Concours Communs Polytechniques 2014
Mathématiques 1 – TSI

Exercice

I. L'application φ, bien définie sur $\mathbb{R}_1[X]$, est :

- bilinéaire :
  Quels que soient $P, Q, R \in \mathbb{R}_1[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\lambda P+Q,R)=\int_0^1(\lambda P+Q)(t)R(t)\,\mathrm{d}t=\lambda\int_0^1 P(t)R(t)+\int_0^1 Q(t)R(t)\,\mathrm{d}t=\lambda\varphi(P,R)+\varphi(Q,R)$$
$$\varphi(P,\lambda Q+R)=\int_0^1 P(t)(\lambda Q+R)(t)\,\mathrm{d}t=\lambda\int_0^1 P(t)Q(t)+\int_0^1 P(t)R(t)\,\mathrm{d}t=\lambda\varphi(P,Q)+\varphi(P,R)$$

- symétrique :
  Quels que soient $P, Q \in \mathbb{R}_1[X]$,

$$\varphi(P,Q)=\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 Q(t)P(t)\,\mathrm{d}t=\varphi(Q,P)$$

- définie positive :
  Tout d'abord,

$$\forall P\in\mathbb{R}_1[X]\quad \varphi(P,P)=\int_0^1 P^2(t)\,\mathrm{d}t\geqslant 0\qquad\text{par positivité de l'intégrale}$$

  De plus,

$$\begin{aligned}\varphi(P,P)=0 &\iff \int_0^1 P^2(t)\,\mathrm{d}t=0\\ &\iff \forall t\in[0,1]\quad P(t)=0\qquad \text{car } t\mapsto P^2(t) \text{ est continue et positive sur } [0,1]\\ &\iff P=\tilde{0}\qquad \text{car } P \text{ admet une infinité de racines}\end{aligned}$$

Ainsi, φ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_1[X]$.

II. A. Si l'égalité est vraie pour tout polynôme P, elle l'est en particulier pour $P=1$ et $P=X$. Réciproquement, si elle l'est pour $P=1$ et pour $P=X$, en posant $P=aX+b$, on obtient :

$$(aX+b|P_0)=a\,(X|P_0)+b\,(1|P_0)=b=P(0)$$

B. 1. On trouve :

$$(1|P_0)=\int_0^1(a_0t+b_0)\,\mathrm{d}t=\left[a_0\frac{t^2}{2}+b_0t\right]_0^1=\frac{a_0}{2}+b_0$$
$$(X|P_0)=\int_0^1(a_0t^2+b_0t)\,\mathrm{d}t=\left[a_0\frac{t^3}{3}+b_0\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{a_0}{3}+\frac{b_0}{2}$$

Ainsi, d'après la question précédente, $(P|P_0)=P(0)$ pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_1[X]$ si et seulement si :

$$\begin{cases}\dfrac{a_0}{2}+b_0=1\\[2mm] \dfrac{a_0}{3}+\dfrac{b_0}{2}=0\end{cases}$$

2. Il n'y a plus qu'à résoudre le système ! On trouve (pivot de Gauss, formule de Cramer, ...) $a_0 = -6$ et $b_0 = 4$, soit $P_0 = -6X + 4$.

III. A. **1.** $\|1\| = \int_0^1 \mathrm{d}t = 1$.

2. Orthonormalisons la base $(1, X)$ à l'aide du procédé de Gram-Schmidt,

- Posons $P_1 = 1$. On a $\|P_1\| = 1$.
- Posons $P_2' = X - \lambda P_1$.

$$(P_2'|P_1) = 0 \iff \int_0^1 (t - \lambda)\,\mathrm{d}t = 0 \iff \frac{1}{2} - \lambda = 0 \iff \lambda = \frac{1}{2}$$

Comme $\left\| X - \frac{1}{2} \right\| = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, $P_2 = 2\sqrt{3}\left(X - \frac{1}{2}\right)$ convient.

La famille (P_1, P_2) ainsi construite est orthonormale.

3. ⋆ Montrons pour commencer que les polynômes de la forme $\cos(\theta)P_1 + \sin(\theta)P_2$ sont bien de norme 1.

$$\begin{aligned}\|\cos(\theta)P_1 + \sin(\theta)P_2\|^2 &= \|\cos(\theta)P_1\|^2 + \|\sin(\theta)P_2\|^2 \quad \text{(Pythagore)}\\ &= \cos^2(\theta)\,\|P_1\|^2 + \sin^2(\theta)\,\|P_2\|^2\\ &= \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1\end{aligned}$$

⋆ Réciproquement, si $P = aP_1 + bP_2$ est un polynôme de $\mathbb{R}_1[X]$ que l'on suppose de norme 1, alors :

$$\|P\|^2 = a^2\,\|P_1\|^2 + b^2\,\|P_2\|^2 = a^2 + b^2 = 1$$

Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$.

4. Si $P = \cos(\theta)P_1 + \sin(\theta)P_2$ alors,

$$P(0) = \cos(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta) = 2\left(\frac{1}{2}\cos(\theta) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta)\right) = 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

5. La valeur maximale vaut donc 2 et elle est atteinte pour $\theta = -\frac{\pi}{3}$ modulo 2π.

B. **1.** Quels que soient les polynômes P et Q, $|(P|Q)| \leqslant \|P\| \cdot \|Q\|$
Il y a égalité lorsque les polynômes P et Q sont proportionnels (les deux vecteurs sont alors colinéaires).

2. Appliquée à $P \in \mathrm{S}$ et P_0, l'inégalité devient :

$$|(P|P_0)| = |P(0)| \leqslant \|P\| \cdot \|P_0\| = \|P_0\|$$

En particulier, $P(0) \leqslant \|P_0\|$.

3. Il suffit de prendre un polynôme proportionnel à P_0 et de norme 1, avec, par exemple, $P = \dfrac{P_0}{\|P_0\|}$.

4. $\|P_0\| = \|-6X + 4\| = \sqrt{\int_0^1 (-6t + 4)^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{4} = 2$.
On retrouve bien le résultat précédent.