Corrigé rapide du devoir 1

Exercice 1. On vérifie que pour toutes formules ϕ et ψ, $\neg\phi$ est équivalente $(\phi \downarrow \phi)$ et $\phi \wedge \psi$ est équivalente $(\phi \downarrow \psi) \downarrow (\phi \downarrow \psi)$. On conclut alors par induction sur les formules.

Exercice 2. On montre le résultat par induction sur les formules. Soient $\phi(\bar{y})$ et $\psi(\bar{z})$ des formules équivalentes respectivement à $Q_1x_1Q_2x_2 \ldots Q_nx_n\phi_0(\bar{x}, \bar{y})$ et $Q'_1x'_1Q_2x'_2 \ldots Q'_nx'_{n'}\psi_0(\bar{x}', \bar{z})$ où les Q_i et Q'_i sont des quantificateurs, ϕ_0 et ψ_0 des formules sans quantificateurs, et $\{\bar{x}\} \cap \{\bar{y}\} = \emptyset$, $\{\bar{x}'\} \cap \{\bar{z}\} = \emptyset$.

Alors :

- $\neg\phi(\bar{y})$ est équivalente à $\bar{Q}_1x_1\bar{Q}_2x_2 \ldots \bar{Q}_nx_n\neg\phi_0(\bar{x}, \bar{y})$, où $\bar{\forall} = \exists$ et $\bar{\exists} = \forall$. (Pour cela on utilise récursivement le fait que $\neg Qx\theta$ est équivalente à $\bar{Q}x\neg\theta$.)
- Pour traiter le cas $\phi(\bar{y}) \wedge \psi(\bar{z})$, on renomme les variables x_i et x'_i de telles manières que $\{\bar{x}\} \cap \{\bar{x}'\} = \emptyset$ et que $\{\bar{x}\bar{x}'\} \cap \{\bar{y}\bar{z}\} = \emptyset$. Avec cette hypothèse supplémentaire, $\phi(\bar{y}) \wedge \psi(\bar{z})$ est équivalente à
$$Q_1x_1Q_2x_2 \ldots Q_nx_nQ'_1x'_1Q_2x'_2 \ldots Q_{n'}x'_{n'}(\phi_0(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \psi_0(\bar{x}', \bar{z})).$$
(On utilise ici le fait que $Qx\theta(x, \bar{y}) \wedge \gamma(\bar{z})$ est équivalente à $Qx(\theta(x, \bar{y}) \wedge \gamma(\bar{z}))$ si x n'est pas une variable dans $\bar{z}$.)
- La disjonction se traite de la même manière que la conjonction et pour la quantification c'est évident.

Exercice 3. Par exemple $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, S \rangle$ et $\mathcal{N} = \langle \mathbb{Z}, S \rangle$ où S est la fonction successeur ($S(n) = n + 1$).

Exercice 4. (a) $\forall y \forall z(x = y \cdot z \to ((x = y \wedge x \neq z) \vee (x \neq y \wedge x = z)))$.

(b) $\exists z x = y + z^2$.

Exercice 5. 1. – axiomes de relations d'équivalences : $\forall x\, xEx$, $\forall x, y\, (xEy \iff yEx)$, $\forall x, y, z\, ((xEy \wedge yEz) \to xEz)$.
- 2 classes : $\exists x, y((\neg xEy) \wedge \forall z(zEx \vee zEy))$.
- les classes sont infinies : il faut ici une infinité d'axiomes ; pour chaque entier $n > 0$, on considère l'axiome qui dit que toute classe a plus de n éléments ; $\forall x \exists x_1, ..., x_n$"distincts"$\wedge_i$ x_iEx.

2. – axiomes de relations d'équivalences.
- une infinité de classes : pour chaque entiers $n > 0$, l'axiome $\exists x_1, ..., x_n \wedge_{i \neq j} \neg x_iEx_j$.
- les classes sont infinies.

Exercice 6. Les deux premiers points sont faciles. Voici un exemple pour le troisième point : soit $\mathcal{M}_3 = \langle \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, < \rangle$ où $<$ est l'ordre lexicographique. On prend pour $\mathcal{M}_1$ la sous-structure $\langle \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Z}, < \rangle$ et $\mathcal{M}_2$ la sous-structure $\langle \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Z} \cup \{0\} \times 2\mathbb{Z}, < \rangle$. Remarquons qu'il existe un isomorphisme de $\mathcal{M}_2$ sur $\mathcal{M}_3$ préservant $\mathcal{M}_1$. Il est facile de voir que $\mathcal{M}_2$ n'est pas sous-structure élémentaire de $\mathcal{M}_3$. Pour montrer que $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_i$, il suffit de faire des va-et-vients infinis au-dessus de n'importe quels uples $\bar{m}$ de $\mathcal{M}_1$. (Remarquons qu'il existe un isomorphisme de $\mathcal{M}_2$ sur $\mathcal{M}_3$ préservant $\mathcal{M}_1$.)

Exercice 7. (a) Utiliser la formule $\forall y(xy = yx)$.

(b) Supposons $\mathcal{A}$ inductif. Soit $m > 0$ minimal tel que $m.1 = 0$. Alors σ l'application de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dans $\mathcal{A}$ qui a $\bar{i}$ associe $i.1$ est un morphisme d'anneau injectif. Pour la surjectivité il suffit d'utiliser le fait que $\mathcal{A}$ est inductif avec la formule $\vee_{0\leq i\leq n}(x = i.1)$.

La réciproque est évidente : pour tout $m > 0$, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est inductif.

(c) $\mathbb{R}$ n'est pas inductif : on utilise ici la formule $\exists y(x = y^2)$ qui n'est satisfaite que par les réels positifs.

(d) $\mathbb{Z}$ n'est pas inductif : on utilise ici la formule $\exists y\exists z\exists t\exists u(x = y^2 + z^2 + t^2 + u^2)$.

(e) Soit K un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Une partie $D \subset K$ définissable est finie ou cofinie : en effet une partie atomique de K correspond aux racines d'un polynôme (éventuellement nul dans $K[X]$) et si D_1 et D_2 sont deux parties de K telles que chacune est finie ou cofinie alors c'est encore vraie pour le complémentaire de D_1 et pour l'union de D_1 et D_2 ; par élimination des quanteurs on en déduit que c'est vraie pour toute partie définissable. Supposons que D satisfait l'hypothèse d'induction ($0 \in D$ et pour tout $x \in D$, $x + 1 \in D$). Alors D est infini car K est de caractéristique 0. Si $D \neq K$ alors il existerait $x \notin D$ mais alors pour tout n, $x - n.1 \notin D$ et D ne serait pas cofini.