Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre printemps 2020 - 2021
Préparation aux épreuves écrites du CAPES

Fiche Espaces euclidiens 2
GROUPES DES ISOMÉTRIES VECTORIELLES

Notions abordées

- *Matrices orthogonales*
- *Changement de base orthonormée.*
- *Isométries vectorielles*
- *Isométries de l'espace*
- *Groupe orthogonal.*
- *Orientation.*
- *Isométries du plan*
- *Endomorphismes symétriques*

Pour toute la suite, E désignera un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de E, et $\| \cdot \|$ la norme associée. On fixe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E.

PARTIE I : Groupe orthogonal

1 - Rappeler la définition d'une matrice orthognale :

> Une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ est **orthogonale** si

2 - Montrer qu'une matrice orthogonale a pour déterminant 1 ou -1.

3 - On note O_n l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$ et SO_n l'ensemble des matrices de O_n de déterminant 1. Montrer que O_n est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ et que SO_n est un sous-groupe de O_n. On les appelle respectivement **groupe orthogonal** et **groupe spécial orthogonal**.

4 - Soit $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de E et $M \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice ayant pour colonne C_j, les coordonnées du vecteur u_j dans la base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$. Vérifier que pour tous entiers k et l dans $\{1, \ldots p\}$, on a

$$({}^t MM)_{kl} = \langle u_k, u_l \rangle.$$

5 - En déduire que si P est la matrice de passage de la base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ à une base $(u_1, \ldots, u_n)$ alors $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base orthonormée si et seulement si $P \in O_n$.

6 - Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in O_n$ si et seulement les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormée de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^n$.

7 - Orientation. On dit que deux bases orthonormées de E ont **même sens** si la matrice de passage de l'une vers l'autre appartient à SO_n.

- **(a)** Montrer qu'avoir même sens définit une relation d'équivalence sur les bases orthonormées de E.
- **(b)** Montrer que cette relation d'équivalence a exactement deux classes.
- **(c)** **Orienter** l'espace euclidien consiste à choisir une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$. On dit alors qu'une autre base orthonormée de E est directe si elle a même sens que la base choisie $(e_1, \ldots, e_n)$. Donner des exemples de bases orthonormées directes et indirectes pour les espaces euclidiens usuels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (pour chacun de ces espaces, la base choisie est la base canonique).

(d) Pour une base $\mathcal{B}$ de E et des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ de E, on note $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ le déterminant de la matrice dont chaque colonne C_j correspond aux coordonnées du vecteur x_j dans la base $\mathcal{B}$. Vérifier que ce déterminant est le même pour toute base orthonormée directe, on le notera donc simplement $\det(x_1, \dots, x_n)$ (une fois qu'une orientation a été choisie).

PARTIE II : Isométries vectorielles.

Une **isométrie** de E est un endomorphisme de E qui préserve la norme, c'est-à-dire un endomorphisme u tel que pour tout $x \in E$, on a $\|u(x)\| = \|x\|$.

1 - Vérifier qu'une isométrie est bijective (remarque ce n'est pas en général le cas en dimension infinie).

2 - On note $O(E)$ l'ensemble des isométries de E. Montrer que $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$ (groupe des endomorphismes bijectifs).

3 - Montrer qu'un endomorphisme u de E est une isométrie si et seulement il préserve le produit scalaire, c'est-à-dire pour tous x et y de E, on a $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

4 - Quelles sont les homothéties vectorielles qui sont des isométries ?

5 - Est-ce que les projections orthogonales sont des isométries ?

Est-ce que les symétries orthogonales sont des isométries ?

6 - Soit u un endomorphisme de E. Montrer que u est une isométrie si, et seulement si, l'image par u d'une (de toute) base orthonormée est également orthonormée si, et seulement si, la matrice de u dans une (toute) base orthonormée est orthogonale.

7 - En déduire les déterminants possibles pour une isométrie.

On notera pour la suite $SO(E)$ le sous-groupe des isométries de déterminant 1.

8 - Soit u une isométrie de E.

(a) Montrer que les valeurs propres de u sont dans $\{-1, 1\}$. Montrer de plus, que si u a deux sous-espaces propres, ils sont orthogonaux.

(b) Montrer que l'orthogonal d'un espace propre de u est également stable par u.

(c) Montrer que u est diagonalisable si, et seulement, u est une symétrie orthogonale.

(d) Montrer que $\ker(u - id_E)$ et $\mathrm{Im}(u - id_E)$ sont des supplémentaires orthogonaux.

9 - Isométries du plan. On suppose pour cette question que E est de dimension 2 avec le choix d'une orientation donnée par la base orthonormée (e_1, e_2).

a) Montrer qu'un endomorphisme u de E est une isométrie si, et seulement si, la matrice de u dans la base (e_1, e_2) est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \quad \text{avec } a, b \text{ réels tels que } a^2 + b^2 = 1.$$

b) Montrer que le groupe SO_2 est commutatif. (Indication : on pourra décomposer une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ sous la forme $aI_2 + bU$ où $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.)

c) En déduire que si $u \in SO(E)$, alors la matrice de u dans toute base orthonormée directe est la même.
Montrer qu'il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ telle que cette matrice vaut

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Ainsi, u se nomme **rotation** d'angle θ. Que se passe-t-il si l'on change l'orientation de E ?

d) Que vaut la composition de deux rotations ?

e) Montrer qu'une isométrie u de E de déterminant -1 est diagonalisable.
En déduire que u est une symétrie orthogonale (ou réflexion).

f) Montrer que toute rotation est égale au produit de deux symétries orthogonales.

10 - Isométries de l'espace. On suppose pour cette question que E est de dimension 3 avec le choix d'une orientation donnée par la base orthonormée (e_1, e_2, e_3).

a) Soit $u \in O(E)$. Montrer que u a au moins une valeur propre (qui vaut donc 1 ou -1).

b) Soit $u \in SO(E)$ différent de l'identité.

i. Montrer que 1 est valeur propre de u et l'espace propre associé est une droite D.

ii. Soit P le plan orthogonal à la droite D. Montrer que $u_{|P}$ est une rotation du plan P.

iii. Fixons un vecteur unitaire e_D de D. Montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0, 2\pi[$, tel que dans toute base orthonormée directe de la forme (e_D, f_1, f_2), la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

On dit que u est une rotation d'axe D et θ est la mesure de u relative au choix de la direction e_D.

c) Soit $u \in O(E)$ de déterminant -1.

i. Montrer que si 1 est valeur propre de u alors u est une symétrie orthogonale par rapport à un plan P.
Une telle symétrie est appelée **réflexion** par rapport au plan P. En déduire qu'il existe une base orthonormée (directe) telle que la matrice de u dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

ii. On suppose que 1 n'est pas valeur propre de u. Montrer que u est la composée d'une rotation d'axe D et d'une réflexion par rapport au plan $P = D^\perp$.
Si on fixe un vecteur unitaire e_D de D, montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0, 2\pi[$, tel que dans toute base orthonormée directe de la forme (e_D, f_1, f_2), la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

PARTIE III : Extrait sujet 1 Capes Externe 2017 -suite [1]

1. Le début du problème a été traité dans la fiche 1 algèbre linéaire.

Partie C : isométries du réseau

Soit G l'ensemble des isométries affines f de $\mathbb{R}^2$ telles que $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ et soit G_0 l'ensemble des éléments f de G tels que $f(O) = O$.

I. Montrer que G, muni de la loi de composition des applications, est un groupe et que G_0 est un sous-groupe de G.

II. Soit $f \in G_0$. On remarque qu'alors f est une application linéaire et que les résultats de la partie **B.** s'appliquent. Soit A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer tous les points X de $\mathcal{R}$ situés à la distance 1 de O.

2. Montrer que $f(e_1)$ et $f(e_2)$ appartiennent à l'ensemble

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Montrer que A appartient à l'ensemble

$$H = \left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\}.$$

III. Soient s_1 et s_2 les applications linéaires de matrices respectives dans la base $\mathcal{C}$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Décrire la nature géométrique de s_1 et s_2.

2. Décrire la nature géométrique de $s_1 \circ s_2$ et de $s_2 \circ s_1$ et donner leurs matrices dans la base canonique.

3. Montrer que s_1 et s_2 sont des éléments de G_0.

4. En déduire que, si la matrice dans la base canonique d'une application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est dans H, alors f est un élément de G_0.

IV. Donner tous les éléments de G_0.

V. Soit t la translation de vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Montrer que $t \in G$ si, et seulement si, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{R}$.

VI. Soit $f \in G$ et soit t' la translation de vecteur $-f(O)$. Montrer que t' est un élément de G et que $g = t' \circ f$ est un élément de G_0.

VII. Montrer que tout élément f de G s'écrit de façon unique $f = t \circ g$, avec t une translation de vecteur dans $\mathcal{R}$ et g un élément de G_0.

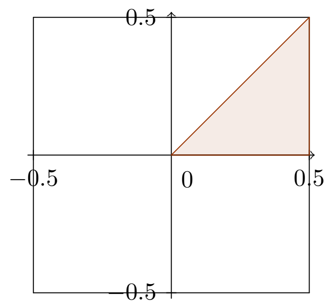
Partie D : un pavage du plan

On note T la surface délimitée par le triangle de $\mathbb{R}^2$ de sommets

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

et on note C la surface délimitée par le carré de sommets

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$



I. 1. Justifier que

$$C = \bigcup_{g \in G_0} g(T).$$

2. Montrer que, si g_1 et g_2 sont deux éléments distincts de G_0, alors l'intersection des triangles $g_1(T)$ et $g_2(T)$ est, soit un segment, soit un point.

II. Pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, on note t_X la translation de vecteur X.

1. Justifier que

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{X \in \mathcal{R}} t_X(C).$$

2. Montrer que si X et Y sont deux éléments distincts de $\mathcal{R}$, alors l'intersection des carrés $t_X(C)$ et $t_Y(C)$ est, soit un segment, soit un point, soit l'ensemble vide.

III. 1. Justifier que

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{f \in G} f(T).$$

2. Montrer que si f_1 et f_2 sont deux éléments distincts de G, alors l'intersection des triangles $f_1(T)$ et $f_2(T)$ est, soit un segment, soit un point, soit l'ensemble vide.

Partie E : un sous-groupe et deux frises

I. Soit k un entier relatif. On considère les applications

$$t_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+k \\ y \end{pmatrix} \end{array} \right. \qquad s_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -x+k \\ -y \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

1. Quelle est la nature géométrique de t_k et s_k ?

2. Soit k et l deux entiers relatifs. Décrire $t_k \circ s_l$, $s_k \circ t_l$, $s_k \circ s_l$ et $t_k \circ t_l$.

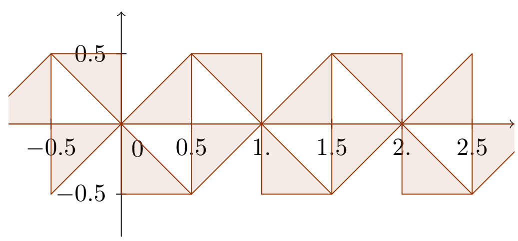
II. Soit $H = \{t_k, s_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que H est un sous-groupe de G.

III. On considère l'ensemble

$$F = \bigcup_{f \in H} f(T),$$

où T est le triangle défini dans la section **D**. Décrire l'ensemble F.

IV. On considère la frise suivante :



Montrer que le groupe des isométries qui conservent cette frise est un sous-groupe de G qu'on décrira.

PARTIE IV : endomorphismes symétriques

Un endomorphisme u de E est **symétrique** si pour tous x et y de E, on a $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$.

1 - Montrer qu'un endomorphisme u de E est symétrique si, et seulement si, sa matrice dans une (toute) base orthonormée est symétrique.

2 - Montrer que toute projection orthogonale est symétrique.

3 - Montrer que toute symétrie orthogonale est symétrique.

4 - Soit u un endomorphisme symétrique. Montrer que $\ker u \subset (\operatorname{Im} u)^\perp$. En déduire que $\ker u = (\operatorname{Im} u)^\perp$.)

5 - Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. On considère $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A éventuellement complexe et $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé à cette valeur propre. On note $\overline{X}$ le vecteur conjugué de X.

(a) Montrer que ${}^tXA\overline{X} = \bar{\lambda}\,{}^tX\overline{X}$.

(b) Montrer que ${}^tXA\overline{X} = \lambda\,{}^tX\overline{X}$.

(c) En déduire que $\lambda \in \mathbb{R}$ et que le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$.

6 - Montrer que si un sous-espace vectoriel F de E est stable par un endomorphisme symétrique u, alors $F^\perp$ l'est aussi.

7 - Montrer par récurrence sur la dimension de E que tout endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée de E.

8 - En déduire que toute matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans une base orthonormée de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^n$.

PARTIE V : extraits second sujet capes 2011

n désigne un entier naturel non nul.

Ce problème a pour objet de démontrer que tout compact de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide est inclus dans un unique ellipsoïde de volume minimal.

La partie I est indépendante du reste du problème.

Notations et définitions

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: ensemble des matrices à n lignes et à p colonnes, à coefficients dans $\mathbb{R}$, et on identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes, à coefficients dans $\mathbb{R}$.
- $GL_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Si n et p sont deux entiers naturels non nuls, $0_{n,p}$ désigne la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls.
- Pour $M = (m_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $k \in \{1, \cdots, n\}$, on note M_k la matrice $(m_{ij})_{\substack{1\leq i\leq k\\1\leq j\leq k}} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques, c'est-à-dire telles que ${}^tM = M$.
- On rappelle qu'une matrice M de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive lorsque pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXMX \geq 0$. On notera $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.
- On rappelle qu'une matrice M de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive lorsque pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$, ${}^tXMX > 0$. On notera $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.
- On dit qu'une partie $\mathcal{E}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (ou de $\mathbb{R}^n$) est un **ellipsoïde**, s'il existe $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathcal{E} = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ {}^tXAX \leq 1\}$$

  Pour $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, l'ellipsoïde $\{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ {}^tXAX \leq 1\}$ sera noté $\mathcal{E}_A$.

Partie II : étude de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

1. Montrer que si $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, alors $D \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que, si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors les valeurs propres de A sont strictement positives.
   (b) Enoncer le théorème permettant d'affirmer qu'il existe des matrices D diagonale et P orthogonale telles que $A = {}^tPDP$.
   (c) Montrer que, si les valeurs propres de A sont strictement positives, alors $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tQQ$.
4. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\det(A) > 0$. La réciproque est-elle vraie ?
5. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, $\det(A_k) > 0$.
6. Soit $A \in \mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} {}^tQ & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & C \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0_{n,1} \\ O_{1,n} & 1 \end{pmatrix}$$

7. Etant donné un entier naturel m non nul, $\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_m$ désignent $m+1$ nombres réels. On considère la matrice M de $\mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_m \\ \alpha_1 & \cdots & \cdots & \alpha_m & \alpha \end{pmatrix}$$

   (a) Démontrer par récurrence sur m que $\det(M) = \alpha - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2$.

   (b) Pour $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, expliciter ${}^tXMX$ en fonction des composantes de X et en déduire que si $\det(M) > 0$ alors $M \in \mathcal{S}_{m+1}^{++}(\mathbb{R})$.

8. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$ $\det(A_k) > 0$, alors $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   On pourra raisonner par récurrence sur n et utiliser les questions 6. et 7.

9. Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme.

Partie III : inclusion d'un compact dans un ellipsoïde

III.1 Réduction simultanée

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application Φ_A qui à $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ associe $\Phi_A(X, Y) = {}^tXAY$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

2. Montrer que si les colonnes d'une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour Φ_A, alors ${}^tPAP = I_n$.

3. Montrer que l'application f de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans lui-même qui, à $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associe $f(X) = A^{-1}BX$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, symétrique pour Φ_A.
   Quelle est la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$?

4. En déduire qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale telles que $A = {}^tQQ$ et $B = {}^tQDQ$.
   Que représentent les coefficients diagonaux de D ?

5. On suppose que $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que si $\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}_B$ les valeurs propres de $A^{-1}B$ sont inférieures ou égales à 1.
   (b) En déduire que si $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_B$ alors $A = B$.

III.2 Convexité

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Si u_1 et u_2 sont deux éléments de E, le segment $[u_1; u_2]$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $tu_1 + (1-t)u_2$ lorsque t décrit $[0; 1]$.
On rappelle qu'une partie $\mathcal{C}$ de E est convexe lorsque, pour tout $(u_1, u_2) \in \mathcal{C}^2$,$[u_1; u_2] \subset \mathcal{C}$.
Étant donnée une partie $\mathcal{C}$ de E convexe, une application $\varphi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ est dite strictement convexe lorsque pour tout $(u_1, u_2) \in \mathcal{C}^2$ tel que $u_1 \neq u_2$ et pour tout $t \in]0; 1[$, $\varphi(tu_1 + (1-t)u_2) < t\varphi(u_1) + (1-t)\varphi(u_2)$.

1. Montrer que l'intersection de deux parties convexes est convexe.

2. On suppose de plus E normé. On considère une partie $\mathcal{C}$ non vide, convexe et compacte de E et $\varphi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ une application strictement convexe et continue sur $\mathcal{C}$.
   (a) Montrer que φ admet un minimum, atteint en un unique point.
   (b) Montrer que φ admet un maximum. Sans justification, donner un exemple pour lequel ce maximum est atteint en une infinité de points.