Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre printemps 2019 - 2020
Préparation aux épreuves écrites du CAPES

Fiche Espaces euclidiens 2
GROUPES DES ISOMÉTRIES VECTORIELLES

Notions abordées

- *Matrices orthogonales*
- *Changement de base orthonormée.*
- *Isométries vectorielles*
- *Isométries de l'espace*
- *Groupe orthogonal.*
- *Orientation.*
- *Isométries du plan*
- *Endomorphismes symétriques*

Pour toute la suite, E désignera un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de E, et $\| \cdot \|$ la norme associée. On fixe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E.

PARTIE I : Groupe orthogonal

1 - Rappeler la définition d'une matrice orthognale :

> Une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ est **orthogonale** si *$A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = {}^tA$ (ou de manière équivalent si ${}^tA \cdot A = I_n$).*

2 - Montrer qu'une matrice orthogonale a pour déterminant 1 ou -1.

Soit A une matrice orthogonale. Alors ${}^tA \cdot A = I_n$ et comme $\det({}^tA \cdot A) = \det({}^tA)\det(A) = \det(A)^2$, on a $\det(A)^2 = 1$ et donc $\det(A) = \pm 1$.

3 - On note O_n l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$ et SO_n l'ensemble des matrices de O_n de déterminant 1. Montrer que O_n est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ et que SO_n est un sous-groupe de O_n. On les appelle respectivement **groupe orthogonal** et **groupe spécial orthogonal**.

Vérifions que O_n est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$:

- *Toute matrice orthogonale est inversible donc O_n est une partie de $GL_n(\mathbb{R})$.*
- *On a ${}^tI_n \cdot I_n = I_n$ donc $I_n \in O_n$.*
- *Soit A et B deux matrices orthogonales. Alors, ${}^t(AB) \cdot AB = {}^tB\,{}^tAAB = {}^tBB = I_n$, donc AB est également orthogonale.*
- *Soit A une matrice orthogonale. Alors $A^{-1} = {}^tA$ d'où ${}^tA^{-1} = A = (A^{-1})^{-1}$ et donc A^{-1} est orthogonale.*

Ainsi, O_n est une partie non vide de $GL_n(\mathbb{R})$, stable par produit et passage par inverse, c'est donc un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.
L'application $\varphi : O_n \to \{-1, 1\}$ définie par $\varphi(A) = \det(A)$ est un morphisme de groupe. Comme $SO_n = \ker \varphi$, on en déduit que SO_n est un sous-groupe (normal) de O_n.

4 - Soit $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de E et $M \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice ayant pour colonne C_j, les coordonnées du vecteur u_j dans la base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$. Vérifier que pour tous entiers k et l dans $\{1, \ldots p\}$, on a

$$({}^tMM)_{kl} = \langle u_k, u_l \rangle.$$

Soit k et l dans $\{1, \ldots p\}$. Comme C_k et C_l sont les matrices coordonnées des vecteurs u_k et u_l dans une base orthonormée, on a $\langle u_k, u_l \rangle = {}^tC_kC_l$ qui vaut exactement $({}^tMM)_{kl}$.

5 - En déduire que si P est la matrice de passage de la base orthonormée $(e_1,\ldots,e_n)$ à une base $(u_1,\ldots,u_n)$ alors $(u_1,\ldots,u_n)$ est une base orthonormée si et seulement si $P\in O_n$.

Pour tous entiers k et l posons $\delta_{kl}=\begin{cases}0 \text{ si } k\neq l\\ 1 \text{ si } k=l\end{cases}$. La base $(u_1,\ldots,u_n)$ est orthonormée si et seulement pour tous entiers k et l dans $\{1,\ldots n\}$, on a $\langle u_k,u_l\rangle=\delta_{kl}$, ce qui d'après la question précédente est équivalent à pour tous entiers k et l dans $\{1,\ldots p\}$, $({}^tPP)_{kl}=\delta_{kl}$, ou encore à P est orthogonale.

6 - Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A\in O_n$ si et seulement les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormée de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^n$.

Si on note $C_1,\ldots,C_n$ les vecteurs colonnes de A, alors $(C_1,\ldots,C_n)$ forme une base orthonormée si et seulement si pour tous entiers k et l dans $\{1,\ldots n\}$, on a ${}^tC_kC_l(=\langle C_k,C_l\rangle)=\delta_{kl}$ ce qui est une nouvelle fois équivalent à $A\in O_n$.

7 - Orientation. On dit que deux bases orthonormées de E ont **même sens** si la matrice de passage de l'une vers l'autre appartient à SO_n.

(a) Montrer qu'avoir même sens définit une relation d'équivalence sur les bases orthonormées de E.

Cela vient du fait que SO_n est un sous-groupe de O_n. En effet :

Réflexivité *Si $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base orthonormée, alors la matrice de passage de $(e_1,\ldots,e_n)$ vers elle-même est l'identité qui appartient à SO_n (car SO_n est un sous-groupe) et donc $(e_1,\ldots,e_n)$ a même sens qu'elle même.*

Symétrie *Si $P\in SO_n$ est la matrice de passage d'une base orthonormée $(e_1,\ldots,e_n)$ vers une base orthonormée $(e'_1,\ldots,e'_n)$, alors la matrice de passage de $(e'_1,\ldots,e'_n)$ vers $(e_1,\ldots,e_n)$, est égale à P^{-1} qui est également dans SO_n car SO_n est un sous-groupe.*

Transitivité *Considérons $(e_1,\ldots,e_n)$, $(e'_1,\ldots,e'_n)$ et $(e"_1,\ldots,e"_n)$ trois bases orthonormés telles que $(e_1,\ldots,e_n)$ et $(e'_1,\ldots,e'_n)$ ont même sens, avec pour matrice de passage $P\in SO_n$, et telles que $(e'_1,\ldots,e'_n)$ et $(e"_1,\ldots,e"_n)$ ont même sens, avec pour matrice de passage $Q\in SO_n$. Alors, PQ est la matrice de passage de $(e_1,\ldots,e_n)$ vers $(e"_1,\ldots,e"_n)$, et cette matrice est dans SO_n car SO_n est un sous-groupe. Ainsi, $(e_1,\ldots,e_n)$ et $(e"_1,\ldots,e"_n)$ ont même sens.*

(b) Montrer que cette relation d'équivalence a exactement deux classes.

Fixons une base orthonormée $(e_1,\ldots,e_n)$ de E. On remarque que $(-e_1,e_2,\ldots,e_n)$ est également une base orthonormée. Notons J_n la matrice de passage de $(e_1,\ldots,e_n)$ vers $(-e_1,e_2,\ldots,e_n)$. Alors J_n est la matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$ qui a pour premier coefficient diagonal -1 et dont les autres coefficients diagonaux valent 1. De plus $\det(J_n)=-1$ et donc $J_n\in O_n\setminus SO_n$. Ainsi, les deux bases $(e_1,\ldots,e_n)$ et $(-e_1,e_2,\ldots,e_n)$ n'ont pas même sens. Soit $(f_1,\ldots,f_n)$ une autre base orthonormée. Notons P la matrice de passage de $(f_1,\ldots,f_n)$ vers $(e_1,\ldots,e_n)$. Si $P\in SO_n$ alors $(f_1,\ldots,f_n)$ et $(e_1,\ldots,e_n)$ ont même sens. Sinon, $\det(P)=-1$ et donc $\det(PJ_n)=1$. Dans ce second cas, comme PJ_n est la matrice de passage de $(f_1,\ldots,f_n)$ à $(-e_1,e_2,\ldots,e_n)$, on en déduit que $(f_1,\ldots,f_n)$ et $(-e_1,e_2,\ldots,e_n)$ ont même sens. Ainsi, cette relation d'équivalence a exactement deux classes, la classe de $(e_1,\ldots,e_n)$ et celle de $(-e_1,e_2,\ldots,e_n)$.

(c) **Orienter** l'espace euclidien consiste à choisir une base orthonormée $(e_1,\ldots,e_n)$. On dit alors qu'une autre base orthonormée de E est directe si elle a même sens que la base choisie $(e_1,\ldots,e_n)$. Donner des exemples de bases orthonormées directes et indirectes pour les espaces euclidiens usuels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (pour chacun de ces espaces, la base choisie est la base canonique).

$\mathbb{R}^2$: Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ alors $(-\vec{j}, \vec{i})$ et $\left((\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)\right)$ sont deux exemples de bases orthonormées directes. Les bases orthonormées $(\vec{j}, \vec{i})$ et $\left((\sqrt{3}/2, 1/2), (1/2, -\sqrt{3}/2)\right)$ sont elles indirectes.

$\mathbb{R}^2$: Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors $(\vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$, $(\vec{-i}, \vec{k}, \vec{j})$ sont deux exemples de bases orthonormées directes, et $(\vec{k}, \vec{j}, \vec{i})$, $(\vec{-i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont deux exemples de bases orthonormées indirectes.

(d) Pour une base $\mathcal{B}$ de E et des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ de E, on note $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ le déterminant de la matrice dont chaque colonne C_j correspond aux coordonnées du vecteur x_j dans la base $\mathcal{B}$. Vérifier que ce déterminant est le même pour toute base orthonormée directe, on le notera donc simplement $\det(x_1, \ldots, x_n)$ (une fois qu'une orientation a été choisie).

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées directes alors la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers B' est dans SO_n. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de E et on note M (respectivement M') la matrice dont chaque colonne C_j (respectivement C'_J) correspond aux coordonnées du vecteur x_j dans la base $\mathcal{B}$ (respectivement dans la base $\mathcal{B}'$). Alors on a $M = PM'$ et donc $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \det(M) = \det(P)\det(M') = \det(M') = det'_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$, d'où le résultat demandé.

PARTIE II : Isométries vectorielles.

Une **isométrie** de E est un endomorphisme de E qui préserve la norme, c'est-à-dire un endomorphisme u tel que pour tout $x \in E$, on a $\|u(x)\| = \|x\|$.

1 - Vérifier qu'une isométrie est bijective (remarque ce n'est pas en général le cas en dimension infinie).

Soit u une isométrie de E. Si $x \in \ker u$ alors $\|x\| = \|u(x)\| = 0$ donc $x = 0_E$. Ainsi, u est un endomorphisme injectif (cette propriété est vraie en toute dimension). Comme de plus E est de dimension finie, u est alors bijectif (corollaire du théorème du rang en dimension finie).
Contre-exemple en dimension infinie : on considère $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme euclidienne définie par $\|P\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$ pour $P = \sum_{i=1}^n a_i X^i$. Alors l'endomorphisme v de $\mathbb{R}[X]$ défini par $v(P) = XP$ est une isométrie qui n'est pas surjective.

2 - On note $O(E)$ l'ensemble des isométries de E. Montrer que $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$ (groupe des endomorphismes bijectifs).

Vérifions que $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$:

- *Toute isométrie est un endomorphisme bijectif donc $O(E)$ est une partie de $GL(E)$.*
- *L'application identité sur E est de manière évidente une isométrie.*
- *Soit u et v deux isométries de E. Pour $x \in E$, on a*

$$\|u \circ v(x)\| = \|u(v(x))\| = \|v(x)\| = \|x\|.$$

  Ainsi, $u \circ v$ est également une isométrie.
- *Soit u une isométrie de E. Pour $x \in E$, on a*

$$\|u^{-1}(x)\| = \|u(u^{-1}(x))\| = \|x\|.$$

  Ainsi, u^{-1} est également une isométrie.

On a vérifié que $O(E)$ est une partie non vide de $GL(E)$, stable par composition et passage par inverse, c'est donc un sous-groupe de $GL(E)$.

3 - Montrer qu'un endomorphisme u de E est une isométrie si et seulement il préserve le produit scalaire, c'est-à-dire pour tous x et y de E, on a $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

C'est une condition nécessaire via l'identité de polarisation : en effet, si u est une isométrie, on a

$$\langle u(x), u(y)\rangle = \frac{1}{4}(\|u(x)+u(y)\| - \|u(x)-u(y)\|) = \frac{1}{4}(\|u(x+y)\| - \|u(x-y)\|) = \frac{1}{4}(\|x+y\| - \|x-y\|) = \langle x, y\rangle.$$

C'est une condition suffisante car si u préserve le produit scalaire alors, pour tout $x \in E$, on a

$$\|u(x)\| = \sqrt{\langle u(x), u(x)\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|.$$

4 - Quelles sont les homothéties vectorielles qui sont des isométries ?

L'identité id_E et la symétrie centrale $-\mathrm{id}_E$ sont de manière évidente des isométries.
Soit h une homothétie vectorielle. Alors il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $h = \lambda\,\mathrm{id}_E$. Comme $\dim(E) \geq 1$, on peut considérer un vecteur non nul x de E. Alors

$$\|x\| = \|h(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot x\|.$$

Comme x est non nul, on en déduit que $|\lambda| = 1$ d'où $h = \pm\,\mathrm{id}_E$.
Les homothéties vectorielles qui sont des isométries sont donc exactement id_E et $-\mathrm{id}_E$.

5 - Est-ce que les projections orthogonales sont des isométries ? *À l'exception de l'identité, les projections orthogonales ne sont pas des isométries. En effet, si p est la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F strictement inclus dans E, en considérant un vecteur non nul $x \in F^\perp$, on obtient $\|p(x)\| = \|0_E\| = 0 \neq \|x\|$.*

Est-ce que les symétries orthogonales sont des isométries ? *Ce sont bien des isométries : soit s une symétrie orthogonale par rapport à un sous espace vectoriel F. Soit $x \in E$. Alors $x = y+z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$, et $s(x) = y-z$. Par Pythagore, $\|s(x)\|^2 = \|y\|^2 + \|-z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2$. D'où $\|s(x)\| = \|x\|$.*

6 - Soit u un endomorphisme de E. Montrer que u est une isométrie si, et seulement si, l'image par u d'une (de toute) base orthonormée est également orthonormée si, et seulement si, la matrice de u dans une (toute) base orthonormée est orthogonale.

Vérifions la première équivalence. Supposons que u est une isométrie. Alors u préserve la norme et le produit scalaire. Donc l'image par u d'une quelconque base orthonormée l'est encore. Réciproquement, supposons que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E et que son image $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est également orthonormée. Soit $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. On a alors $u(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(e_i)$ et $\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \|x\|^2$.
La seconde équivalence suit immédiatement de la question **I.5.**.

7 - En déduire les déterminants possibles pour une isométrie.

La matrice d'une isométrie dans une base orthonormée étant orthogonale, son déterminant vaut 1 ou -1.

On notera pour la suite $SO(E)$ le sous-groupe des isométries de déterminant 1.

8 - Soit u une isométrie de E.

(a) Montrer que les valeurs propres de u sont dans $\{-1, 1\}$. Montrer de plus, que si u a deux sous-espaces propres, ils sont orthogonaux.

Soit une valeur propre λ de u (ici u est un endomorphisme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, λ est donc un réel). Soit x un vecteur propre associé à λ. Alors $\|x\| = \|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

Comme x est non nul, on a $\lambda = \pm 1$.
Ainsi, si u a deux sous-espaces propres, ce sont les sous-espaces propres E_1 et E_{-1} associés respectivement aux valeurs propres 1 et -1. Soit $x \in E_1$ et $y \in E_{-1}$. Alors $u(x+y) = x-y$, d'où $\|x-y\|^2 = \|x+y\|^2$. En développant cette dernière égalité, on obtient $-2\langle x, y\rangle = 2\langle x, y\rangle$ d'où $\langle x, y\rangle = 0$. Les vecteurs x et y sont donc orthogonaux, ce qui entraîne que E_1 et E_{-1} le sont.

(b) Montrer que l'orthogonal d'un espace propre de u est également stable par u.

Remarquons que si F est un sous-espace propre alors $u(F) = F$. Comme u préserve le produit scalaire, on en déduit que $u(F^\perp) \subseteq F^\perp$ (en fait on a égalité par égalité des dimensions du fait que u est bijective).

(c) Montrer que u est diagonalisable si, et seulement, u est une symétrie orthogonale.

Supposons u diagonalisable. Comme u a au plus deux valeurs propres 1 et -1, si $u \neq \pm \mathrm{id}_E$, alors on a $E = E_1 \oplus E_{-1}$. De plus, par **(a)** *les deux espaces propres sont orthogonaux. Il suit que u est la symétrie orthogonale par rapport à E_1.*
Supposons que u est une symétrie orthogonale par rapport à F. Alors $E = F \oplus F^\perp$ et on a par définition de la symétrie $F = \ker(u - id_E)$ et $F^\perp = \ker(u + id_E)$. Ainsi, u est diagonalisable (dans une base orthonormée : il suffit de considérer une base orthonormée de F et une base orthonormée de $F^\perp$).

(d) Montrer que $\ker(u - id_E)$ et $\mathrm{Im}(u - id_E)$ sont des supplémentaires orthogonaux.

$u - id_E$ est un endomorphisme sur E de dimension finie, donc par le théorème du rang on a $\dim E = \dim \ker(u - id_E) + \dim \mathrm{Im}(u - id_E)$. Il reste donc à vérifier que $\ker(u - id_E)$ et $\mathrm{Im}(u - id_E)$ sont orthogonaux pour conclure. Soit $x \in \ker(u - id_E)$ et $y \in \mathrm{Im}(u - id_E)$. Il existe $z \in E$ tel que $y = u(z) - z$. Comme u est une isométrie et $u(x) = x$, on obtient

$$\langle x, y\rangle = \langle x, u(z) - z\rangle = \langle x, u(z)\rangle - \langle x, z\rangle = \langle u(x), u(z)\rangle - \langle x, z\rangle = 0.$$

Ainsi, $\ker(u - id_E)$ et $\mathrm{Im}(u - id_E)$ sont orthogonaux.

9 - Isométries du plan. On suppose pour cette question que E est de dimension 2 avec le choix d'une orientation donnée par la base orthonormée (e_1, e_2).

a) Montrer qu'un endomorphisme u de E est une isométrie si, et seulement si, la matrice de u dans la base (e_1, e_2) est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \quad \text{avec } a,\, b \text{ réels tels que } a^2 + b^2 = 1.$$

Soit u une isométrie. Par la question **6**, *$(u(e_1), u(e_2))$ forme une base orthonormée. Soit (a, b) les coordonnées de $u(e_1)$ dans la base (e_1, e_2) (c.à.d. $u(e_1) = ae_1 + be_2$. Comme $\|u(e_1)\| = 1$, on a $a^2 + b^2 = 1$. Alors, les seuls vecteurs de norme 1 orthogonaux à $u(e_1)$ sont $-be_1 + ae_2$ et $be_1 - ae_2$ d'où la conclusion.*
Réciproquement, on vérifie immédiatement que les matrices de cette forme sont orthogonales et on conclut par la question **6**.

b) Montrer que le groupe SO_2 est commutatif. (Indication : on pourra décomposer une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ sous la forme $aI_2 + bU$ où $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.)

D'après ce qui précède, on a

$$SO_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \text{ tel que } a^2 + b^2 = 1 \right\}.$$

Soient R_1 et R_2 deux éléments de SO_2. Il existe alors des réels a_1, b_1, a_2 et b_2 tel que $R_1 = a_1 I_2 + b_1 U$ et $R_2 = a_2 I_2 + b_2 U$ où $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} R_1 R_2 &= (a_1 I_2 + b_1 U)(a_2 I_2 + b_2 U) = a_1 a_2 I_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) U + b_1 b_2 U^2 \\ &= a_2 a_1 I_2 + (a_2 b_1 + b_2 a_1) U + b_2 b_1 U^2 = (a_2 I_2 + b_2 U)(a_1 I_2 + b_1 U) = R_2 R_1. \end{aligned}$$

c) En déduire que si $u \in SO(E)$, alors la matrice de u dans toute base orthonormée directe est la même.

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées directes, par définition (cf **I.7.***) la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est alors dans SO_2. Soit A et A' les matrices de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement. Alors $A' = P^{-1}AP$. Comme A et P sont dans SO_2, qui est commutatif, on en déduit que $A' = P^{-1}AP = P^{-1}PA = A$.*

Montrer qu'il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ telle que cette matrice vaut

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Par ce qui précède cette matrice vaut $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où a, b sont deux réels tel que $a^2 + b^2 = 1$. Il existe alors un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $\cos(\theta) = a$ et $\sin(\theta) = b$, ce qui permet de conclure.

Ainsi, u se nomme **rotation** d'angle θ. Que se passe-t-il si l'on change l'orientation de E ?

Si l'on change l'orientation de E, on obtient l'angle opposé. En effet, en utilisant un changement de base consistant à permuter les deux vecteurs de basse, on obtient alors comme matrice pour u

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

d) Que vaut la composition de deux rotations ?

Le calcul algébrique (via le produit des matrices) permet de vérifier que le produit d'une rotation d'angle θ avec une rotation d'angle θ' est égal à la rotation d'angle $\theta + \theta'$.
On retrouve ici le résultat que l'on peut observer par l'interprétation géométrique d'une rotation d'angle θ : en effet une telle rotation envoie un vecteur d'affixe z vers le vecteur d'affixe $ze^{i\theta}$.

e) Montrer qu'une isométrie u de E de déterminant -1 est diagonalisable.

Par **a)** *une telle isométrie a pour matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, avec a, b réels tels que $a^2 + b^2 = 1$ dans la base (e_1, e_2). Cette matrice a pour polynôme caractéristique $X^2 - 1$ car $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $\det(A) = -1$. Comme ce polynôme est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, cette matrice est diagonalisable. (On pourrait aussi utiliser ici le fait que u est un endomorphisme symétrique, voir* **PARTIE IV***.)*

En déduire que u est une symétrie orthogonale.

Par la question **8 (c)***, il suit que u est une symétrie orthogonale.*
Remarque : si on note θ l'unique réel de $[0, 2\pi[$ tel que $\cos(\theta) = a$ et $\sin(\theta) = b$, on vérifie facilement que u est la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle d'angle $\theta/2$ avec la droite des abscisses (droite de vecteur directeur e_1). En terme d'affixes, u envoie un vecteur d'affixe z sur le vecteur d'affixe $\bar{z}e^{i\theta}$.

f) Montrer que toute rotation est égale au produit de deux symétries orthogonales.

Soit r la rotation d'angle θ. On a

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, r est égale au produit de la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle $\theta/2$ et de la symétrie orthogonale par rapport à la droite des abscisses. (En termes d'affixes, on a $z \mapsto \bar{z} \mapsto \bar{\bar{z}}e^{i\theta} = ze^{i\theta}$.)

10 - Isométries de l'espace. On suppose pour cette question que E est de dimension 3 avec le choix d'une orientation donnée par la base orthonormée (e_1, e_2, e_3).

a) Soit $u \in O(E)$. Montrer que u a au moins une valeur propre (qui vaut donc 1 ou -1).

Le polynôme caractéristique de u est de degré 3, il admet donc au moins une racine réelle, qui est alors une valeur propre de u et vaut 1 ou -1 d'après **8 (c)** *(Rappelons que par le théorème des valeurs intermédiaires, tout polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.)*

b) Soit $u \in SO(E)$ différent de l'identité.

i. Montrer que 1 est valeur propre de u et l'espace propre associé est une droite D.

Supposons que 1 n'est pas valeur propre de u. Alors -1 est valeur propre de u. L'espace propre E_{-1} ne peut être égale à E car $\det(-\mathrm{id}_E) = (-1)^3 = -1$. Rappelons que $E_{-1}^\perp$ est stable par u. Alors u induit une isométrie sur $E_{-1}^\perp$, sous-espace vectoriel de dimension 1 ou 2. Mais $E_{-1}^\perp$ ne peut être de dimension 1 : sinon pour $x \in E_{-1}^\perp$ non nul, comme $u(x) \in E_{-1}^\perp$, x serait un vecteur propre de u, associé nécessairement à la valeur 1 et donc dans ce cas x appartiendrait à E_{-1} ce qui donne une contradiction. Le sous-espace $E_{-1}^\perp$ ne peut être de dimension 2 : sinon, $u_{|E_{-1}^\perp}$ est un isométrie du plan qui ne peut avoir -1 pour valeur propre, ce serait donc une isométrie directe et par diagonalisation par bloc, on aurait $\det(u) = \det(u_{|E_{-1}}) \det(u_{|E_{-1}^\perp}) = (-1) \times 1 = -1$. Ainsi, 1 est nécessairement valeur propre. Par hypothèse E_1 ne peut être de dimension 3 (sinon u serait égal à l'identité). L'espace propre E_1 ne peut pas être non plus de dimension 2, sinon $u_{|E_1^\perp}$ aurait nécessairement -1 comme valeur propre et dans par un calcul analogue que précédemment, on aurait $\det(u) = -1$. Ainsi E_1 est une droite que l'on notera pour la suite D.

ii. Soit P le plan orthogonal à la droite D. Montrer que $u_{|P}$ est une rotation du plan P.

Rappelons que P étant l'orthogonal de l'espace propre E_1, ce plan est stable par u. Ainsi $u_{|P}$ est une isométrie du plan qui ne peut avoir 1 pour valeur propre, ce ne peut donc être une symétrie orthogonale. C'est donc une rotation.

iii. Fixons un vecteur unitaire e_D de D. Montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0, 2\pi[$, tel que dans toute base orthonormée directe de la forme (e_D, f_1, f_2), la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Si on considère deux bases orthonormées directes de la forme (e_D, f_1, f_2) et (e_D, f_1', f_2'), alors les deux bases orthonormées (f_1, f_2) et (f_1', f_2') de P ont même sens. Le résultat suit alors de la question **9 c)** *et du fait que $u \neq \mathrm{id}_E$.*

On dit que u est une rotation d'axe D et θ est la mesure de u relative au choix de la direction e_D.

c) Soit $u \in O(E)$ de déterminant -1.

i. Montrer que si 1 est valeur propre de u alors u est une symétrie orthogonale par rapport à un plan P.

Par le même type de raisonnement que précédemment, on montre que E_1 ne peut être que de dimension 2 dans ce cas. On note P le plan E_1. Alors $P^{\perp}$ étant de dimension 1 et u ne pouvant être l'identité, on a nécessairement $u_{|P^{\perp}} = -\operatorname{id}_{|P^{\perp}}$. Ce qui entraîne que u est la symétrie orthogonale par rapport à P ?

Une telle symétrie est appelée **réflexion** par rapport au plan P. En déduire qu'il existe une base orthonormée (directe) telle que la matrice de u dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On considère une base orthonormée (f_1, f_2) de P et un vecteur f_3 de $P^{\perp}$ de norme 1. Alors l'une des bases orthonormées (f_1, f_2, f_3) ou $(f_1, f_2, -f_3)$ est directe. La matrice de u dans cette base est de la forme demandée.

ii. On suppose que 1 n'est pas valeur propre de u. Montrer que u est la composée d'une rotation d'axe D et d'une réflexion par rapport au plan $P = D^{\perp}$.

Par **a)** *-1 est nécessairement une valeur propre de u. Soit D une droite incluse dans l'espace propre E_{-1} , e_D un vecteur unitaire de D et $P = E^{\perp}$. On considère v la composée de u par la réflexion par rapport au plan P. Ainsi, D est dans l'espace propre de v associé à la valeur propre 1. De plus v ne peut être l'identité, sinon u serait une réflexion et 1 serait valeur propre de u. Par la question* **b)**, *on en déduit que v est une rotation d'axe D d'angle $\theta \in]0, 2\pi[$ relativement à la direction e_D.*

Si on fixe un vecteur unitaire e_D de D, montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0, 2\pi[$, tel que dans toute base orthonormée directe de la forme (e_D, f_1, f_2), la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Cela suit de l'unicité de l'angle de la rotation ci-dessus relativement à la direction e_D et d'un simple calcul matriciel.
Remarque : si $u = -\operatorname{id}_E$ alors on peut choisir pour D n'importe quelle droite. Par contre, si $u \neq -\operatorname{id}_E$, la droite D est unique, il s'agit de l'espace propre associé à la valeur propre -1.

PARTIE III : Extrait sujet 1 Capes Externe 2017 -suite [1]

1. Le début du problème a été traité dans la fiche 1 algèbre linéaire.

Partie C : isométries du réseau

Soit G l'ensemble des isométries affines f de $\mathbb{R}^2$ telles que $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ et soit G_0 l'ensemble des éléments f de G tels que $f(O) = O$.

I. Montrer que G, muni de la loi de composition des applications, est un groupe et que G_0 est un sous-groupe de G.

II. Soit $f \in G_0$. On remarque qu'alors f est une application linéaire et que les résultats de la partie **B.** s'appliquent. Soit A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer tous les points X de $\mathcal{R}$ situés à la distance 1 de O.

2. Montrer que $f(e_1)$ et $f(e_2)$ appartiennent à l'ensemble

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Montrer que A appartient à l'ensemble

$$H = \left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\}.$$

III. Soient s_1 et s_2 les applications linéaires de matrices respectives dans la base $\mathcal{C}$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Décrire la nature géométrique de s_1 et s_2.

2. Décrire la nature géométrique de $s_1 \circ s_2$ et de $s_2 \circ s_1$ et donner leurs matrices dans la base canonique.

3. Montrer que s_1 et s_2 sont des éléments de G_0.

4. En déduire que, si la matrice dans la base canonique d'une application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est dans H, alors f est un élément de G_0.

IV. Donner tous les éléments de G_0.

V. Soit t la translation de vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Montrer que $t \in G$ si, et seulement si, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{R}$.

VI. Soit $f \in G$ et soit t' la translation de vecteur $-f(O)$. Montrer que t' est un élément de G et que $g = t' \circ f$ est un élément de G_0.

VII. Montrer que tout élément f de G s'écrit de façon unique $f = t \circ g$, avec t une translation de vecteur dans $\mathcal{R}$ et g un élément de G_0.

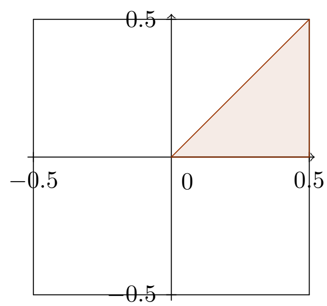
Partie D : un pavage du plan

On note T la surface délimitée par le triangle de $\mathbb{R}^2$ de sommets

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et on note C la surface délimitée par le carré de sommets

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$



I. 1. Justifier que

$$C = \bigcup_{g \in G_0} g(T).$$

2. Montrer que, si g_1 et g_2 sont deux éléments distincts de G_0, alors l'intersection des triangles $g_1(T)$ et $g_2(T)$ est, soit un segment, soit un point.

II. Pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, on note t_X la translation de vecteur X.

1. Justifier que

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{X \in \mathcal{R}} t_X(C).$$

2. Montrer que si X et Y sont deux éléments distincts de $\mathcal{R}$, alors l'intersection des carrés $t_X(C)$ et $t_Y(C)$ est, soit un segment, soit un point, soit l'ensemble vide.

III. 1. Justifier que

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{f \in G} f(T).$$

2. Montrer que si f_1 et f_2 sont deux éléments distincts de G, alors l'intersection des triangles $f_1(T)$ et $f_2(T)$ est, soit un segment, soit un point, soit l'ensemble vide.

Partie E : un sous-groupe et deux frises

I. Soit k un entier relatif. On considère les applications

$$t_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+k \\ y \end{pmatrix} \end{array} \right. \qquad s_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -x+k \\ -y \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

1. Quelle est la nature géométrique de t_k et s_k ?

2. Soit k et l deux entiers relatifs. Décrire $t_k \circ s_l$, $s_k \circ t_l$, $s_k \circ s_l$ et $t_k \circ t_l$.

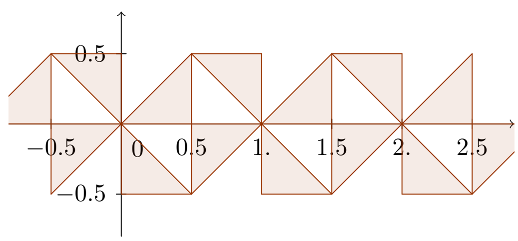
II. Soit $H = \{t_k, s_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que H est un sous-groupe de G.

III. On considère l'ensemble

$$F = \bigcup_{f \in H} f(T),$$

où T est le triangle défini dans la section **D**. Décrire l'ensemble F.

IV. On considère la frise suivante :



Montrer que le groupe des isométries qui conservent cette frise est un sous-groupe de G qu'on décrira.

PARTIE IV : endomorphismes symétriques

Un endomorphisme u de E est **symétrique** si pour tous x et y de E, on a $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$.

1 - Montrer qu'un endomorphisme u de E est symétrique si, et seulement si, sa matrice dans une (toute) base orthonormée est symétrique.

2 - Montrer que toute projection orthogonale est symétrique.

3 - Montrer que toute symétrie orthogonale est symétrique.

4 - Soit u un endomorphisme symétrique. Montrer que $\ker u \subset (\operatorname{Im} u)^\perp$. En déduire que $\ker u = (\operatorname{Im} u)^\perp$.)

5 - Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. On considère $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A éventuellement complexe et $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé à cette valeur propre. On note $\overline{X}$ le vecteur conjugué de X.

(a) Montrer que ${}^tXA\overline{X} = \bar{\lambda}\,{}^tX\overline{X}$.

(b) Montrer que ${}^tXA\overline{X} = \lambda\,{}^tX\overline{X}$.

(c) En déduire que $\lambda \in \mathbb{R}$ et que le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$.

6 - Montrer que si un sous-espace vectoriel F de E est stable par un endomorphisme symétrique u, alors $F^\perp$ l'est aussi.

7 - Montrer par récurrence sur la dimension de E que tout endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée de E.

8 - En déduire que toute matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans une base orthonormée de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^n$.

PARTIE V : extraits second sujet capes 2011

n désigne un entier naturel non nul.

Ce problème a pour objet de démontrer que tout compact de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide est inclus dans un unique ellipsoïde de volume minimal.

La partie I est indépendante du reste du problème.

Notations et définitions

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: ensemble des matrices à n lignes et à p colonnes, à coefficients dans $\mathbb{R}$, et on identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes, à coefficients dans $\mathbb{R}$.
- $GL_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Si n et p sont deux entiers naturels non nuls, $0_{n,p}$ désigne la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls.
- Pour $M = (m_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $k \in \{1, \cdots, n\}$, on note M_k la matrice $(m_{ij})_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq k}} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques, c'est-à-dire telles que ${}^tM = M$.
- On rappelle qu'une matrice M de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive lorsque pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXMX \geq 0$. On notera $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.
- On rappelle qu'une matrice M de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive lorsque pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{n,1}\}$, ${}^tXMX > 0$. On notera $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.
- On dit qu'une partie $\mathcal{E}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (ou de $\mathbb{R}^n$) est un **ellipsoïde**, s'il existe $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathcal{E} = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ {}^tXAX \leq 1\}$$

Pour $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, l'ellipsoïde $\{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ {}^tXAX \leq 1\}$ sera noté $\mathcal{E}_A$.

Partie II : étude de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

1. Montrer que si $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, alors $D \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que, si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors les valeurs propres de A sont strictement positives.
   (b) Enoncer le théorème permettant d'affirmer qu'il existe des matrices D diagonale et P orthogonale telles que $A = {}^tPDP$.
   (c) Montrer que, si les valeurs propres de A sont strictement positives, alors $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tQQ$.
4. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\det(A) > 0$. La réciproque est-elle vraie ?
5. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, $\det(A_k) > 0$.
6. Soit $A \in \mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} {}^tQ & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & C \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0_{n,1} \\ O_{1,n} & 1 \end{pmatrix}$$

7. Etant donné un entier naturel m non nul, $\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_m$ désignent $m+1$ nombres réels. On considère la matrice M de $\mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_m \\ \alpha_1 & \cdots & \cdots & \alpha_m & \alpha \end{pmatrix}$$

   (a) Démontrer par récurrence sur m que $\det(M) = \alpha - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2$.

   (b) Pour $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, expliciter ${}^tXMX$ en fonction des composantes de X et en déduire que si $\det(M) > 0$ alors $M \in \mathcal{S}_{m+1}^{++}(\mathbb{R})$.

8. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$ $\det(A_k) > 0$, alors $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   On pourra raisonner par récurrence sur n et utiliser les questions 6. et 7.

9. Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme.

Partie III : inclusion d'un compact dans un ellipsoïde

III.1 Réduction simultanée

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application Φ_A qui à $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ associe $\Phi_A(X, Y) = {}^tXAY$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

2. Montrer que si les colonnes d'une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour Φ_A, alors ${}^tPAP = I_n$.

3. Montrer que l'application f de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans lui-même qui, à $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associe $f(X) = A^{-1}BX$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, symétrique pour Φ_A.
   Quelle est la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$?

4. En déduire qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale telles que $A = {}^tQQ$ et $B = {}^tQDQ$.
   Que représentent les coefficients diagonaux de D ?

5. On suppose que $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que si $\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}_B$ les valeurs propres de $A^{-1}B$ sont inférieures ou égales à 1.

   (b) En déduire que si $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_B$ alors $A = B$.

III.2 Convexité

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Si u_1 et u_2 sont deux éléments de E, le segment $[u_1; u_2]$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $tu_1 + (1-t)u_2$ lorsque t décrit $[0; 1]$.
On rappelle qu'une partie $\mathcal{C}$ de E est convexe lorsque, pour tout $(u_1, u_2) \in \mathcal{C}^2$,$[u_1; u_2] \subset \mathcal{C}$.
Étant donnée une partie $\mathcal{C}$ de E convexe, une application $\varphi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ est dite strictement convexe lorsque pour tout $(u_1, u_2) \in \mathcal{C}^2$ tel que $u_1 \neq u_2$ et pour tout $t \in]0; 1[$, $\varphi(tu_1 + (1-t)u_2) < t\varphi(u_1) + (1-t)\varphi(u_2)$.

1. Montrer que l'intersection de deux parties convexes est convexe.

2. On suppose de plus E normé. On considère une partie $\mathcal{C}$ non vide, convexe et compacte de E et $\varphi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ une application strictement convexe et continue sur $\mathcal{C}$.

   (a) Montrer que φ admet un minimum, atteint en un unique point.

   (b) Montrer que φ admet un maximum. Sans justification, donner un exemple pour lequel ce maximum est atteint en une infinité de points.