Devoir 2
à retourner le 5 décembre

Exercices 3.2, 3.16, 3.21, 3.33, 3.35, 3.36 du chapitre 3.

Exercice 1 (Conditions de chaînes dans les groupes stables).

(a) Soit $\mathcal{M}$ une structure stable. Soit $(D_i)_{i\in I}$ une famille de parties de M^n **uniformément définissables** : il existe $\phi(\bar{x},\bar{y})$ tel que pour $i \in I$, D_i est définie par $\phi(\bar{x},\bar{m}_i)$ pour un uple $\bar{m}_i \in M$. Alors la longueur d'une chaîne d'éléments de cette famille est bornée : il existe k tel que si $D_{i_1} \subset D_{i_2} \subset ... \subset D_{i_l}$ est une suite strictement croissante alors $l \leq k$. (Indication : montrer que $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ a la propriété de l'ordre sinon.)

(b) Soit G un groupe stable et soit $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes uniformément définissables.

-i- Montrer que les intersections finies de H_i sont uniformément définissables.

-ii- En déduire qu'il existe un entier n tel que l'intersection des H_i est égale à l'intersection de n d'entre-eux. (**Condition de Baldwin-Saxl**)

-iii- Soit $A \subset G$. Montrer que $C(A) = \{g \in G : ga = ag \text{ pour tout } a \in A\}$ est définissable.

(c) Soit K un corps stable infini et H un sous-groupe de $(K,+)$ d'indice fini.

-i- Vérifier que $I = \cap_{a\in K^*} aH$ est un idéal de K.

-ii- Montrer que I est d'indice fini dans $(K,+)$.

-iii- En déduire que $H = K$.

(d) Soit $\mathcal{M}$ une structure totalement transcendante et soit f une application de M^n dans M^k définissable à paramètres $A \subset M$.

-i- Montrer que pour tout $\bar{m} \in M^n$,

$$\mathrm{RM}(f(\bar{m})/A) \leq \mathrm{RM}(\bar{m}/A).$$

-ii- Supposons de plus que f est bijective. Soit $D \subset M^n$ une partie définissable. Montrer que $\mathrm{RM}(D) = \mathrm{RM}(f(D))$.

(e) Soit G un groupe ω-stable.

-i- Soient $K \subset H \subset G$ deux sous-groupes de G définissables.
Montrer que si K est d'indice infini dans H alors $\mathrm{RM}(H) > \mathrm{RM}(K)$.
Montrer que si K est d'indice fini dans H alors $\mathrm{RM}(H) = \mathrm{RM}(K)$ et $\mathrm{dM}(H) = \mathrm{dM}(K)[H:K]$.

-ii- Montrer qu'il n'existe pas de suites infinies strictement décroissantes de sous-groupes définissables de G. (On utilisera le fait qu'il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'ordinaux.)

-iii- Montrer qu'une intersection de sous-groupes définissables est définissable.

(f) -i- Montrer que $\langle \mathbb{Z},+\rangle$ n'est pas ω-stable.

-ii- Soient $\langle G,+\rangle$ un groupe abélien, D un sous-groupe divisible et p la projection de G sur G/D. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des isomorphismes partiels σ de $\langle G/D,+\rangle$ vers $\langle G,+\rangle$ tel que $p\circ\sigma$ est l'identité. Montrer que pour tout $\sigma \in \mathcal{F}$ et tout $a \in G/D$ il existe $\tau \in \mathcal{F}$ prolongeant σ tel que $a \in \mathrm{dom}\tau$.
En déduire qu'il existe un morphisme s de G/D vers G tel que $p \circ s = id_{G/D}$.
Montrer que G est isomorphe à $D \times G/D$ (c.à.d à $D \oplus G/D$).

-iii- Soit $\langle G,+\rangle$ un groupe abélien ω-stable. Montrer qu'il existe un entier $m > 0$ tel que mG est divisible. En déduire que G est somme directe d'un groupe divisible avec un groupe d'exposant borné.

Exercices 4.4, 4.13, 4.19, 4.23, 4.25, 4.30, 4.37 du chapitre 4.