Chapitre 1

Préliminaires

Nous supposons connues les notions usuelles de théorie des modèles (langages du premier ordre, théories, types, structures, ensembles définissables, extensions élémentaires, structures saturées ...) et de théorie de la stabilité (déviation, rang de Morley noté RM, rang U de Lascar noté RU, orthogonalité ...). Pour ces notions nos références sont les ouvrages [Ho 93], [Po 85], [Pi 83], [La 86] et [Bu 96]. En ce qui concerne les groupes stables, nous nous référons à [Po 87], [Wa 97], [Pi 96] et [Bu 96].

Nous rappelons dans la première section les définitions des types forts, des ensembles $\bigwedge$-définissables et des structures 1-basées. Dans la seconde section nous énonçons le fait qu'un ensemble minimal est localement modulaire si et seulement si il est 1-basé. Nos références pour la section suivante concernant les groupes 1-basés et les groupes minimaux sont le livre de A. Pillay [Pi 96], le livre de S. Buechler [Bu 96] et le livre de F. Wagner [Wa 97]. Dans la quatrième section nous énonçons le résultat de J. Loveys [Lo 90] concernant la structure induite d'un groupe minimal 1-basé d'exposant non borné. Enfin pour terminer, nous précisons la définition d'une structure finiment axiomatisable, nous présentons les résultats de E. Hrushovski [Hr 94] sur les structures $\aleph_1$-catégoriques finiment axiomatisées et nous déduisons du résultat de J. Loveys [Lo 90], un corollaire immédiat sur les groupes minimaux d'exposant non borné finiment axiomatisables.

1.1 Structures et ensembles définissables

$\mathcal{L}$ dénotera un langage du premier ordre et M dénotera une $\mathcal{L}$-structure. Nous ne considérons tout au long de cette thèse que des structures stables. En théorie des modèles, il est pratique étant donné une structure, de se placer dans une extension élémentaire "universelle". Pour une structure M stable, il suffit pour cela de considérer une extension élémentaire saturée $\mathbf{C}$ de M (c'est-à-dire tout type consistant d'uple fini sur un ensemble de paramètres de cardinal strictement inférieur à celui de $\mathbf{C}$, est réalisé dans $\mathbf{C}$). Dans ce cas $\mathbf{C}$ est aussi une structure (fortement) homogène : pour tous uples $\bar{a}$ et $\bar{b}$ de cardinal strictement inférieur à celui de $\mathbf{C}$, les uples $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type si et seulement si il existe un automorphisme de $\mathbf{C}$ qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$.

Pour toute la suite des préliminaires nous fixons M une $\mathcal{L}$-structure stable et $\mathbf{C}$ une extension élémentaire saturée de M. Les lettres A et B dénoterons des parties de $\mathbf{C}$ "petites" (c'est-à-dire de cardinalité strictement inférieure à celle de $\mathbf{C}$) et n, m des entiers. Par homogénéité, pour tout ensemble définissable $D \subseteq \mathbf{C}^n$ à paramètres dans $\mathbf{C}$, D est définissable à paramètres dans A si et seulement D est (globalement) stable par tout automorphisme de $\mathbf{C}$ fixant (point par point) A. Dans ce cas nous dirons que D est A-définissable ou définissable sur A. Un élément a de $\mathbf{C}$ est algébrique sur A, s'il a un nombre fini de conjugués par l'action des automorphismes de $\mathbf{C}$ fixant A. Nous notons $\mathrm{acl}(A)$ la clôture algébrique de A : l'ensemble des éléments algébriques sur A. De même un élément a est définissable sur A s'il est fixé par tout automorphisme de $\mathbf{C}$ fixant A. Nous notons $\mathrm{dcl}(A)$ la clôture définissable de A : l'ensemble des éléments définissables sur A.

Nous utilisons les notations usuelles $\mathcal{L}^{eq}$, M^{eq} et $\mathbf{C}^{eq}$: $\mathcal{L}^{eq}$ est le langage à plusieurs sortes construit à partir des relations d'équivalence $\emptyset$-définissables et M^{eq}, $\mathbf{C}^{eq}$ sont les $\mathcal{L}^{eq}$-structures correspondant aux $\mathcal{L}$-structures M et $\mathbf{C}$. Nous utilisons les notations dcl^{eq} et acl^{eq} pour les clôtures définissables ou algébriques dans la structure $\mathbf{C}^{eq}$. La structure $\mathbf{C}^{eq}$ reste stable et saturée, est une extension élémentaire de M^{eq} et $\mathbf{C}^{eq} = \mathrm{dcl}^{eq}(\mathbf{C})$, $M^{eq} = \mathrm{dcl}^{eq}(M)$. Une partie $D \subseteq M^n$ définissable dans la structure M^{eq} est définissable dans la structure M.

A partir de maintenant et pour la suite des préliminaires A et B désignent éventuellement des parties "petites" de $\mathbf{C}^{eq}$ (au lieu de $\mathbf{C}$).

1.1.1 Interdéfinissabilité

Soit $\mathcal{L}'$ un autre langage du premier ordre tel que l'ensemble M peut être muni d'une $\mathcal{L}'$-structure. Notons pour cette partie $(M, \mathcal{L})$ la $\mathcal{L}$-structure sur M et $(M, \mathcal{L}')$ la $\mathcal{L}'$-structure sur M.

Définition 1.1.1. Supposons $A \subseteq M$.

i) Les structures $(M, \mathcal{L})$ et $(M, \mathcal{L}')$ sont A-**interdéfinissables** si pour tout entier m et toute partie D de M^m, D est A-définissable dans $(M, \mathcal{L})$ si et seulement si D est A-définissable dans $(M, \mathcal{L}')$.

ii) Les structures $(M, \mathcal{L})$ et $(M, \mathcal{L}')$ sont **presque** A-**interdéfinissables** si pour tout entier m et toute partie D de M^m, D est $\mathrm{acl}^{eq}_{\mathcal{L}}(A)$-définissable dans $(M, \mathcal{L})$ si et seulement si D est $\mathrm{acl}^{eq}_{\mathcal{L}'}(A)$-définissable dans $(M, \mathcal{L}')$.

iii) Soit N une $\mathcal{L}'$-structure.
Les structures $(M, \mathcal{L})$ et $(N, \mathcal{L}')$ sont $\emptyset$-**interdéfinissables** (respectivement **presque** $\emptyset$-**interdéfinissables**) s'il existe une bijection ϕ de M sur N telle que $(\phi(M), \mathcal{L})$ et $(N, \mathcal{L}')$ sont $\emptyset$-interdéfinissables (respectivement presque $\emptyset$-interdéfinissables).

1.1.2 Types forts

Nous rappelons que M est une structure stable, $\mathbf{C}$ une extension saturée de M et A une partie "petite" de $\mathbf{C}^{eq}$.

Par stabilité tout type sur M ou sur $\mathrm{acl}^{eq}(A)$ est stationnaire.

Définition 1.1.2. Soient $\bar{a}$ et $\bar{b}$ deux uples de $\mathbf{C}$. Alors $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même **type fort** sur A s'ils ont même type sur $\mathrm{acl}^{eq}(A)$.

Définition 1.1.3. Une relation d'équivalence est **une relation d'équivalence finie** si elle a un nombre fini de classes d'équivalence.

Théorème 1.1.4. *Soient a et b des éléments de $\mathbf{C}^n$. Alors a et b ont même type fort sur A si et seulement si pour toute relation E d'équivalence finie A-définissable, a et b sont dans la même E-classe.*

Définition 1.1.5. Un automorphisme f de $\mathbf{C}$ est un **automorphisme fort sur A ou A-fort** si pour tout entier m et pour tout élément a de $\mathbf{C}^m$, $f(a)$ a même type fort sur A que a (c'est-à-dire f fixe globalement chacune des classes des relations d'équivalence finies A-définissables).

1.1.3 Ensembles 1-basés

Définition 1.1.6. Une partie **infiniment définissable** D de $\mathbf{C}^n$ est une intersection d'un ensemble de parties définissables de $\mathbf{C}^n$ qui a une cardinalité strictement inférieure à celle de $\mathbf{C}$. Nous noterons simplement que D est **$\bigwedge$-définissable**. Un ensemble D $\bigwedge$-définissable est en fait un type partiel sur un ensemble de paramètres de cardinalité strictement inférieure à la cardinalité de $\mathbf{C}$. Si D est un type partiel sur A, nous dirons que D est $\bigwedge$-définissable sur A.

Pour la suite des préliminaires nous fixons un ensemble D $\bigwedge$-définissable sur A.

Définition 1.1.7. Supposons $B \supseteq A$.

Une partie E de D^m est **relativement définissable** sur B s'il existe un ensemble B-définissable E' de $\mathbf{C}^{nm}$ tel que E est l'intersection de D avec E'.

La **structure induite** sur D par $\mathbf{C}$ au-dessus de B est l'ensemble D muni des relations définies par toutes les parties relativement définissables sur B.

Nous notons $D_A^{eq} := \{c \in \mathbf{C}^{eq};\ c \in \mathrm{dcl}^{eq}(D \cup A)\}$.

Définition 1.1.8. Une partie X de D_A^{eq} est **algébriquement close dans** D_A^{eq} si $A \subseteq X$ et $X = \mathrm{acl}^{eq}(X) \cap D_A^{eq}$.

On dit que D est **1-basé** si pour toutes parties X et Y de D_A^{eq} algébriquement closes, X et Y sont indépendants (au sens de la déviation) au-dessus de $X \cap Y$.

Remarque. La définition donnée ci-dessus utilise l'ensemble de paramètres A qui n'est pas canonique, mais en fait cette définition est indépendante du choix de cet ensemble de paramètres. En particulier si l'on enrichit la structure $\mathbf{C}$ par des constantes, D est 1-basée dans $\mathbf{C}$ si et seulement si D est 1-basée dans la structure enrichie.

Remarque 1.1.9. Il existe une définition équivalente en terme de "base canonique" : D est 1-basé si pour tout $m > 0$, $B \supseteq A$ et $d \in D^m$, la base canonique du type de d sur B est dans la clôture algébrique de d.

1.2 Ensembles minimaux et locale modularité

Nous précisons ici les définitions d'ensembles minimaux, fortement minimaux et faiblement minimaux que nous utiliserons par la suite :

Définition 1.2.1. L'ensemble $\bigwedge$-définissable D est **minimal** si toute partie relativement définissable de D est finie ou cofinie dans D.

Si de plus D est définissable, alors D est dit **fortement minimale**.

Un ensemble définissable est **faiblement minimal** s'il est infini et ne contient que des types de rang U inférieur ou égal à 1.

Remarque. D est minimal si et seulement si pour toute partie $B \supseteq A$, D contient un unique type (complet) sur B non algébrique. En particulier si D est fortement minimal alors D est faiblement minimal. Une structure fortement minimale est une structure de rang de Morley 1 et de degré de Morley 1, c'est-à-dire une structure "irréductible" ou une structure stable "minimale".

Nous pouvons définir une notion d'indépendance sur les structures minimales, qui vérifie les axiomes de Steinitz :

Proposition 1.2.2. *Soit D minimal (ou faiblement minimal). Soit pour toute partie X de D, $\mathrm{cl}(X) := \mathrm{acl}(A \cup X) \cap D$. Alors (D, cl) est une prégéométrie : la relation $a \notin \mathrm{cl}(X)$ pour $a \in D$ et $X \subseteq D$, satisfait les axiomes de Steinitz d'une relation d'indépendance, c'est-à-dire le caractère fini, la transitivité (l'hypothèse D minimal est inutile pour ces deux premiers axiomes) et le lemme de l'échange. Pour une partie X de D nous notons $\dim X$, la dimension de X définie par cette relation d'indépendance. Cette relation d'indépendance correspond en fait à celle définie par la déviation : pour tout $X \subseteq D$, $\dim X = \mathrm{RU}(X)$ et dans le cas où D est fortement minimal (c'est-à-dire D définissable), $\dim X = \mathrm{RM}(X)$.*

Définition 1.2.3. Soit D minimal.

D est **trivial** si pour toute partie X de D, $\mathrm{cl}(X) = \cup_{x \in X} \mathrm{cl}(\{x\})$ (c'est-à-dire toute famille d'éléments deux à deux indépendants est libre).

D est **localement modulaire** si pour toutes parties X et Y de D telles que $X = \mathrm{cl}(X)$, $Y = \mathrm{cl}(Y)$, et $X \cap Y \neq \emptyset$, alors $\dim(X \cup Y) + \dim(X \cap Y) = \dim(X) + \dim(Y)$ (c'est-à-dire X et Y sont indépendants au-dessus de $X \cap Y$).

Le lecteur peut trouver la preuve de la proposition suivante dans ([Bo 97] ou [Pi 96]) :

Proposition 1.2.4. *Soit D minimal. Alors D est localement modulaire si et seulement si D est 1-basé.*

Remarque. Cette proposition n'est pas un corollaire immédiat des définitions 1.1.8 et 1.2.3, car une partie X de D telle que $X = \mathrm{cl}(X)$ n'est pas une partie close de D_A^{eq}.

Voici les exemples classiques de structures fortement minimales :

- exemples triviaux : l'ensemble infini sans structure et l'ensemble des entiers muni du successeur.

- exemples localement modulaires non triviaux : espaces vectoriels, espaces affines sur un corps fixé.
- exemples non localement modulaires : corps algébriquement clos de caractéristique fixée.

B. Zil'ber avait conjecturé que les seuls exemples non triviaux étaient "en gros" ceux cités ci-dessus. E. Hrushovski [Hr 93] et [Hr 92a], a réfuté cette conjecture pour les ensembles non localement modulaires, par contre il a montré qu'un type minimal localement modulaire non trivial est équialgébrique avec le générique d'un groupe minimal [Hr 85].

1.3 Groupes $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissables

Nous supposons les résultats classiques sur les groupes stables connus. En particulier un groupe G $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissable sur A (c'est-à-dire l'ensemble G est $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissable sur A, et le graphe de la loi du groupe G est $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissable sur A ou de manière équivalente relativement définissable sur A) est une intersection de groupes A-définissables.

Nous rappelons que la **composante connexe** G^0 d'un groupe G $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissable est l'intersection des sous-groupes de G d'indice fini relativement définissables. Un groupe $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissable est **connexe** s'il n'a pas de sous-groupe propre d'indice fini et relativement définissable. Les groupes minimaux sont des exemples de groupes connexes.

Les prémices des résultats (1.3.2 et 1.3.6) présentés dans cette section, sont dûs aux travaux de B. Zil'ber sur les structures fortement minimales.

1.3.1 Groupes 1-basés

A. Pillay et E. Hrushovski ont démontré que la structure induite sur un groupe 1-basé est une "structure de module généralisée".

Proposition 1.3.1. *[HP 87] Soit G un groupe stable $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissable sur A et 1-basé. Soient $a \in G$ et $B \supseteq A$. Soit p le type fort de a sur B. Alors p est le type générique d'un translaté $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissable sur $\mathrm{acl}^{eq}(B)$ d'un sous-groupe connexe H de G $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissable sur $\mathrm{acl}^{eq}(A)$. Le groupe H est en fait le stabilisateur dans G de p.*

Les résultats du théorème suivant sont des corollaires de cette proposition :

Théorème 1.3.2. *[HP 87] Soit G un groupe stable $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissable sur A.*

i) G est 1-basé si et seulement si pour tout entier m, toute partie de G^m relativement définissable sur $\mathrm{acl}^{eq}(A)$ est une combinaison booléenne de translatés de sous-groupes de G^m relativement définissables sur $\mathrm{acl}^{eq}(A)$.

ii) Si G est 1-basé et $B \supseteq A$ alors toute partie de G^n relativement définissable sur B est une combinaison booléenne de translatés relativement définissables sur $\mathrm{acl}^{eq}(B)$ de sous-groupes de G^n relativement définissables sur $\mathrm{acl}^{eq}(A)$.

iii) Si G est 1-basé alors G est abélien par fini.

iv) Si G est 1-basé alors tout sous-groupe $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissable connexe de G^n est $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissable sur $\mathrm{acl}^{eq}(A)$.

Remarque 1.3.3. Les structures de modules sont les exemples naturels de structures 1-basées (voir [Zi 84] et [GR 90]).

1.3.2 Groupes minimaux

Un groupe minimal est abélien. E. Hrushovski [Hr 85] a démontré que modulo la clôture algébrique de l'ensemble des paramètres, la structure induite sur un groupe minimal 1-basé est celle d'un espace vectoriel :

Définition - Proposition 1.3.4. Soit G un groupe $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissable sur A et minimal. Supposons $B \supseteq A$. Soit $G_B := G \cap \mathrm{acl}^{eq}(B)$.

i) Un **quasi-endomorphisme** de G définissable sur B est un sous-groupe minimal S de $G \times G$, relativement définissable sur $\mathrm{acl}^{eq}(B)$, dont la projection sur la première coordonnée est G. Le **conoyau** d'un quasi-endomorphisme S est l'ensemble fini $\mathrm{coker}(S) := \{y;\ (0, y) \in S\}$. Nous notons $\mathrm{QsE}_B(G)$ l'ensemble des quasi-endomorphismes de G définissables sur B.

ii) Un **endomorphisme quasi-définissable de** G/G_B est un endomorphisme f de G/G_B, tel qu'il existe une formule $\psi(x, y)$ à paramètres dans $\mathrm{acl}^{eq}(B)$ qui vérifie : pour tout $a,\ b \in G$, $f(a + G_B) = b + G_B$ si et seulement si il existe $c \in a + G_B$ et $d \in b + G_B$ qui satisfont ψ.

iii) Soit $S \in \mathrm{QsE}_B(G)$. Alors $\{(a + G_B, b + G_B);\ (a, b) \in S\}$ est le graphe d'un endomorphisme quasi-définissable f_S de G/G_B. De plus l'application qui à $S \in \mathrm{QsE}_B(G)$ associe f_S est une bijection de l'ensemble des quasi-endomorphismes de G définissables sur B dans l'ensemble des endomorphismes quasi-définissables de G/G_B.

iv) L'anneau des endomorphismes de G/G_B induit une structure de corps sur $\mathrm{QsE}_B(G)$.

Remarque 1.3.5. Si G est de plus 1-basé alors $\mathrm{QsE}_B(G) = \mathrm{QsE}_A(G)$ car tout sous-groupe minimal de $G \times G$ $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissable est $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissable sur $\mathrm{acl}^{eq}(A)$ (1.3.2 iv).

Théorème 1.3.6. *[Hr 85] Soit G un groupe $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissable sur A, minimal et 1-basé. Alors la prégéométrie de G est donnée par la structure de $\mathrm{QsE}_A(G)$-espace vectoriel : pour tous $g, g_1, \dots, g_n \in G$, $g \in \mathrm{acl}(g_1, \dots, g_n)$ si et seulement si il existe $S_1, \dots, S_n \in \mathrm{QsE}_A(G)$ tel que $g + G_A = f_{S_1}(g_1 + G_A) + \ldots + f_{S_n}(g_n + G_A)$.*

Nous terminons cette section par des remarques sur l'orthogonalité.

1.3.3 Orthogonalité et isogénies

Le théorème (1.3.6) montre en particulier qu'un groupe minimal localement modulaire est **modulaire** (définition identique à celle de localement modulaire (1.2.3) sans la condition $X \cap Y \neq \emptyset$).

Voici un résultat utile pour la suite (qui est en fait vrai pour tous les ensembles minimaux modulaires) :

Proposition 1.3.7. *[Pi 96, Corollary 2.5.5] Soient G et H deux groupes minimaux localement modulaires et $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissables sur A. Si G et H sont non orthogonaux alors* *leurs types génériques sur A sont interalgébriques (c'est-à-dire G et H sont non faiblement orthogonaux sur A).*

Regardons maintenant le rapport entre la non orthogonalité et l'isogénie.

Commençons par rappeler la définition d'une isogénie :

Définition. Une **isogénie** est un homomorphisme surjectif d'un groupe sur un autre qui a un noyau fini. On dit que le premier groupe est isogène au second.

Remarque. Il est évident que si un groupe G minimal est définissablement isogène à un autre groupe H minimal alors G et H sont non orthogonaux.

Voici les réciproques :

Lemme 1.3.8. *Soient G et H deux groupes $\bigwedge$-définissables sur A, minimaux et 1-basés. Si G et H sont non orthogonaux alors il existe un sous-groupe fini G' de G et un sous-groupe fini H' de H, définissables sur $\mathrm{acl}^{eq}(A)$ tels que G/G' et H/H' sont définissablement isomorphes sur $\mathrm{acl}^{eq}(A)$. En particulier $\mathrm{QsE}_A(G)$ et $\mathrm{QsE}_A(H)$ sont isomorphes.*

$\triangleright$ Le groupe $G \times H$ est 1-basé.

Soient g et h respectivement génériques dans G et H au-dessus de A et interalgébriques au-dessus de A. Soit p le type fort de (g, h) sur A et K le stabilisateur dans $G \times H$ de p. Par (1.3.1), K est un groupe connexe $\bigwedge$-définissable sur $\mathrm{acl}^{eq}(A)$ et p est le type générique d'un translaté de K. Donc K est minimal. Par ailleurs, K contient (g', h') tel que g' est générique dans G et h' est un générique dans H (il suffit pour cela de choisir g' générique de G au-dessus de $\{g\} \cup A$), donc la projection de K sur G (de même que sur H) est égale à G (à H). Enfin comme K est minimal, $\ker K$ et $\mathrm{coker} K$ sont finis, donc K définit un isomorphisme de $G/\ker K$ dans $H/\mathrm{coker} K$. $\triangleleft$

Corollaire 1.3.9. *Soient G et H deux groupes $\bigwedge$-définissables sur A, minimaux et 1-basés. Supposons $G_A(= G \cap \mathrm{acl}^{eq}(A)) = \{0\}$ et $H_A(= H \cap \mathrm{acl}^{eq}(A)) = \{0\}$. Alors G et H sont non orthogonaux si et seulement si G et H sont définissablement isomorphes sur $\mathrm{acl}^{eq}(A)$.*

Corollaire 1.3.10. *Soient G et H deux groupes $\bigwedge$-définissables sur A, minimaux et 1-basés. Alors G est définissablement isogène à un quotient de H par un sous-groupe fini. Si de plus H est divisible alors G est définissablement isogène à H.*

1.4 Structure induite sur un groupe minimal 1-basé

Le résultat (1.3.6) montre que la structure induite sur un groupe minimal 1-basé est "relativement proche" d'une structure d'espace vectoriel. La difficulté pour décrire la structure induite se situe dans la clôture algébrique de l'ensemble de paramètres de définition. Dans le cas d'un groupe d'exposant non borné, J. Loveys [Lo 90] a montré que la structure induite est presque interdéfinissable avec la structure de module sur l'anneau des endomorphismes définissables. Ce résultat est en partie conséquence du fait que le corps des quasi-endomorphismes d'un groupe d'exposant non borné est un corps de fractions de l'anneau des endomorphismes :

Lemme 1.4.1. *Soit G un groupe minimal $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissable sur A d'exposant non borné. Alors l'anneau des quasi-endomorphismes définissables sur B est un corps de fractions de l'anneau des endomorphismes définissables sur B.*

$\triangleright$ Soit S un quasi-endomorphisme définissable sur B non nul. Soit m le cardinal de $\mathrm{coker}(S)$. Alors m est un entier strictement positif et $S' := \{(x, mx);\ x \in G\}$ est le graphe d'un endomorphisme non nul de G définissable sur B et tel que $S' \circ S$ est un endomorphisme de G. $\triangleleft$

Théorème 1.4.2. *[Lo 90] Soit une structure G de groupe abélien faiblement minimal d'exposant non borné. Soient R l'anneau des endomorphismes de G définissables sur $\mathrm{acl}^{eq}(\emptyset)$ et $G_0 := G \cap \mathrm{acl}(\emptyset)$. Soit G' la structure $(G, +, r, c;\ r \in R,\ c \in G_0)$. Si G est 1-basé alors la structure G est presque $\emptyset$-interdéfinissable avec la structure G'.*

Une preuve identique à celle du théorème précédent donne le résultat analogue pour les groupes minimaux d'exposant non borné :

Théorème 1.4.3. *Soit G un groupe minimal d'exposant non borné $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissable sur A dans $\mathbf{C}$. Soient R l'anneau des endomorphismes de G $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissables sur $\mathrm{acl}^{eq}(A)$ dans $\mathbf{C}$ et $G_A := G \cap \mathrm{acl}(A)$. Soit G' la structure $(G, +, r, c;\ r \in R,\ c \in G_A)$. Si G est 1-basé alors la structure induite sur G par $\mathbf{C}$ au-dessus de $\mathrm{acl}^{eq}(A)$ est presque $\emptyset$-interdéfinissable avec la structure G'.*

Par contre dans le cas d'un groupe d'exposant borné, les travaux de E. Hrushovski et J. Loveys [HL] montrent que la description de la structure induite est complexe. Leur contre-exemple qui suit, illustre le fait que la structure induite d'un tel groupe n'est pas nécessairement donnée par la loi de groupe et les quasi-endomorphismes :

Exemple 1.4.4. [HL] Soit V un espace vectoriel infini sur le corps $\mathbb{F}_8$. Soit $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ une base de $\mathbb{F}_8$ sur $\mathbb{F}_2$. Soient a et b dans V indépendants sur $\mathbb{F}_8$ et soit H le sous-groupe de V engendré par a, b et $\alpha a + \alpha^2 b$.

Soit G le groupe quotient V/H muni de la structure induite par V. Alors G est fortement minimal et 1-basé. Les graphes des endomorphismes α et α^2 deviennent des quasi-endomorphismes de G. Les conoyaux de ces quasi-endomorphismes sont de cardinalité 8. La relation ternaire P sur G induite par la formule $(y = \alpha x \wedge z = \alpha^2 x)$ de V n'est pas définissable à partir de l'addition et des quasi-endomorphismes de G. Ceci vient principalement de la remarque suivante : pour tout $u \in V$, il existe 64 triplets $(u+H, v+H, w+H)$ tels que $(u+H, v+H)$ est dans le graphe de α et $(u+H, w+H)$ dans le graphe de α^2, alors qu'il y a seulement 8 triplets qui sont dans P.

D'autre part le corps des quasi-endomorphismes d'un groupe d'exposant borné n'est pas nécessairement un corps de fractions de l'anneau des endomorphismes, contrairement au cas précédent (1.4.1). Dans le troisième chapitre de cette thèse nous étudions les sous-groupes minimaux du groupe additif d'un corps séparablement clos de caractéristique finie. Ce sont des groupes d'exposant borné. Nous montrons qu'il existe parmi ceux-ci un groupe localement modulaire dont le corps des quasi-endomorphismes définissables est infini alors que son anneau d'endomorphismes définissables est fini

(3.5.16). La structure induite sur ce groupe est par conséquent "éloignée" de sa structure de module sur son anneau d'endomorphismes.

1.5 Finie axiomatisabilité

Nous rappelons que l'existence d'une structure fortement minimale finiment axiomatisée est une question ouverte. Par contre il existe des exemples $\aleph_1$-catégorique et même de rang de Morley 2 finiment axiomatisés, dûs à M.G. Peretyatkin [Pe 80, Pe 91], puis à E.R. Baisalov [Ba 91]. Ces exemples ont tous une géométrie triviale.

Commençons par préciser la définition de la finie axiomatisabilité :

Définition 1.5.1. Une structure $(M, \mathcal{L})$ est **finiment axiomatisable** si il existe une partie finie $\mathcal{L}_0$ de $\mathcal{L}$ telle que les structures $(M, \mathcal{L}_0)$ et $(M, \mathcal{L})$ sont $\emptyset$-interdéfinissables et telle que la structure $(M, \mathcal{L}_0)$ est axiomatisée par un unique axiome.

Remarque. Si $\mathcal{L}$ est fini, une structure $(M, \mathcal{L})$ finiment axiomatisable est finiment axiomatisée.

Pour E une relation d'équivalence $\emptyset$-définissable sur M^n, nous notons M_E la structure à deux sortes $(M, M^n/E;\ \mathcal{L}, f_E)$ extraite de la structure M^{eq}.

Lemme 1.5.2. *Soit M une $\mathcal{L}$-structure et E une relation d'équivalence $\emptyset$-définissable dans M. La structure M est finiment axiomatisable si et seulement si la structure M_E l'est.*

$\triangleright$ La structure M_E est axiomatisée par n'importe quelle axiomatisation de M à laquelle l'on ajoute l'axiome ϕ : "f_E est une application surjective de M^n dans M^n/E et $f_E(x) = f_E(y)$ si et seulement si $E(x, y)$".

Si M ou M_E est finiment axiomatisable, on peut supposer $\mathcal{L}$ fini.

Si M est finiment axiomatisée, M_E l'est aussi car il suffit d'ajouter l'axiome ϕ.

Réciproquement si M_E est finiment axiomatisée, par compacité M_E est axiomatisée par un énoncé θ de la théorie de M et ϕ. On peut supposer que θ implique que E est une relation d'équivalence. Ainsi si N est un modèle de θ alors N_E est élémentairement équivalente à M_E et donc N est élémentairement équivalente à M. Par conséquent M est axiomatisée par θ. $\triangleleft$

Lemme 1.5.3. *Soit M une $\mathcal{L}$-structure et $a \in M$ algébrique (ou simplement tel que le type de a est isolé). Alors la structure $(M, \mathcal{L})$ est finiment axiomatisable si et seulement si la structure $(M, \mathcal{L}, a)$ l'est.*

$\triangleright$ On peut à nouveau supposer $\mathcal{L}$ fini.

Pour l'implication, il suffit de remarquer que $(M, \mathcal{L}, a)$ est axiomatisée par une axiomatisation de $(M, \mathcal{L})$ à laquelle l'on ajoute l'axiome $\phi(a)$ où ϕ isole le type de a dans M. Pour la réciproque il n'y a en fait pas besoin d'hypothèse sur le type de a. En effet si $(M, \mathcal{L}, a)$ est finiment axiomatisée, il y a une formule $\phi(a)$ dans $\mathcal{L}(a)$ qui l'axiomatise. Ainsi $(M, \mathcal{L})$ est axiomatisée par la formule $\exists x \phi(x)$. $\triangleleft$

Proposition 1.5.4. *Soit M muni d'une $\mathcal{L}$-structure et d'une $\mathcal{L}'$-structure telle que les structures $(M, \mathcal{L})$ et $(M, \mathcal{L}')$ sont presque $\emptyset$-interdéfinissables . Si la structure $(M, \mathcal{L})$ est finiment axiomatisable alors il existe une partie finie $\mathcal{L}'_0$ de $\mathcal{L}'$ telle que la structure $(M, \mathcal{L}'_0)$ est finiment axiomatisée et telle que les structures $(M, \mathcal{L})$ et $(M, \mathcal{L}'_0)$ sont encore presque $\emptyset$-interdéfinissables.*

$\triangleright$ Nous pouvons supposer $\mathcal{L}$ fini et donc M finiment axiomatisée. Il existe une partie finie $\mathcal{L}'_0$ de $\mathcal{L}'$ telle que les structures $(M, \mathcal{L})$ et $(M, \mathcal{L}'_0)$ sont presque $\emptyset$-définissables : il suffit pour cela de considérer l'ensemble fini de formules de $\mathcal{L}'^{eq}$ et de paramètres de $\mathrm{acl}^{eq}_{\mathcal{L}'}(\emptyset)$ qui permettent de définir $\mathcal{L}$ et de choisir une partie finie $\mathcal{L}'_0$ telle que cet ensemble fini est inclus dans ${\mathcal{L}'_0}^{eq} \cup \mathrm{acl}^{eq}_{\mathcal{L}'_0}(\emptyset)$.

Nous allons alors montrer que $(M, \mathcal{L}'_0)$ est finiment axiomatisée. Chaque élément de $\mathcal{L}'_0$ est $acl^{eq}_{\mathcal{L}}(\emptyset)$-définissable dans la structure $(M, \mathcal{L})$. Comme $\mathcal{L}'_0$ est fini, il existe $\bar{a} \in \mathrm{acl}^{eq}_{\mathcal{L}}(\emptyset)$ et $E_1, \ldots, E_m$ des relations d'équivalence $\emptyset$-définissables dans $(M, \mathcal{L})$, tels que chaque élément de $\mathcal{L}'_0$ est $\emptyset$-définissable dans la structure

$$N := (M, M^{n_1}/E_1, \ldots, M^{n_m}/E_m, \mathcal{L}, f_{E_1}, \ldots, f_{E_m}, \bar{a}).$$

Nous pouvons supposer de plus que $\bar{a}$ est algébrique dans la structure

$$(M, M^{n_1}/E_1, \ldots, M^{n_m}/E_m, \mathcal{L}, f_{E_1}, \ldots, f_{E_m}).$$

Ainsi par (1.5.2 et 1.5.3) N est finiment axiomatisée car M l'est.

D'autre part les éléments de $\mathcal{L}$ sont $acl^{eq}_{\mathcal{L}'_0}(\emptyset)$-définissables dans $(M, \mathcal{L}'_0)$ donc il existe de même $\bar{b} \in \mathrm{acl}^{eq}_{\mathcal{L}'_0}(\emptyset)$ et $E'_1, \ldots, E'_{m'}$ des relations d'équivalence $\emptyset$-définissables dans $(M, \mathcal{L}'_0)$, tels que chaque élément de $\mathcal{L}$ est $\emptyset$-définissable dans la structure

$$N' := (M, M^{n'_1}/E'_1, \ldots, M^{n'_{m'}}/E'_{m'}, \mathcal{L}'_0, f_{E'_1}, \ldots, f_{E'_{m'}}, \bar{b}).$$

Nous pouvons supposer aussi que $\bar{b}$ est algébrique dans la structure

$$(M, M^{n'_1}/E'_1, \ldots, M^{n'_{m'}}/E'_{m'}, \mathcal{L}'_0, f_{E'_1}, \ldots, f_{E'_{m'}}).$$

Le langage $\mathcal{L}'_0$ est $\emptyset$-définissable dans N, donc par (1.5.2 et 1.5.3) la structure

$$P := (N, M^{n'_1}/E'_1, \ldots, M^{n'_{m'}}/E'_{m'}, f_{E'_1}, \ldots, f_{E'_{m'}}, \bar{b}).$$

est finiment axiomatisée. Soit

$$P' := (N', M^{n_1}/E_1, \ldots, M^{n_m}/E_m, f_{E_1}, \ldots, f_{E_m}, \bar{a}).$$

Les structures P et P' sont $\emptyset$-interdéfinissables. Toujours par (1.5.2 et 1.5.3), comme la structure P' est finiment axiomatisée, la structure N' est finiment axiomatisée et donc la structure $(M, \mathcal{L}'_0)$ est finiment axiomatisée. $\triangleleft$

E. Hrushovski [Hr 94] a démontré que toute structure $\aleph_1$-catégorique finiment axiomatisable est localement modulaire. Cette preuve est constituée des deux propositions qui suivent : nous rappelons que $\mathbf{C}$ est une structure stable saturée et que A et B sont deux parties de $\mathbf{C}$ "petites".

Définition. 1. On dit que B est **finiment engendré au-dessus de** A si il existe B_0 fini tel que $B = \mathrm{dcl}(A \cup B_0)$. On dit que B est **normal sur** A si il est globalement invariant par les automorphismes de $\mathbf{C}$ fixant A.

2. Si B est finiment engendré au-dessus de A et normal sur A, on note alors $\mathrm{Aut}(B/A)$ l'ensemble des automorphismes de B induits par ceux de $\mathbf{C}$ fixant A.

3. Un groupe fini simple G est **associé à** $\mathbf{C}$ si il existe $A, B \subset \mathbf{C}$ tel que B est finiment engendré sur A et normal sur A et tel que G est un facteur de composition de $\mathrm{Aut}(B/A)$.

4. G est **fortement associé à C** si A contient une sous-structure élémentaire de $\mathbf{C}$.

Proposition 1.5.5. *[Hr 94] Une structure M $\aleph_1$-catégorique finiment axiomatisable a un nombre fini de groupes finis simples associés à une (toute) extension élémentaire saturée de M.*

Proposition 1.5.6. *[Hr 94] Une structure M $\aleph_1$-catégorique non localement modulaire a une infinité de groupes finis non abéliens simples fortement associés à une extension élémentaire saturée de M.*

Nous démontrons maintenant deux corollaires du résultat de J. Loveys (1.4.2) :

Corollaire 1.5.7. *S'il existe un groupe G abélien faiblement minimal 1-basé d'exposant non borné finiment axiomatisable alors G a une structure de module finiment axiomatisable.*

$\triangleright$ G est presque $\emptyset$-interdéfinissable avec la structure $(G, +, 0, r, c;\ r \in R, c \in G_0)$ (1.4.2). Donc il existe $R' \subset R$ fini et $G_0' \subset G_0$ fini tel que $(G, +, 0, r, c;\ r \in R', c \in G_0')$ est finiment axiomatisable (1.5.4). On en déduit que $(G, +, 0, r;\ r \in R')$ est finiment axiomatisable. $\triangleleft$

Corollaire 1.5.8. *Soit G un groupe fortement minimal d'exposant non borné finiment axiomatisable et saturé. Alors G a une structure de module fortement minimale finiment axiomatisable et pour seulement un nombre fini de nombres premiers p, G contient un élément d'ordre p : c'est-à-dire il existe $p_1, \ldots, p_l$ des nombres premiers et $m_1, \ldots, m_l$ des entiers tels que $(G, +)$ est isomorphe à*

$$\kappa\, \mathbb{Q} \otimes m_1 \mathbb{Z}_{p_1^\infty} \otimes \ldots \otimes m_l \mathbb{Z}_{p_l^\infty}$$

où κ est le cardinal de G et où les groupes de Prüfer $\mathbb{Z}_{p_1^\infty}$,..., $\mathbb{Z}_{p_l^\infty}$ sont les limites directes des groupes $\mathbb{Z}/p_1^m\mathbb{Z}$,..., $\mathbb{Z}/p_l^m\mathbb{Z}$.

$\triangleright$ Comme G est finiment axiomatisable, G est localement modulaire [Hr 94]. De plus la presque-interdéfinissabilité conserve la forte minimalité. Donc il existe par le corollaire précédent un anneau d'endomorphismes R de $(G,+)$ finiment engendré tel que G est un R-module fortement minimal finiment axiomatisable.

Par le résultat de J. Reineke [Re 75] sur les groupes fortement minimaux, $(G,+)$ est isomorphe à

$$\kappa\,\mathbb{Q} \oplus \bigoplus_p m_p \mathbb{Z}_{p^\infty}.$$

Soit p un nombre premier tel que $m_p > 0$. Nous montrons qu'alors $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un groupe associé au R-module G : soit $G_p := \{x \in G;\ p^2 \cdot x = 0\}$. $(G_p,+)$ est isomorphe à $m_p(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ et est normal sur $\emptyset$. D'autre part si n est un entier premier à p, σ_n la multiplication par n sur G_p définit un isomorphisme partiel de G_p dans la structure de R-module G. Par saturation cet automorphisme se prolonge à G.

Le sous-groupe $\{\sigma_n;\ n \wedge p = 1\}$ de $\mathrm{Aut}(G_p)$ est isomorphe à $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ et est un sous-groupe normal de $\mathrm{Aut}(G_p)$. Donc $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, qui est un facteur de composition de $Aut(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$, est un facteur de composition de $Aut(G_p)$. Ainsi $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un groupe associé à G, mais G n'en a qu'un nombre fini (1.5.5). $\triangleleft$

Terminons en rappelant les deux conjectures sur l'existence d'ensembles minimaux finiment axiomatisés. Dans le cas trivial :

Conjecture A. L'existence d'une structure fortement minimale triviale finiment axiomatisée implique l'existence d'un groupe G infini de présentation finie et possédant un nombre fini de classes de conjugaisons $C_1, \ldots, C_k$ telles que pour tout élément de $g \in G$, il existe $m > 0$ tel que g^m est dans l'un des C_i.

Nous renvoyons le lecteur à la section 2.6 pour les énoncés des travaux de A.A. Ivanov sur le sujet.

La seconde conjecture est due à E. Hrushovski et concerne le cas non trivial. A une structure M $\aleph_1$-catégorique localement modulaire non triviale, il est associé un groupe G minimal 1-basé.

Conjecture B. [Hr 94] Si M est finiment axiomatisée alors le corps $\mathrm{QsE}(G)$ des quasi-endomorphismes de G, est finiment présenté en tant qu'anneau.

Les réciproques de ces conjectures sont évidentes : dans le cas trivial, le graphe de Cayley d'un groupe vérifiant les propriétés de la première conjecture est fortement minimal et finiment axiomatisé. Dans le cas non trivial, la théorie d'espace vectoriel sur un corps infini finiment présenté en tant qu'anneau est fortement minimale et finiment axiomatisable. Mais évidemment l'existence de tels groupes et de tels corps est une question ouverte.