit $A \in \mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} {}^t Q & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & C \\ {}^t C & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0_{n,1} \\ O_{1,n} & 1 \end{pmatrix}$$

7. Etant donné un entier naturel m non nul, $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ désignent $m + 1$ nombres réels. On considère la matrice M de $\mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_m \\ \alpha_1 & \cdots & \cdots & \alpha_m & \alpha \end{pmatrix}$$

- (a) Démontrer par récurrence sur m que $\det(M) = \alpha - \sum_{i=1}^m \alpha_i^2$.
- (b) Pour $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, expliciter tXMX en fonction des composantes de X et en déduire que si $\det(M) > 0$ alors $M \in \mathcal{S}_{m+1}^{++}(\mathbb{R})$.
8. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ $\det(A_k) > 0$, alors $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
On pourra raisonner par récurrence sur n et utiliser les questions 6. et 7.
9. Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme.

Partie III : inclusion d'un compact dans un ellipsoïde

III.1 Réduction simultanée

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que l'application Φ_A qui à $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ associe $\Phi_A(X, Y) = {}^tXAY$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Montrer que si les colonnes d'une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour Φ_A , alors ${}^tPAP = I_n$.
- Montrer que l'application f de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans lui-même qui, à $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associe $f(X) = A^{-1}BX$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, symétrique pour Φ_A .
Quelle est la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$?
- En déduire qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale telles que $A = {}^tQQ$ et $B = {}^tQDQ$.
Que représentent les coefficients diagonaux de D ?
- On suppose que $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
 - Montrer que si $\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}_B$ les valeurs propres de $A^{-1}B$ sont inférieures ou égales à 1.
 - En déduire que si $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_B$ alors $A = B$.

III.2 Convexité

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Si u_1 et u_2 sont deux éléments de E , le segment $[u_1; u_2]$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $tu_1 + (1-t)u_2$ lorsque t décrit $[0; 1]$.

On rappelle qu'une partie \mathcal{C} de E est convexe lorsque, pour tout $(u_1, u_2) \in \mathcal{C}^2, [u_1; u_2] \subset \mathcal{C}$.

Étant donnée une partie \mathcal{C} de E convexe, une application $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite strictement convexe lorsque pour tout $(u_1, u_2) \in \mathcal{C}^2$ tel que $u_1 \neq u_2$ et pour tout $t \in]0; 1[$, $\varphi(tu_1 + (1-t)u_2) < t\varphi(u_1) + (1-t)\varphi(u_2)$.

- Montrer que l'intersection de deux parties convexes est convexe.
- On suppose de plus E normé. On considère une partie \mathcal{C} non vide, convexe et compacte de E et $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ une application strictement convexe et continue sur \mathcal{C} .
 - Montrer que φ admet un minimum, atteint en un unique point.
 - Montrer que φ admet un maximum. Sans justification, donner un exemple pour lequel ce maximum est atteint en une infinité de points.