Chapitre 2

Ensembles minimaux triviaux et groupes d'automorphismes

Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions les groupes d'automorphismes des structures fortement minimales triviales.

Après un bref rappel sur la topologie définie sur ces groupes, nous commençons, dans la seconde section, par l'étude des structures fortement minimales à valence bornée. Nous donnons plusieurs définitions équivalentes de cette notion et terminons cette section par une caractérisation en terme de groupe d'automorphismes (2.2.19 et 2.2.20).

Auparavant, nous donnons un langage "canonique" minimal des structures fortement minimales triviales non nécessairement à valence bornée (2.2.14). Ce langage nous permet de donner une construction générale pour enrichir des structures fortement minimales à valence bornée en des structures fortement minimales triviales qui ne sont plus à valence bornée (2.2.17).

Nous donnons des exemples de tels enrichissements dans la troisième section.

Dans le cas d'une structure fortement minimale à valence bornée, l'étude précédente montre que le groupe des automorphismes est donné par le groupe des automorphismes de la clôture algébrique du vide et le groupe des automorphismes d'une composante non algébrique.

A toute structure fortement minimale, on associe G le groupe des automorphismes d'une composante non algébrique, G' le sous-groupe des automorphismes forts de cette composante et H le sous-groupe fixant un point de cette composante. Dans la quatrième section, nous donnons les conditions topologiques nécessaires et suffisantes pour qu'un triplet (G, G', H) corresponde à une structure fortement minimale triviale (2.4.3 et 2.4.4). De plus, nous prouvons qu'une structure fortement minimale triviale dont la clôture algébrique du vide est vide peut être reconstruite à partir de son triplet (G, G', H) (2.4.6).

Ensuite, nous remarquons d'une part, que l'unimodularité d'une structure fortement minimale triviale est équivalente à l'unimodularité du groupe localement modulaire G

(2.4.9) et nous montrons, d'autre part, que la propriété du petit indice se voit sur le groupe des automorphismes de la clôture algébrique d'un point non algébrique, quand la structure est à valence bornée ou a un langage fini (2.4.13 et 2.4.14).

Dans la cinquième section, nous nous intéressons uniquement au groupe H, fixateur d'un point non algébrique. Nous montrons que pour tout groupe profini K, il existe une structure fortement minimale à valence bornée unimodulaire dont le groupe H est homéomorphe à K (2.5.6). Nous en déduisons que la propriété d'unimodularité ne se voit pas sur le groupe H.

Dans la dernière section, en utilisant les résultats d'A. Ivanov, nous montrons que toute structure fortement minimale triviale finiment axiomatisée est unimodulaire (2.6.5). D'autre part, nous montrons que l'existence d'une structure fortement minimale triviale finiment axiomatisée implique l'existence d'une structure fortement minimale triviale finiment axiomatisée et à valence bornée dont le groupe H est infini (2.6.7). Le groupe d'automorphismes d'une composante non algébrique d'une structure fortement minimale à valence bornée finiment axiomatisée ne satisfait donc pas nécessairement les propriétés de la conjecture A.

2.1 Topologie et notations

On ne considérera sauf précision que des structures infinies.

Soit M une structure. Nous notons S_M le groupe des permutations de l'ensemble M. Nous munissons S_M de la topologie donnée par le système de voisinages ouverts de l'identité suivant : l'ensemble des sous-groupes des permutations fixant $\bar{d}$ pour $\bar{d}$ parcourant les uples finis dans M.

Nous notons $\mathrm{Aut}(M)$ le groupe des automorphismes de M. Alors $\mathrm{Aut}(M)$ est un sous-groupe fermé de S_M. Nous choisissons de faire agir $\mathrm{Aut}(M)$ à gauche sur M : si $g \in \mathrm{Aut}(M)$ et $\bar{a} \in M$, nous notons $g(\bar{a})$ ou $g\bar{a}$ l'image de $\bar{a}$ par g.

Pour une partie A de M, nous notons $\mathrm{Aut}_A(M)$ (ou $\mathrm{Fix}(A)$ s'il n'y a pas d'ambiguité) le sous-groupe des automorphismes de M fixant point par point A. Par définition, l'ensemble des sous-groupes $\mathrm{Aut}_{\bar{a}}(M)$ pour $\bar{a}$ parcourant les uples finis de M, est un système de voisinages ouverts de l'identité.

Si A est une partie de M, nous notons $\mathrm{Aut}(A)$ le groupe des automorphismes de la structure induite sur A par M. Si M est saturée et si $|A| < |M|$, alors $\mathrm{Aut}(A)$ est le sous-groupe topologique des permutations de A se prolongeant en un automorphisme de M. Dans le cas particulier d'une structure fortement minimale, sans hypothèse de saturation, le groupe $\mathrm{Aut}(A)$ est toujours le sous-groupe topologique des permutations de A se prolongeant en un automorphisme de M.

Nous avons défini les types forts et les automorphismes forts dans le cadre de la stabilité (1.1.2). Dans ce chapitre nous restons dans ce cadre car nous considérons des structures fortement minimales.

Nous notons $\mathrm{Autf}(M)$ le sous-groupe des automorphismes forts de M. Par définition un automorphisme est fort s'il fixe globalement chacune des classes des relations d'équivalence finies $\emptyset$-définissables (1.1.4 et 1.1.5). Donc $\mathrm{Autf}(M)$ est un sous-groupe normal fermé de $\mathrm{Aut}(M)$. Pour A une partie de M, nous notons $\mathrm{Autf}(A)$ le sous-groupe des automorphismes de A fixant les types forts.

Nous notons $\mathrm{Gal}(M) = \mathrm{Aut}(M)/\mathrm{Autf}(M)$ le groupe de Galois de M. Si M est saturée, $\mathrm{Gal}(M) \simeq \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}^{eq}(\emptyset))$. Si M n'est pas saturée, $\mathrm{Gal}(M)$ peut-être un sous-groupe propre de $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}^{eq}(\emptyset))$, mais ce n'est jamais le cas dans une structure fortement minimale. On munit le groupe $\mathrm{Gal}(M)$ de la topologie du groupe $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}^{eq}(\emptyset))$. Pour plus d'informations concernant le groupe de Galois, on peut consulter par exemple les articles [La 82] et [La 91].

Pour une partie A de M, nous notons $\mathrm{Autf}_A(M)$ le groupe des automorphismes A-forts (c'est-à-dire les automorphismes que fixent globalement chacune des classes des relations d'équivalence finies A-définissables). Alors $\mathrm{Autf}_A(M)$ est un sous-groupe normal fermé de $\mathrm{Aut}_A(M)$ et nous notons $\mathrm{Gal}_A(M)$ le groupe quotient $\mathrm{Aut}_A(M)/\mathrm{Autf}_A(M)$. Si M est saturée, $\mathrm{Gal}_A(M) \simeq \mathrm{Aut}_A(\mathrm{acl}^{eq}(A))$.

2.2 Structures à valence bornée

Dans cette section nous caractérisons les structures fortement minimales dites libres (c'est-à-dire ayant un groupe d'automorphismes le plus libre possible). Nous montrons (2.2.19 et 2.2.20) que ces structures sont celles à valence bornée, notion utilisée par A.A. Ivanov dans ses travaux concernant les structures fortement minimales triviales finiment axiomatisées. A.A. Ivanov a montré que toute structure fortement minimale triviale sur un langage fini qui a une clôture algébrique du vide infinie, a un enrichissement par un nombre fini de constantes qui est à valence bornée [Iv 93]. En particulier c'est le cas de toutes les structures fortement minimales triviales non $\aleph_0$-catégoriques car dans une telle structure la clôture algébrique d'un élément non algébrique est infinie. Nous redémontrons ce résultat pour toute structure fortement minimale triviale sur un langage fini sans hypothèse sur la clôture algébrique du vide (2.2.15). Auparavant nous montrons que toute structure fortement minimale triviale est à valence bornée si et seulement si tout type d'uple ne contenant pas d'élément algébrique est stationnaire (2.2.8) et nous donnons un langage "canonique" minimal d'une structure fortement minimale triviale (2.2.14).

2.2.1 Structures à valence bornée et structures libres

Nous montrons qu'une structure est à valence bornée si et seulement si ses types sont déterminés par les types induits dans chaque composante (2.2.7).

Nous remarquons aussi qu'une structure M fortement minimale triviale est entre deux structures fortement minimales à valence bornée : un simple enrichissement de M par des constantes est à valence bornée (2.2.9) et une structure réduite de M, la structure réduite aux formules à valence bornée, est évidemment à valence bornée et a le même groupe d'automorphismes d'une composante non algébrique (2.2.10).

Nous donnons ensuite des constructions générales qui nous permettrons d'obtenir des structures fortement minimales à valence bornée (2.2.12) et des enrichissement de telles structures qui ne seront plus à valence bornée (2.2.17).

Définition. Soit M une structure. Pour tout $a \in M$ et $A \subset M$ nous notons $\mathrm{iacl}(a)$ l'ensemble des éléments interalgébriques avec a, et $\mathrm{iacl}(A)$ l'ensemble des éléments interalgébriques avec un élément de A ($\mathrm{iacl}(A) = \cup_{a \in A} \mathrm{iacl}(a)$).

La relation d'interalgébricité est une relation d'équivalence donc M est réunion disjointe de $\mathrm{iacl}(a_i)$ (ses **composantes** interalgébriques).

M est **réduite à une composante** si $M = \mathrm{iacl}(a)$ avec a non algébrique. En particulier dans ce cas $\mathrm{acl}(\emptyset) = \emptyset$.

M est **libre** (ou ses composantes sont indépendantes) si pour toute extension élémentaire N de M et tout uple $\bar{a} = (\bar{a}_i)_{i \in I}$ (éventuellement infini) tel que les $\bar{a}_i$ sont dans des composantes distinctes alors le type de $\bar{a}$ est déterminé par les types des $\bar{a}_i$. Remarquons qu'une structure libre le reste si l'on ajoute des constantes au langage.

Remarque. Soit M une structure fortement minimale triviale.

- Une composante de M est soit la composante algébrique $\mathrm{acl}(\emptyset)$, soit une composante non algébrique $\mathrm{acl}(a) \setminus \mathrm{acl}(\emptyset)$ pour $a \in M \setminus \mathrm{acl}(\emptyset)$.
- Ses composantes non algébriques sont isomorphes.
- Si $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont dans deux composantes distinctes alors $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont indépendants.
- M est $\aleph_0$-catégorique si et seulement si ses composantes sont finies.

Remarque. Si M est une structure fortement minimale libre alors M est triviale.

$\triangleright$ On se place dans une extension élémentaire N saturée. Soient $a_1 \dots a_n$ et a des éléments de N tels que pour tout i, $a \notin \mathrm{acl}(a_i)$. Soit $b \in N$ tel que pour tout i, $b \notin \mathrm{acl}(a_i)$. Alors $\mathrm{tp}(ba_1 \dots a_n) = \mathrm{tp}(aa_1 \dots a_n)$. Donc $a \notin \mathrm{acl}(a_1 \dots a_n)$. $\triangleleft$

Remarque 2.2.1. Soit M une structure fortement minimale triviale. Soient $(\bar{a}_i)_{i \in I}$ et $(\bar{b}_i)_{i \in I}$ deux familles d'uples d'éléments interalgébriques telles que pour tout $i \neq j$, $\bar{a}_i$ et $\bar{a}_j$ sont dans des composantes distinctes (de même pour $\bar{b}_i$ et $\bar{b}_j$).

i) Si pour tout $i \in I$, les uples $\bar{a}_i$ et $\bar{b}_i$ ont même type fort alors $(\bar{a}_i)_{i \in I}$ et $(\bar{b}_i)_{i \in I}$ ont même type fort.

ii) Si pour tout $i \in I$, le type de $\bar{a}_i$ est stationnaire alors le type de $(\bar{a}_i)_{i \in I}$ est stationnaire.

$\triangleright$ ii) est un corollaire immédiat de i) et i) se montre simplement en utilisant le fait que dans une structure fortement minimale triviale des éléments deux à deux indépendants sont indépendants. $\triangleleft$

Définition. Soit M une structure.

- Une relation R est **à valence bornée** dans M si R est $\emptyset$-définissable dans M et s'il existe un entier m tel que pour tout $a \in M$, il y a au plus m uples réalisant R et contenant a. Une relation à valence bornée n'est satisfaite que par des uples d'éléments interalgébriques et réciproquement un uple d'éléments interalgébriques dans M réalise une relation à valence bornée.

- Pour une L-structure M, on note $\mathbf{L_{Vb}}$ le langage constitué des relations à valence bornée dans M.

- M est **à valence bornée** si M est $\emptyset$-interdéfinissable avec une structure dont le langage est constitué de relations à valence bornée. Donc M est à valence bornée si M est $\emptyset$-interdéfinissable avec sa structure réduite à L_{Vb}. Dans ce cas on considérera M dans son langage à valence bornée, L_{Vb}.

Remarque. Toute relation unaire est à valence bornée et donc toute structure dont le langage est constitué de relations unaires est à valence bornée.

Remarque 2.2.2. Soit $\bar{a}$ un uple d'éléments interalgébriques dans une structure. Alors le type de $\bar{a}$ est déterminé par son type atomique restreint aux relations à valence bornée (c'est-à-dire l'ensemble des relations à valence bornée réalisées par $\bar{a}$, c'est-à-dire le type atomique de $\bar{a}$ dans le langage L_{Vb}). En particulier un automorphisme dans le langage L_{Vb} agit par permutation sur les composantes interalgébriques.

$\triangleright$ On peut supposer $\bar{a}$ fini. Il existe $R(\bar{x})$ une relation à valence bornée satisfaite par $\bar{a}$. Pour tout formule $\phi(\bar{x})$, $R(\bar{x}) \wedge \phi(\bar{x})$ reste à valence bornée et donc si $\bar{a}$ satisfait ϕ alors $R(\bar{a}) \wedge \phi(\bar{a})$ appartient au type atomique dans L_{Vb} de $\bar{a}$. $\triangleleft$

Nous commençons par vérifier qu'une structure libre est à valence bornée :

Lemme 2.2.3. *Si M est une structure libre alors M est à valence bornée et a l'élimination des quantificateurs dans le langage L_{Vb}.*

$\triangleright$ On se place dans n'importe quelle extension élémentaire N de M. Soit $\bar{a} = \bar{a}_1 \dots \bar{a}_n$ tel que les $\bar{a}_i$ sont des uples d'éléments interalgébriques de N qui appartiennent à des composantes distinctes. Comme M est libre, le type de $\bar{a}$ est déterminé par les types des $\bar{a}_i$. Par (2.2.2), pour chaque i, le type de $\bar{a}_i$ est déterminé par son type atomique restreint aux relations à valence bornée. Donc le type de $\bar{a}$ est aussi déterminé par son type atomique restreint aux relations à valence bornée. $\triangleleft$

Dans ce qui suit, nous montrons qu'une structure à valence bornée a l'élimination des quantificateurs et est ω-homogène (sans hypothèse de saturation) :

Lemme 2.2.4. *Soit M une structure à valence bornée. Soient $\bar{a}$ et $\bar{b}$ deux uples finis de M ayant même type atomique (c'est-à-dire satisfaisant les mêmes relations à valence bornée). Alors il existe un automorphisme de M envoyant $\bar{a}$ sur $\bar{b}$.*

$\triangleright$ On peut supposer que $\bar{a} = \bar{a}_1 \dots \bar{a}_n$ tels que pour tout i, $\bar{a}_i$ est un uple d'éléments interalgébriques. Évidemment $\bar{b}$ s'écrit alors de la même manière.

Par (2.2.2), pour tout i, $\mathrm{tp}(\bar{a}_i) = \mathrm{tp}(\bar{b}_i)$. Fixons un i. Dans une extension élémentaire de M il existe un automorphisme qui envoie $\bar{a}_i$ sur $\bar{b}_i$. Cet automorphisme induit un isomorphisme partiel de $\mathrm{iacl}(\bar{a}_i)$ sur $\mathrm{iacl}(\bar{b}_i)$.

Soient $A = \mathrm{iacl}(\bar{a})$ et $B = \mathrm{iacl}(\bar{b})$. Soit f l'union des isomorphismes partiels obtenus pour chaque i. Alors f est un isomorphisme partiel de A dans B car M est à valence bornée.

Nous prolongeons f à $A \cup B$ par induction. Remarquons que pour toute composante C de M il existe autant de composantes isomorphes à C dans A que dans B. En particulier si $A \neq B$ il existe une composante C dans B qui n'est pas dans A et alors il existe une composante C' isomorphe à C qui elle est dans A mais pas dans B. Nous prolongeons f à $A \cup C$ par un isomorphisme partiel qui envoie C sur C'. Par une induction finie on obtient un isomorphisme de $A \cup B$ dans $A \cup B$.

Pour obtenir un automorphisme de M il suffit d'étendre cet isomorphisme par l'identité en dehors de $A \cup B$. ◁

Corollaire 2.2.5. *Si une structure M est à valence bornée alors toute formule $\emptyset$-définissable est combinaison booléenne de relations à valence bornée dans M (c'est-à-dire M en tant que L_{Vb}-structure a l'élimination des quantificateurs) et M est ω-homogène.*

Corollaire 2.2.6. *Si M est une structure à valence bornée alors M est libre et pour tout $A \subset M$,* $\mathrm{acl}(A) = \mathrm{acl}(\emptyset) \cup \mathrm{iacl}(A)$. *Si de plus M est fortement minimale alors M est triviale.*

Nous avons donc montré par (2.2.3), (2.2.5) et (2.2.6) :

Proposition 2.2.7. *Une structure est à valence bornée si et seulement si elle est libre, si et seulement si elle a l'élimination des quantificateurs dans L_{Vb}. De plus une structure à valence bornée est ω-homogène.*

Dans le cas des structures fortement minimales triviales, on peut donner une caractérisation des structures à valence bornée en terme de types stationnaires :

Lemme 2.2.8. *Soit M une structure fortement minimale triviale. Alors M est libre si et seulement si tout type sur $\emptyset$ d'uple ne contenant pas d'éléments algébriques est stationnaire. Ce qui est équivalent à ce que tout automorphisme de D est un automorphisme fort de D (c'est-à-dire* $\mathrm{Autf}(D) = \mathrm{Aut}(D)$*) pour une (toute) composante non algébrique D.*

En particulier si $\mathrm{acl}(\emptyset) = \mathrm{dcl}(\emptyset)$ *et* $\mathrm{acl}(\emptyset)$ *est infini, M est libre.*

▷ Par (2.2.1), remarquons que si tout type d'un uple d'une composante non algébrique est stationnaire, alors tout type d'uple ne contenant pas d'élément algébrique est stationnaire.

Supposons M libre. On se place dans une extension élémentaire N saturée. Soient $\bar{a}$ et $\bar{b}$ tels que $\bar{a}$ est d'intersection vide avec $\mathrm{acl}(\emptyset)$, et $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type (sur vide). Comme N est saturée il existe un sous-ensemble infini N' de N algébriquement clos ne contenant ni $\bar{a}$, ni $\bar{b}$ (il suffit de prendre l'union des autres composantes). Alors N' est une sous-structure élémentaire de N et $\bar{a}$ (de même que $\bar{b}$) est indépendant de N'. Comme M est libre, $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type au-dessus de N'. Donc le type de $\bar{a}$ est stationnaire.

Supposons réciproquement que tout type d'uple ne contenant pas d'élément algébrique est stationnaire. Soient $(\bar{a}_i)_{i\in I}$ et $(\bar{b}_i)_{i\in I}$ deux familles d'uples d'éléments dans une extension élémentaire N saturée de M telles que les $\bar{a}_i$ sont dans des composantes distinctes non algébriques (de même pour les $\bar{b}_i$) et telles que pour tout $i \in I$, $\bar{a}_i$ et $\bar{b}_i$ ont même type. Soient de plus $\bar{a}'$, $\bar{b}' \in \mathrm{acl}(\emptyset)$ qui ont même type. Montrons que $\bar{a}'(\bar{a}_i)_{i\in I}$ et $\bar{b}'(\bar{b}_i)_{i\in I}$ ont même type. Par (2.2.1), $(\bar{a}_i)_{i\in I}$ et $(\bar{b}_i)_{i\in I}$ ont même type et ce type est stationnaire. Comme $\bar{a}'$ et $\bar{b}'$ ont même type, il existe un automorphisme f de N qui envoie $\bar{a}'$ sur $\bar{b}'$. Alors $\bar{a}'(\bar{a}_i)_{i\in I}$ a même type que $\bar{b}'f((\bar{a}_i)_{i\in I})$ et par stationnarité, $\bar{b}'f((\bar{a}_i)_{i\in I})$ a même type que $\bar{b}'(\bar{b}_i)_{i\in I}$. ◁

Corollaire 2.2.9. *Soit M une structure fortement minimale triviale et $C \subset M$ infini et algébriquement clos. Alors $M' = (M, c;\ c \in C)$ est à valence bornée.*

▷ Les types dans le langage de M' sont stationnaires car C est une sous-structure élémentaire de M. Donc M' est libre (2.2.8). ◁

Remarque. Le résultat de A.A. Ivanov (concernant l'enrichissement par un nombre fine de constantes dans le cas d'un langage fini), n'est pas un corollaire direct de (2.2.9). Nous retrouvons son résultat plus loin (2.2.15).

Nous venons de remarquer qu'il suffit d'enrichir une structure fortement minimale triviale par des constantes pour qu'elle devienne à valence bornée. Nous remarquons inversement que toute structure fortement minimale est un enrichissement d'une structure fortement minimale à valence bornée telle que le groupe d'automorphismes d'une (de toute) composante non algébrique reste inchangé :

Proposition 2.2.10. *Soit M une structure fortement minimale saturée (non nécessairement triviale), soient $a \in M \setminus \mathrm{acl}(\emptyset)$ et $D = \mathrm{iacl}(a)$. Soit $\tilde{M}$ la structure M réduite aux formules à valence bornée. Alors $\tilde{M}$ est fortement minimale triviale et le groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(D)$ reste inchangé dans $\tilde{M}$.*

▷ La structure $\tilde{M}$ est saturée car M est saturée. Toute partie définissable de $\tilde{M}$ à paramètres dans M est finie ou cofinie car M est fortement minimale. Donc $\tilde{M}$ est fortement minimale. Comme $\tilde{M}$ est à valence bornée, $\tilde{M}$ est triviale. Soient $G = \mathrm{Aut}(D)$ dans M et $\tilde{G} = \mathrm{Aut}(D)$ dans $\tilde{M}$. La structure M est un enrichissement de la structure $\tilde{M}$ donc le groupe G est un fermé du groupe $\tilde{G}$. Pour tout uple fini $\bar{d}$ de D, l'orbite de $\bar{d}$ par $\mathrm{Aut}(M)$ est une partie définissable à valence bornée. Par conséquent tout élément de $\tilde{G}$ est dans l'adhérence de G. Donc $G = \tilde{G}$. ◁

Définition. Une structure M est **transitive** si son groupe d'automorphismes agit transitivement sur M (c'est-à-dire pour tout $a, b \in M$, il existe un automorphisme g de M tel que $g(a) = b$).

Une structure fortement minimale dont la composante algébrique est vide, est transitive. Nous montrons réciproquement qu'une structure transitive à valence bornée est fortement minimale. L'hypothèse de transitivité implique que $\mathrm{acl}(\emptyset)$ est vide. Ce lemme nous donnera un moyen simple de construire des structures fortement minimales triviales libres.

Lemme 2.2.11. *Soit M une structure transitive à valence bornée alors M est fortement minimale (triviale libre) et si D est une composante de M, M est isomorphe à l'union de $\dim(M)$ copies disjointes de D.*

▷ Ici M est une structure transitive donc toutes ses composantes interalgébriques sont isomorphes. Soit $D = \mathrm{iacl}(d)$ une composante. Nous montrons que toute structure élémentairement équivalente à M est isomorphe à une union de copies disjointes de D.

Soit N une structure élémentairement équivalente à M. On peut supposer M et N incluses dans une même extension élémentaire C.

Soit $a \in N$. Par transitivité a et d ont même type et par (2.2.4) il existe un automorphisme de C qui envoie a sur d. Cet automorphisme envoie $\mathrm{iacl}(a)$ sur $D = \mathrm{iacl}(d)$.

On obtient alors un isomorphisme entre N et une union de copies disjointes de D en faisant l'union des isomorphismes correspondant à chaque composante de N. C'est bien un isomorphisme car M est à valence bornée.

Montrons que pour toute partie A de N, $\mathrm{iacl}(A) = \mathrm{acl}(A)$ et qu'il n'y a qu'un seul type non algébrique sur A et donc que M est fortement minimale triviale.

Soient $b \notin \mathrm{iacl}(A)$ et $c \notin \mathrm{iacl}(A)$. Alors il existe un isomorphisme de N fixant $\mathrm{iacl}(A)$ et envoyant b sur c. En effet N est l'union disjointe de $\mathrm{iacl}(A)$ et de composantes B_i avec $B_0 = \mathrm{iacl}(b)$ et aussi l'union disjointe de $\mathrm{iacl}(A)$ et de composantes C_i avec $C_0 = \mathrm{iacl}(c)$. Pour chaque i, on a donc un isomorphisme partiel qui envoie B_i sur C_i et tel que l'isomorphisme correspondant à $i = 0$ envoie b sur c. On obtient un automorphisme de N en le prolongeant par l'identité sur $\mathrm{iacl}(A)$.

La structure M est libre car M est à valence bornée. $\triangleleft$

Remarque. Dans ce lemme, nous pouvons remplacer l'hypothèse de transitivité par les hypothèses $\mathrm{acl}(\emptyset)$ est fini et il y a un unique 1-type au-dessus de $\mathrm{acl}(\emptyset)$ non algébrique dans M : en effet la théorie de M dit alors qu'il y a un unique 1-type non algébrique au-dessus de $\mathrm{acl}(\emptyset)$.

Nous déduisons de ce lemme la proposition suivante :

Proposition 2.2.12. *Soit G un sous-groupe fermé du groupe des permutations d'un ensemble infini D tel que G agit transitivement sur D et pour tout $x \in D$, tout $y \in D$ a un nombre fini de conjugués par le sous-groupe fixant x. On munit D de la structure suivante : pour tout entier n et toute orbite de D^n par G on définit un prédicat que l'on interprète par cette orbite. Alors D est fortement minimale, triviale, libre, réduite à une composante et $G = \mathrm{Aut}(D)$.*

$\triangleright$ La structure D est transitive car $G \subset \mathrm{Aut}(D)$. Les prédicats correspondants aux n-orbites sont à valence bornée, donc D est à valence bornée. Par (2.2.11) D est fortement minimale triviale libre. Par ailleurs tous les éléments de D sont interalgébriques donc D est réduite à une composante.

Montrons que $\mathrm{Aut}(D) = G$. Soit $g \in \mathrm{Aut}(D)$. Alors un système de voisinages ouverts de g est donné par les $\{h \in \mathrm{Aut}(D);\ h(\bar{d}) = g(\bar{d})\}$, pour tous les uples finis $\bar{d}$. Pour un uple donné, $\bar{d}$, puisque g est un automorphisme, $g(\bar{d})$ est dans l'orbite par G de $\bar{d}$. Donc il existe $g' \in G$ tel que $g'(\bar{d}) = g(\bar{d})$ et le groupe $\mathrm{Aut}(D)$ est dans l'adhérence de G qui est fermé par hypothèse. $\triangleleft$

Définition. Soient M une structure et E une relation $\emptyset$-définissable dans M.

- E est une **relation d'équivalence sur uples bornés** dans M s'il existe une relation R à valence bornée dans M telle que $E \subset R \times R$ et telle que E définisse une relation d'équivalence finie (c'est-à-dire avec un nombre fini de classes) sur les uples réalisant R. En particulier $R(\bar{x}) = E(\bar{x}, \bar{x})$.

- On note $\mathbf{L_{VbRe}}$ le langage constitué des relations à valence bornée et des relations d'équivalence sur uples bornés.

- Une relation E d'équivalence sur uples bornés dans M est **e-minimale** si la relation à valence bornée $R(\bar{x}) = E(\bar{x}, \bar{x})$ est fortement minimale dans la structure réduite (M, L_{Vb}) et si E est minimale parmi les relations E' d'équivalence sur uples bornés tel que $E'(\bar{x}, \bar{x}) = R(\bar{x})$.

- On note $\mathbf{L_{VbMin}}$ le langage constitué des relations à valence bornée fortement minimales dans la structure réduite (M, L_{Vb}) et on note $\mathbf{L_{VbReMin}}$ le langage constitué des relations de L_{VbMin} et des relations d'équivalence sur uples bornés e-minimales.

Remarque. Les relations d'équivalence sur uples bornés e-minimales correspondent aux relations d'équivalence introduites par A. Ivanov dans la preuve de [Iv 93, Theorem 1.4]. Ce théorème correspond lui au corollaire 2.2.15 de la proposition 2.2.14 suivante.

Remarque 2.2.13. i) Soient M une structure, R une relation à valence bornée et E une relation telle que $E \subset R \times R$ et telle que E définisse une relation d'équivalence sur les uples réalisant R. Si le sous-groupe des automorphismes de M, préservant globalement chaque classe d'équivalence définie par E, agit transitivement sur M, alors E a un nombre fini de classes d'équivalence et est donc une relation d'équivalence sur uples bornés.

ii) Soient M une structure stable et E une relation d'équivalence sur uples bornés e-minimale alors E sépare les types forts réalisés dans $R(\bar{x}) = E(\bar{x}, \bar{x})$ (c'est-à-dire pour tout $\bar{a}$, $\bar{b}$ dans R, alors $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type fort si et seulement si $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont dans la même E-classe).

iii) Dans une structure M fortement minimale transitive (c'est-à-dire $\mathrm{acl}(\emptyset) = \emptyset$), le groupe des automorphismes forts agit transitivement sur M et fixe globalement chacune des classes de chaque relation d'équivalence sur uples bornés.

iv) Dans une structure fortement minimale, si une classe d'une relation d'équivalence sur uples bornés contient un uple non algébrique, alors cette classe a un représentant dans toute composante non algébrique.

v) Une classe d'une relation d'équivalence sur uples bornés a un représentant dans tout modèle. En particulier dans le cas d'une théorie fortement minimale, cette classe a un représentant dans la clôture algébrique du vide si celle-ci est infinie.

Nous montrons que, sous certaines conditions, une structure fortement minimale triviale a seulement pour langage L_{VbRe} :

Proposition 2.2.14. *Soit M une structure fortement minimale triviale. Deux uples $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type fort s'ils ont même type atomique dans le langage L_{Vb} et si pour chaque relation E d'équivalence sur uples bornés contenant $\bar{a}' \subseteq \bar{a}$ alors $\bar{a}'$ et $\bar{b}'$ (correspondant à $\bar{a}'$ dans $\bar{b}$) sont dans la même E-classe. En particulier un automorphisme fort de M est simplement un automorphisme qui fixe globalement chacune des classes des relations d'équivalence sur uples bornés.*

De plus si $\mathrm{acl}(\emptyset) = \mathrm{dcl}(\emptyset)$ *ou si* $\mathrm{acl}(\emptyset)$ *est infini alors* M *est* $\emptyset$*-interdéfinissable avec sa structure réduite au langage* L_{VbRe}.

Enfin si $\mathrm{acl}(\emptyset) = \emptyset$ *alors* M *est* $\emptyset$*-interdéfinissable avec sa structure réduite au langage* $L_{VbReMin}$ *et la structure* M *réduite à* L_{Vb} *est* $\emptyset$*-interdéfinissable avec la structure* M *réduite au langage* L_{VbMin}.

$\triangleright$ Soient $\bar{a}$ et $\bar{b}$ deux uples finis de M vérifiant les hypothèses. Montrons que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type fort. Par (2.2.1) on peut supposer que $\bar{a}$ est un uple d'éléments interalgébriques. Donc par (2.2.2) $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type. Soit E une relation d'équivalence finie sur les uples de même longueur que $\bar{a}$. Soit R une relation à valence bornée satisfaite par $\bar{a}$ (et donc par $\bar{b}$). Soit $E' = E \cap (R \times R)$. Alors E' est une relation d'équivalence sur uples bornés. Par hypothèse on a $E'(\bar{a}, \bar{b})$, donc $E(\bar{a}, \bar{b})$. Les uples $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont donc dans les mêmes classes de relations d'équivalence finies. Ils ont donc même type fort.

Montrons maintenant que si $\mathrm{acl}(\emptyset) = \mathrm{dcl}(\emptyset)$ ou si $\mathrm{acl}(\emptyset)$ est infini alors M est $\emptyset$-interdéfinissable avec sa structure réduite au langage L_{VbRe}. On se place dans une extension élémentaire N saturée et on considère deux uples finis $\bar{a}$ et $\bar{b}$ qui ont même type dans le langage L_{VbRe}. Nous montrons qu'alors ils ont même type.

Supposons que $\bar{a} = \bar{a}_0\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n$ tel que $\bar{a}_0 \in \mathrm{acl}(\emptyset)$ et tel que les $\bar{a}_i$ sont dans des composantes distinctes. On a alors $\bar{b} = \bar{b}_0\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n$ de la même manière.

Il existe un automorphisme f de la structure réduite N au langage L_{VbRe} qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$.

Supposons $\mathrm{acl}(\emptyset)$ infini. Soit $\tilde{a}_0$ une énumération de $\mathrm{iacl}(\bar{a}_0) = \mathrm{acl}(\emptyset)$ telle que $\bar{a}_0$ est un segment initial de $\tilde{a}_0$. Alors $\bar{b}_0$ est un segment initial de $\tilde{b}_0 := f(\tilde{a}_0)$, et $\tilde{a}_0$ et $\tilde{b}_0$ ont même type dans N (2.2.2). Par un automorphisme de N on peut supposer que $\tilde{a}_0$ et $\tilde{b}_0$ sont égaux et que $\tilde{a}_0\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n$ et $\tilde{a}_0\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n$ ont même type dans le langage L_{VbRe}. Vérifions qu'alors pour tout $i > 0$, $\bar{a}_i$ et $\bar{b}_i$ ont même type fort : en effet pour tout $i > 0$, les uples $\bar{a}_i$ et $\bar{b}_i$ satisfont les mêmes relations à valence bornée. De plus pour $i > 0$, si E est une relation d'équivalence sur uples bornés contenant $\bar{a}_i$ alors $\bar{a}_i$ et $\bar{b}_i$ sont dans la même E-classe car il existe $\bar{d} \in \mathrm{acl}(\emptyset)$ tel que $\bar{d}$ est dans la E-classe de $\bar{a}_i$ (2.2.13 v) et, comme $\tilde{a}_0\bar{a}_i$ et $\tilde{a}_0\bar{b}_i$ ont le même type dans L_{VbRe}, $\bar{b}_i$ et $\bar{d}$ sont dans la même E-classe.

Ainsi $\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n$ et $\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n$ ont même type fort puisque pour tout $i > 0$, $\bar{a}_i$ et $\bar{b}_i$ ont même type fort (2.2.1). Ils ont donc même type sur $\mathrm{acl}(\emptyset)$.

Supposons maintenant que $\mathrm{acl}(\emptyset) = \mathrm{dcl}(\emptyset)$. Dans ce cas nous pouvons oublier $\bar{a}_0$ et $\bar{b}_0$ qui sont nécessairement égaux. Nous faisons le même raisonnement que ci-dessus en utilisant $\bar{a}_1$ au lieu de $\bar{a}_0$: nous commençons par identifier $\mathrm{iacl}(\bar{a}_1)$ et $\mathrm{iacl}(\bar{b}_1)$. Ensuite par (2.2.13 iv) nous montrons que pour tout $i > 0$, $\bar{a}_i$ et $\bar{b}_i$ ont même type fort. Donc $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type.

Supposons enfin que $\mathrm{acl}(\emptyset) = \emptyset$. Montrons que la structure M réduite à L_{VbMin} est $\emptyset$-interdéfinissable avec la structure M réduite à L_{Vb} et a l'élimination des quantificateurs. Soit $\bar{a}$ un uple d'éléments interalgébriques. Alors le type de $\bar{a}$ est isolé par une relation à valence bornée fortement minimale dans (M, L_{Vb}) car $\mathrm{acl}(\emptyset) = \emptyset$. Donc tout type dans le langage L_{Vb} est déterminé par sa restriction à L_{VbMin}. De plus toute relation à valence bornée est une union finie de relations à valence bornée fortement minimales dans (M, L_{Vb}). Vérifions maintenant que la structure M est $\emptyset$-interdéfinissable avec sa structure réduite au langage $L_{VbReMin}$: soit R un relation à valence bornée fortement minimale dans (M, L_{Vb}). Comme $\mathrm{acl}(\emptyset) = \emptyset$, la relation R contient un unique type dans la structure M et donc contient un nombre fini de types forts. Il existe donc une relation E d'équivalence sur uples bornés e-minimale telle que $E(\bar{x}, \bar{x}) = R(\bar{x})$. Cette relation sépare les types forts de R. Pour tout uple $\bar{a}$ d'éléments interalgébriques, il existe donc R isolant le type de $\bar{a}$ et une relation E d'équivalence sur uples bornés e-minimale tel que $E(\bar{x}, \bar{x}) = R(\bar{x})$. Alors pour tout $\bar{b}$, $\bar{b}$ a même type fort que $\bar{a}$ si et seulement si $\bar{b}$ est dans la E-classe de $\bar{a}$. Nous pouvons alors remplacer L_{VbRe} par $L_{VbReMin}$ et L_{Vb} par L_{VbMin} dans le raisonnement précédent du cas $\mathrm{acl}(\emptyset) = \mathrm{dcl}(\emptyset)$. $\lhd$

La proposition 2.2.14 permet de redémontrer, sans hypothèse sur la clôture algébrique du vide, le résultat de A.A. Ivanov [Iv 93, Theorem 1.4] :

Corollaire 2.2.15. *Soit M une structure fortement minimale triviale sur un langage fini. Alors il existe un ensemble fini C de M tel que $(M, c;\ c \in C)$ est à valence bornée. De plus si $\mathrm{acl}(\emptyset)$ est infini, nous pouvons choisir $C \subset \mathrm{acl}(\emptyset)$ et si $\mathrm{acl}(\emptyset)$ est fini, nous pouvons choisir C tel que $\mathrm{acl}(\emptyset) \subseteq C \subseteq \mathrm{acl}(d)$ pour un élément d non algébrique de M.*

$\rhd$ Nous pouvons supposer que $\mathrm{acl}(\emptyset) = \mathrm{dcl}(\emptyset)$ ou que $\mathrm{acl}(\emptyset)$ est infini. En effet si $\mathrm{acl}(\emptyset)$ est fini, il suffit d'ajouter aux constantes du langage les éléments algébriques pour que $\mathrm{acl}(\emptyset) = \mathrm{dcl}(\emptyset)$.

Par (2.2.14) M est alors $\emptyset$-interdéfinissable avec sa structure réduite au langage L_{VbRe}. Comme M a un langage fini, M est $\emptyset$-interdéfinissable avec sa structure réduite à une partie finie $\tilde{L}$ de L_{VbRe}. Soit C une partie finie de M telle que toute classe d'une relation d'équivalence sur uples bornés dans $\tilde{L}$, a un représentant dans C. Par (2.2.13 iv et v) nous pouvons choisir C tel que $C \subseteq \mathrm{acl}(\emptyset)$ si $\mathrm{acl}(\emptyset)$ est infini, ou $C \subseteq \mathrm{acl}(d)$ sinon.

Nous montrons que $M' = (M, c;\ c \in C)$ est à valence bornée. Il suffit pour cela de vérifier que tout uple $\bar{a}$ d'une extension élémentaire N' de M', le type de $\bar{a}$ sur C dans N est déterminé par le type de $\bar{a}$ dans le langage à valence bornée de M'. Soit E une relation d'équivalence sur uples bornés de $\tilde{L}$. Alors il existe $\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n \in C$ représentant toutes les classes de E. Dans M', $E(\bar{x}, \bar{y}) \iff \vee_i(E(\bar{x}, \bar{c}_i) \cap E(\bar{y}, \bar{c}_i))$. De plus les formules $E(\bar{x}, \bar{c}_i)$ sont à valence bornée car $E \subset R \times R$ pour R à valence bornée, et par conséquent $E(\bar{x}, \bar{y})$ est définissable dans le langage à valence bornée de M'. Donc le type de $\bar{a}$ dans le langage à valence bornée de M' détermine celui de $\bar{a}C$ dans le langage $\tilde{L}$ et donc dans la structure M. $\lhd$

Corollaire 2.2.16. *Soit M une structure fortement minimale triviale sur un langage fini. Si $\mathrm{acl}(\emptyset) = \mathrm{dcl}(\emptyset)$ alors il existe un nombre fini de relations d'équivalence sur uples bornés tel qu'un automorphisme est fort dès qu'il fixe globalement chacune des classes de ces relations.*

$\rhd$ Par (2.2.14), il existe un nombre fini $E_1, \ldots, E_n$ de relations d'équivalence sur uples bornés tel que M est $\emptyset$-interdéfinissable avec sa structure réduite au langage

$L_{Vb} \cup \{E_1, \ldots, E_n\}$. Soit f un automorphisme de M fixant globalement chacune des classes des E_i. Soit $\bar{a}$ un uple énumérant une composante de M. Montrons que $f(\bar{a})$ a même type fort que $\bar{a}$. Par (2.2.1) ceci montre que f est un automorphisme fort.

Plaçons nous dans une extension élémentaire saturée N de M. Ou bien $\bar{a}$ et $f(\bar{a})$ énumèrent la même composante et dans ce cas posons g la bijection de N telle que $g(\bar{a}) = f(\bar{a})$ et g égale à l'identité sur $N \setminus \{\bar{a}\}$. Ou bien $\bar{a}$ et $f(\bar{a})$ énumèrent deux composantes distinctes et dans ce cas posons g la bijection de N telle que $g(\bar{a}) = f(\bar{a})$, $g(f(\bar{a})) = \bar{a}$ et g égale à l'identité sur $N \setminus \{\bar{a}, f(\bar{a})\}$. Alors g est un automorphisme de N. En effet g préserve les relations à valence bornée et comme f fixe globalement chacune des classes des E_i, g aussi.

Alors g est un automorphisme fort de N car g fixe $\mathrm{acl}(\emptyset) \cup N \setminus \{\bar{a}, f(\bar{a})\}$ qui est une sous-structure élémentaire de N. Par conséquent, $f(\bar{a})$ et $\bar{a}$ ont même type fort. $\lhd$

Enfin nous montrons une réciproque à (2.2.14) pour terminer cette section. Ce dernier lemme nous permettra d'obtenir des structures fortement minimales triviales non libres (c'est-à-dire non à valence bornée).

Lemme 2.2.17. *Soit M une structure à valence bornée. Soit M' un enrichissement de M par des relations $(E_j)_{j\in J}$ tel que pour tout $j \in J$ il existe une relation à valence bornée R_j dans M telle que $E_j \subset R_j \times R_j$ et E_j définit une relation d'équivalence sur les uples réalisant R_j. Soit G' le sous-groupe des automorphismes de M' fixant globalement chaque classe d'équivalence. Supposons que G' agit transitivement sur M'.*

Alors M' est fortement minimale triviale et toute structure N' élémentairement équivalente à M' est isomorphe à l'union de $\dim(N')$ copies disjointes d'une composante D' (où l'on recolle les classes d'équivalence : c'est-à- dire si $\bar{a}_1$ et $\bar{a}_2$ sont deux copies d'un même uple $\bar{a}$ dans D' et si $\bar{a}$ satisfait R_j alors on pose $E_j(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$).

Enfin $G' = \mathrm{Autf}(M')$ et si G' est un sous-groupe propre de $\mathrm{Aut}(M')$ alors M' n'est pas à valence bornée (c'est-à-dire non libre).

$\rhd$ Remarquons que les relations E_j sont des relations d'équivalence sur uples bornés (elles ont un nombre fini de classes car G' agit transitivement sur M') (2.2.13 i). Par ailleurs M est transitive à valence bornée, donc M est fortement minimale (2.2.11).

Soient $d \in M$ et $D = \mathrm{iacl}_M(d) = \mathrm{acl}_M(d)$ (clôture algébrique de d dans le langage à valence bornée de M). Soient D' la structure induite par M' sur D, $\bar{d}$ une énumération de D et p le type de $\bar{d}$ dans M'.

Par transitivité, la théorie de M' dit que pour toute partie finie $\tilde{p}$ de p, tout $J_0 \subset J$ fini et tout entier m : pour tout $x^0, \ldots, x^m$ il existe des uples $\tilde{x}^0, \ldots, \tilde{x}^m$ satisfaisant chacun $\tilde{p}$ tel que $x_0^0 = x^0, \ldots, x_0^m = x^m$ et tel que pour tout $i_1, \ldots, i_l$ et $j \in J_0$, si $x_{i_1}^0 \ldots x_{i_l}^0$ satisfait R_j alors pour tout $i \in \{0, \ldots, m\}$, $E_j(x_{i_1}^0 \ldots x_{i_l}^0, x_{i_1}^i \ldots x_{i_l}^i)$.

Soit N' une structure élémentairement équivalente à M'. Montrons que N' est une union de copies disjointes de D'. Par compacité pour toute famille d'éléments $(a^i)_{i\in I}$ de N', il existe $(\bar{a}^i)_{i\in I}$ tel que pour tout i, $a_0^i = a^i$, $\bar{a}^i$ satisfait p et tel que pour tout $i_1, \ldots, i_l$ et $j \in J$ si $a_{i_1}^0 \ldots a_{i_l}^0$ satisfait R_j alors pour tout $i \in I$, $E_j(a_{i_1}^0 \ldots a_{i_l}^0, a_{i_1}^i \ldots a_{i_l}^i)$.

Chaque $\bar{a}^i = \mathrm{iacl}_N(a_i)$ car $\bar{d} = \mathrm{iacl}_M(d)$ (iacl_N correspond à la clôture interalgébrique dans le langage à valence bornée de départ).

Ainsi pour obtenir un isomorphisme de N' sur l'union de copies disjointes de D', il suffit de choisir $(a_i)_{i\in I}$ dans N tel que $(\mathrm{iacl}_N(a_i))_{i\in I}$ donne un recouvrement disjoint de N et d'envoyer chaque $\bar{a}^i$ sur une copie de D'. On a alors un isomorphisme dans le langage de M car M est à valence bornée. De plus comme l'on a envoyé les classes d'équivalence de manière identique sur chaque copie de D', c'est un isomorphisme dans le langage enrichi.

Par le même type d'isomorphismes et de la même façon que dans la preuve de (2.2.11), on montre que M' est fortement minimale triviale et qu'en particulier la clôture algébrique reste inchangée car pour tout $A \subset N'$, $\mathrm{iacl}_N(A) = \mathrm{acl}_{N'}(A)$.

Soit f un automorphisme de M qui fixe globalement chacune des classes des relations E_i. Montrons que f est un automorphisme fort de M'. Il est immédiat que f est un automorphisme de M'. Soit N' une extension élémentaire de M'. Alors f s'étend en un automorphisme de N' en posant l'identité sur $N' \setminus M'$. Donc f est un automorphisme fort de N' puisque f fixe une copie D' qui est une sous-structure élémentaire de N'.

Comme $\mathrm{acl}(\emptyset) = \emptyset$ si M' est libre tout type est stationnaire et donc $\mathrm{Autf}(M') = \mathrm{Aut}(M')$ (2.2.8). Donc si M' est libre, $G' = \mathrm{Aut}(M')$. ◁

2.2.2 Caractérisation par le groupe d'automorphismes

Nous allons montrer qu'une structure fortement minimale triviale est à valence bornée si et seulement si son groupe des automorphismes fixant globalement chacune de ses composantes est exactement le produit des groupes d'automorphismes de chacune de ses composantes (2.2.19 et 2.2.20).

Nous commençons par rappeler les définitions du produit semi-direct et du produit en couronne "généralisé" (ces notions apparaissent naturellement dans les groupes d'automorphismes d'une structure). Notre référence pour le produit en couronne est l'ouvrage [BMMN].

Définition. Soient N et H deux groupes. Soit ϕ un morphisme de H dans $\mathrm{Aut}N$ ($\mathrm{Aut}N$ est le groupe des automorphismes du groupe N). Le **produit semi-direct** $N \rtimes_\phi H$ est l'ensemble $N \times H$ muni de la loi de groupe suivante :

$$(n,h)\cdot(n',h') = (n\cdot(\phi(h)(n')), h\cdot h').$$

Remarque. Un groupe G se décompose en produit semi-direct $N \rtimes H$ si on a une suite exacte qui possède une section :

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \xrightarrow{p} H \longrightarrow 1$$

telle qu'il existe un homomorphisme $s : H \to G$ vérifiant $p \circ s = id_H$.

Dans ce cas G est isomorphe à $N \rtimes_\phi H$ où $\phi(h)(n) = s(h)ns(h)^{-1}$.

Définition. Soient G un groupe et H un groupe agissant sur un ensemble I. Soit $K = G^I$. Le **produit en couronne** de G par H est le produit semi-direct $K \rtimes_\phi H$

de K par H où $\phi(h)((g_i)_{i\in I}) = (g_{h(i)})_{i\in I}$. On note en général ce produit en couronne simplement $G^I \rtimes H$.

Pour une structure stable M, les groupes $\mathrm{Autf}(M)$ et $\mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M)$ sont des sous-groupes normaux fermés de $\mathrm{Aut}(M)$. Voici un autre sous-groupe normal fermé particulier de $\mathrm{Aut}(M)$: le groupe fixant les composantes de M. Soit $(C_i)_{i\in I}$ les composantes non algébriques de M (M est l'union disjointe de $\mathrm{acl}(\emptyset)$ et des C_i).

Notons $\mathrm{FixComp}(M)$ le sous-groupe des automorphismes de M fixant globalement chaque composante. C'est un sous-groupe normal fermé.

Le groupe $\mathrm{Aut}(M)$ agit sur I par permutation des composantes non algébriques (un automorphisme fixe toujours globalement $\mathrm{acl}(\emptyset)$). Il existe donc un sous-groupe H du groupe des permutations S_I tel que

$$1 \longrightarrow \mathrm{FixComp}(M) \longrightarrow \mathrm{Aut}(M) \longrightarrow H \longrightarrow 1.$$

Le groupe $\mathrm{FixComp}(M)$ peut se voir comme un sous-groupe de

$$\prod_{i\in I} \mathrm{Aut}(C_i) \times \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset)).$$

Soit $\mathrm{FixComp}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M) = \mathrm{FixComp}(M) \cap \mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M)$. Il existe un sous-groupe H' de H tel que

$$1 \longrightarrow \mathrm{FixComp}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M) \longrightarrow H' \longrightarrow 1.$$

Le groupe $\mathrm{FixComp}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M)$ est lui un sous-groupe de $\prod_{i\in I} \mathrm{Aut}(C_i)$.

Remarque. Les composantes non algébriques d'une structure fortement minimale sont toutes isomorphes, donc les groupes $\mathrm{Aut}(C_i)$ sont égaux.

Lemme 2.2.18. *Soit M une structure fortement minimale triviale de dimension κ. Soit S_κ le groupe des permutations de κ.*

Nous avons les suites exactes suivantes qui sont de plus scindées (c'est-à-dire elles ont des sections) :

$$1 \longrightarrow \mathrm{FixComp}(M) \longrightarrow \mathrm{Aut}(M) \longrightarrow S_\kappa \longrightarrow 1$$

et

$$1 \longrightarrow \mathrm{FixComp}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M) \longrightarrow S_\kappa \longrightarrow 1.$$

▷ Soient $(C_i)_{i\in\kappa}$ les composantes non algébriques de M. Soit p la projection de $\mathrm{Aut}(M)$ dans S_κ définie par l'action de $\mathrm{Aut}(M)$ sur les composantes.

Soit pour chaque composante C_i un représentant c_i.

Montrons que $p(\mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M)) = S_\kappa$. Comme M est fortement minimale triviale, pour tout $\sigma \in S_\kappa$, $(c_i)_{i\in\kappa}$ et $(c_{\sigma(i)})_{i\in\kappa}$ ont même type fort. Donc il existe un automorphisme de M fixant $\mathrm{acl}(\emptyset)$ et envoyant $(c_i)_{i\in\kappa}$ sur $(c_{\sigma(i)})_{i\in\kappa}$.

Montrons qu'il existe une section s de S_κ dans $\mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M)$.

Pour tout i il existe un automorphisme fort ϕ_i qui envoie c_0c_i sur c_ic_0 car c_0c_i et c_ic_0 ont même type fort. Pour $\sigma \in S_\kappa$ on définit $s(\sigma)(x) = \phi_{\sigma(i)} \circ \phi_i^{-1}(x)$ si $x \in C_i$ et $s(\sigma)(x) = x$ si $x \in acl(\emptyset)$.

Alors s définit un morphisme de S_κ dans le groupe des permutations de M . Il faut vérifier que pour tout $\sigma \in S_\kappa$, la permutation $s(\sigma)$ est un automorphisme de M. Pour cela il suffit de vérifier que pour tout $\bar{a} \in M$, $s(\sigma)(\bar{a})$ et $\bar{a}$ ont même type. Soit $\bar{a} = \bar{a}_{i_1}..\bar{a}_{i_n}$ où $\bar{a}_{i_j} \in C_{i_j}$. Alors pour tout j, $\bar{a}_{i_j}$ et $s(\sigma)(\bar{a}_{i_j})$ ont même type fort, et donc $\bar{a}$ et $s(\sigma)(\bar{a}_{i_1})\ldots s(\sigma)(\bar{a}_{i_n})$ ont même type fort (2.2.1). ◁

Remarque. Soient M une structure fortement minimale triviale et D une composante non algébrique de M. Si M a plus de trois composantes non algébriques alors $\mathrm{Aut}(M)$ n'est pas commutatif.

Si $\mathrm{Aut}(D)$ est commutatif alors pour tout $A \subset M$, $\mathrm{acl}(A) = \mathrm{dcl}(A) \cup \mathrm{acl}(\emptyset)$.

▷ Si M a plus de trois composantes alors S_κ n'est pas commutatif.

S'il existe A tel que $\mathrm{acl}(A) \neq \mathrm{dcl}(A) \cup \mathrm{acl}(\emptyset)$ alors il existe a et b dans une même composante non algébrique tels que $b \notin \mathrm{dcl}(a)$. Il existe donc un automorphisme g_1 dans $\mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}(a))$ qui fixe a et ne fixe pas b. Par ailleurs il existe un automorphisme g_2 dans $\mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}(a))$ qui envoie a sur b. On a $g_1 \circ g_2(a) \neq b = g_2 \circ g_1(a)$. ◁

Proposition 2.2.19. *Soit M une structure fortement minimale à valence bornée de dimension κ. Soit G le groupe d'automorphismes d'une composante non algébrique de M. Alors :*

i) $\mathrm{FixComp}(M) = G^\kappa \times \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$.

ii) $\mathrm{Aut}(M) = \mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M) \times \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset)) = \mathrm{Aut}(M \setminus \mathrm{acl}(\emptyset)) \times \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$.

iii) $\mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M) = G^\kappa \rtimes S_\kappa$.

iv) Pour tout élément $d \in M$ non algébrique, $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(d)) = G \times \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$.

v) $\mathrm{Autf}(M) = \mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M)$ *et donc* $\mathrm{Gal}(M) = \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$. *De même, pour une partie A de M,* $\mathrm{Autf}_A(M) = \mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(A)}(M)$ *et* $\mathrm{Gal}_A(M) = \mathrm{Aut}_A(\mathrm{acl}(A))$.

▷ La structure M est libre (2.2.6). Soient $(C_i)_{i\in\kappa}$ les composantes non algébriques de M.

i) Soit pour tout i, un automorphisme g_i de $C_i = \bar{c}_i$ et soit h un automorphisme de $\mathrm{acl}(\emptyset) = \bar{a}$. Comme M est libre, $((\bar{c}_i)_{i\in\kappa}, \bar{a})$ et $((g_i(\bar{c}_i))_{i\in\kappa}, h(\bar{a}))$ ont même type. Donc $((g_i)_{i\in\kappa}, h) \in \mathrm{FixComp}(M)$. En fait sans l'hypothèse de minimalité, on obtient : $\mathrm{FixComp}(M) = \prod \mathrm{Aut}(C_i) \times \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$.

ii) et iv) se montrent de la même manière en utilisant la définition d'une structure libre.

iii) Par (2.2.18), nous avons la suite exacte suivante :

$$1 \longrightarrow \mathrm{FixComp}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M) \longrightarrow S_\kappa \longrightarrow 1.$$

Pour tout $i \in \kappa$, soit $\bar{c}_i = C_i$ tel que toutes les énumérations $\bar{c}_i$ ont même type. Comme M est libre l'application s qui à $\sigma \in S_\kappa$ associe la permutation de M qui fixe $\mathrm{acl}(\emptyset)$ et envoie pour chaque i, $\bar{c}_i$ sur $\bar{c}_{\sigma(i)}$ est une section. Donc $\mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M)$ est le produit en couronne de G par S_κ.

v) $\mathrm{Autf}(M) = \mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M)$ puisque tout type d'uple ne contenant pas d'éléments algébriques est stationnaire (2.2.8). Soit A une partie de M. Alors $(M, a;\ a \in A)$ est encore libre. ◁

Réciproquement :

Proposition 2.2.20. *Soit M une structure fortement minimale triviale saturée de dimension κ. Soit G le groupe d'automorphismes d'une composante non algébrique de M.*

Si $\mathrm{FixComp}(M) = G^\kappa \times \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ *alors M est à valence bornée.*

▷ Montrons que pour $\bar{a}$ dans une composante non algébrique, le type de $\bar{a}$ est stationnaire ce qui montre que M est libre et donc est à valence bornée (2.2.8 et 2.2.3). Soit $\bar{b}$ de même type que $\bar{a}$. Soit M' l'union des composantes ne contenant ni $\bar{a}$, ni $\bar{b}$. Alors M' est infini car M est saturée et M' est algébriquement clos donc c'est une sous-structure élémentaire de M. Soit $\bar{m}$ une énumération de M' et ϕ un automorphisme qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$. Il existe un automorphisme ψ qui fixe $\bar{b}$ et qui envoie $\phi(C_i)$ sur C_i pour toute composante C_i ne contenant ni $\bar{a}$, ni $\bar{b}$: il suffit pour cela de considérer la permutation σ de κ qui fixe i_0 tel que $C_{i_0} = \mathrm{iacl}(\bar{b})$, qui envoie j sur i pour $C_j = \phi(C_i)$ et qui envoie j_1 sur i_1, tel que $C_{j_1} = \phi(\mathrm{iacl}(\bar{b}))$ et $C_{i_1} = \mathrm{iacl}(\bar{a})$, et d'utiliser la section définie dans la preuve de (2.2.18). Alors $\psi \circ \phi(M') = M'$. Comme $\mathrm{FixComp}(M) = G^\kappa \times \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$, il existe un automorphisme θ qui fixe toujours $\bar{b}$ et qui envoie $\psi \circ \phi(\bar{m})$ sur $\bar{m}$. On a ainsi montré que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type au-dessus de M' et donc que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type fort. ◁

Remarque. Dans le cas non $\aleph_0$-catégorique, les composantes non algébriques étant infinies il suffit de supposer que M contient deux composantes : en effet par un automorphisme fort on peut commencer par supposer que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont dans la même composante. Ensuite M' reste infini. Nous verrons par la suite que deux composantes sont en général nécessaires.

Dans la cas où $\mathrm{acl}(\emptyset)$ est infini, une seule composante suffit. On prend $M' = \mathrm{acl}(\emptyset)$.

D'autre part si $\mathrm{acl}(\emptyset)$ est infini, $(M, c;\ c \in \mathrm{acl}(\emptyset))$ est à valence bornée donc, $\mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M) = \mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(D)^\kappa \rtimes S_\kappa$ où D est une composante non algébrique de M.

2.3 Exemples non libres

Dans cette section nous présentons trois exemples de structures fortement minimales triviales non libres dans les trois cas suivants : $\aleph_0$-catégorique, non $\aleph_0$-catégorique unimodulaire et non unimodulaire (voir définition au paragraphe 2.4.3).

Ces exemples sont construits comme couverture finie (en fait double) de structures simples, dans le sens suivant :

Définition. Soient C et W deux structures telles que W est une partie $\emptyset$-définissable de C^{eq}. Alors C est une couverture finie de W si il existe une relation d'équivalence E $\emptyset$-définissable de C avec des classes finies, et une bijection $\emptyset$-définissable dans C^{eq}

de l'ensemble des E-classes de C sur W, telles que toute relation de W^n qui, est $\emptyset$-définissable dans la structure à deux sortes (C, W), est déjà $\emptyset$-définissable dans W. Si de plus toutes les classes sont de cardinal 2, C est une couverture double de W.

Nous commençons par donner un exemple non libre $\aleph_0$-catégorique :

Exemple 2.3.1. Les structures M_1 et M_2 qui suivent sont des couvertures doubles de l'ensemble infini muni d'une relation d'équivalence dont toutes les classes sont de cardinal 2.

Nous définissons en premier lieu une structure libre M_1. Soit I un ensemble infini et $M_1 = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times I, R)$ où R est la relation binaire à valence bornée définie par

$$R = \{((2m+\varepsilon, i), (2m+2+\varepsilon', i));\ i \in I,\ m, \varepsilon, \varepsilon' \in \{0,1\}\}.$$

C'est à dire si D est une composante $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \{i\}$ et que l'on oublie i, R est définie sur D par l'ensemble

$$\{(0,2),(2,0),(0,3),(3,0),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}.$$

$$\text{Structure } M_1 \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] 0 & & 1 & 0 & & 1 & 0 & & 1 & \\ R \arrow[u] \arrow[d] & R \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & R \arrow[u] \arrow[d] & R \arrow[u] \arrow[d] & R \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & R \arrow[u] \arrow[d] & R \arrow[u] \arrow[d] & R \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & R \arrow[u] \arrow[d] & \ldots\ldots \\ 2 & & 3 & 2 & & 3 & 2 & & 3 & \end{tikzcd}$$

La structure M_1 est transitive. Il suffit de considérer pour cela les automorphismes α et β sur D définis par $\alpha(0123) = (1032)$ et $\beta(0123) = (2301)$.

Par (2.2.11) la structure M_1 est fortement minimale triviale.

Il est facile de voir que $\mathrm{Aut}(D)$ est le produit en couronne de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par S_2 :

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes S_2.$$

Par (2.2.19), le groupe d'automorphismes de M_1 est $\mathrm{Aut}(D)^I \rtimes S_I$.

Nous enrichissons cet exemple pour obtenir un exemple non libre. Soit M_2 la structure M_1 enrichie par une relation E tel que $E \subset R \times R$ et E définit une relation d'équivalence à deux classes sur R. On définit E de manière uniforme sur les copies de D de telle façon que sur D, E définit les deux classes suivantes : $C_0 := \{(0,2),(2,0),(1,3),(3,1)\}$ et $C_1 := \{(0,3),(3,0),(1,2),(2,1)\}$.

$$\text{Structure } M_2 \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] 0 & & 1 & 0 & & 1 & 0 & & 1 & \\ C_0 \arrow[u] \arrow[d] & C_1 \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & C_0 \arrow[u] \arrow[d] & C_0 \arrow[u] \arrow[d] & C_1 \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & C_0 \arrow[u] \arrow[d] & C_0 \arrow[u] \arrow[d] & C_1 \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & C_0 \arrow[u] \arrow[d] & \ldots\ldots \\ 2 & & 3 & 2 & & 3 & 2 & & 3 & \end{tikzcd}$$

Les automorphismes α et β sur D fixent globalement les classes d'équivalence. Donc l'action des automorphismes de M_2 fixant globalement chaque classe est transitive. Par (2.2.17) M_2 est fortement minimale triviale et non libre car l'automorphisme de D qui envoie 0123 sur 0132 échange les deux classes.

Il est simple de voir que $\mathrm{Aut}(D)$ dans M_2 est identique à celui de M_1.

Par contre $\mathrm{Aut}(M_2) \neq \mathrm{Aut}(M_1)$. Par (2.2.18) pour décrire ce groupe, il suffit de considérer $\mathrm{FixComp}(M_2)$ le sous-groupe des automorphismes de M_2 fixant globalement chaque composante. Associons à tout automorphisme dans $\mathrm{FixComp}(M_2)$, l'élément $0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ s'il fixe les classes, l'élément 1 sinon. $\mathrm{FixComp}(M_2)$ est alors le produit semi-direct

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I \rtimes_\psi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

où ψ est le morphisme de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans $(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))^I$ défini par

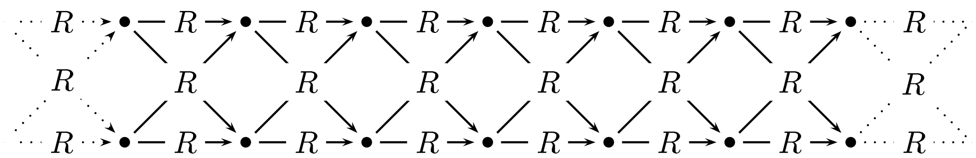
$$\psi(\varepsilon)((\theta_0^i, \theta_1^i)_{i\in I}) = (\theta_0^i + \varepsilon\theta_1^i, \theta_1^i)_{i\in I}.$$

Nous donnons maintenant un exemple non $\aleph_0$-catégorique qui est un cas particulier d'une construction que nous ferons ensuite (2.5.10).

Le premier exemple de structure fortement minimale non $\aleph_0$-catégorique est $\mathbb{Z}$ muni de la fonction successeur, S. Les structures suivantes M_3, M_4 et M_5 sont des couvertures doubles de $(\mathbb{Z}, S)$:

Exemple 2.3.2. Soit $M_3 = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, R)$ où R est la relation binaire à valence bornée définie par

$$R := \{((m, \varepsilon), (m+1, \varepsilon'));\ m \in \mathbb{Z},\ \varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}.$$



Structure M_3

La structure M_3 est transitive car pour tout (n, ε) l'application qui à (m, ε') associe $(m+n, \varepsilon'+\varepsilon)$ est un automorphisme de M_3.

Donc M_3 est une structure fortement minimale triviale (2.2.11). En fait ici M_3 est réduite à une composante. Si l'on veut une structure ω-saturée il suffit de prendre ω copies de M_3.

On peut projeter tout automorphisme de M_3 sur $\mathbb{Z}$. Ainsi $\mathrm{Aut}(M_3)$ est isomorphe au produit en couronne $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}} \rtimes \mathbb{Z}$.

Nous enrichissons M_3 par une bijection afin de réduire le groupe d'automorphismes :

Soit M_4 la structure M_3 enrichie par une relation binaire S qui définit la bijection suivante :

$$S(m, \varepsilon) = (m+2, \varepsilon).$$

Alors M_4 est toujours transitive et à valence bornée donc M_4 est fortement minimale triviale (2.2.11).

On obtient ici :

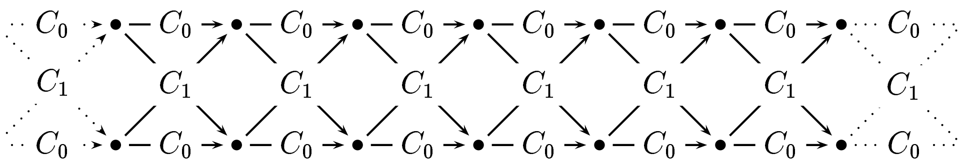
$$\mathrm{Aut}(M_4) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes_\psi \mathbb{Z}$$

tel que $\psi(2m) = id$ et $\psi(2m+1)(\theta_0, \theta_1) = (\theta_1, \theta_0)$.

Nous donnons enfin un enrichissement de M_4 non libre mais conservant le même groupe d'automorphismes (sur une composante).

Soit M_5 la structure M_3 enrichie par une relation E telle que $E \subset R \times R$ et E définit une relation d'équivalence à deux classes C_0 et C_1 sur R (non définies sur $\emptyset$) :

$$C_0 := \{((m,\varepsilon),(m+1,\varepsilon))\} \text{ et } C_1 := \{((m,\varepsilon),(m+1,\varepsilon+1))\}.$$



Structure M_5

La relation précédente S est en fait définissable dans M_5 donc M_5 est un enrichissement de M_4.

Les automorphismes utilisés pour montrer la transitivité de M_3 sont des automorphismes de M_5 qui fixent globalement C_0 et C_1. Donc M_5 est fortement minimale triviale et n'est pas libre car l'automorphisme qui fixe les éléments $(2m, \varepsilon)$ et qui échange les éléments $(2m+1, 0)$ et $(2m+1, 1)$, échange C_0 et C_1 (2.2.17).

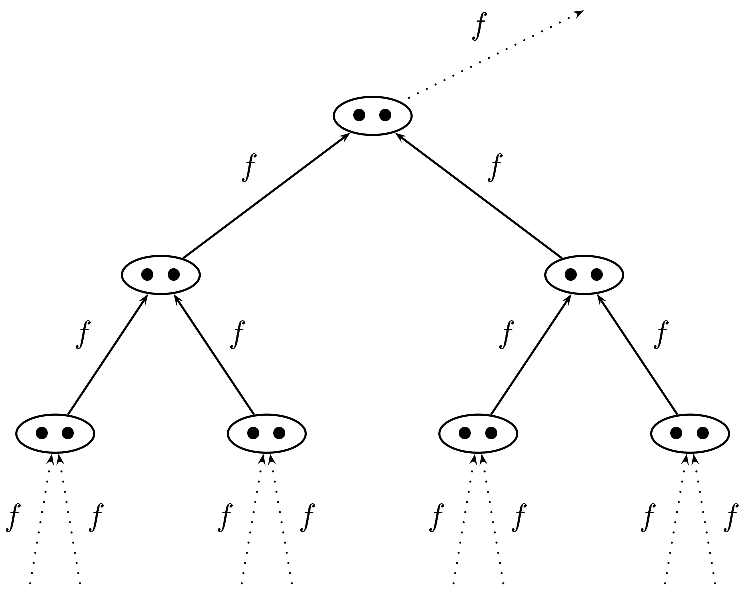
Par contre il est facile de voir que tout automorphisme de M_4 est un automorphisme de M_5. Cela ne reste évidemment plus vrai si l'on passe à des structures possédant au moins deux composantes.

Les exemples précédents sont tous unimodulaires (c'est-à-dire si a et b sont interalgébriques alors $\mathrm{mult}(a/b) = \mathrm{mult}(b/a)$ (voir définition paragraphe 2.4.3)). Nous donnons maintenant un exemple non unimodulaire et non libre.

Le premier exemple de structure fortement minimale triviale non unimodulaire est l'arbre binaire sans racine Γ : c'est-à-dire une structure munie d'une fonction f surjective telle que tout élément a exactement deux antécédents et est sans cycle. L'arbre Γ est alors la structure réduite à une composante. Nous construisons des couvertures doubles de Γ :

Exemple 2.3.3. Nous commençons par prendre la couverture double de Γ la moins riche. Soit $M_6 = (\Gamma \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, R)$ où R est la relation binaire à valence bornée définie par

$$\{((x,\varepsilon),(f(x),\varepsilon'));\ x \in \Gamma,\ \varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}.$$



Structure M_6

Alors R est à valence bornée et M_6 est transitive donc M_6 est fortement minimale triviale (2.2.11).

Son groupe d'automorphismes est le produit en couronne de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par $\mathrm{Aut}(\Gamma)$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\Gamma} \rtimes \mathrm{Aut}(\Gamma)$.

Nous enrichissons M_6 de manière à réduire le groupe d'automorphismes : soit M_7 l'enrichissement de M_6 par une fonction surjective S définie par $S((x,\varepsilon)) = (f^2(x),\varepsilon)$. Alors S est une relation à valence bornée et M_7 est toujours transitive : il suffit de considérer pour tout $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ et tout $\varepsilon' \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, l'automorphisme qui à (x,ε) associe $(\gamma(x),\varepsilon+\varepsilon')$. Donc M_7 est fortement minimale triviale (2.2.11).

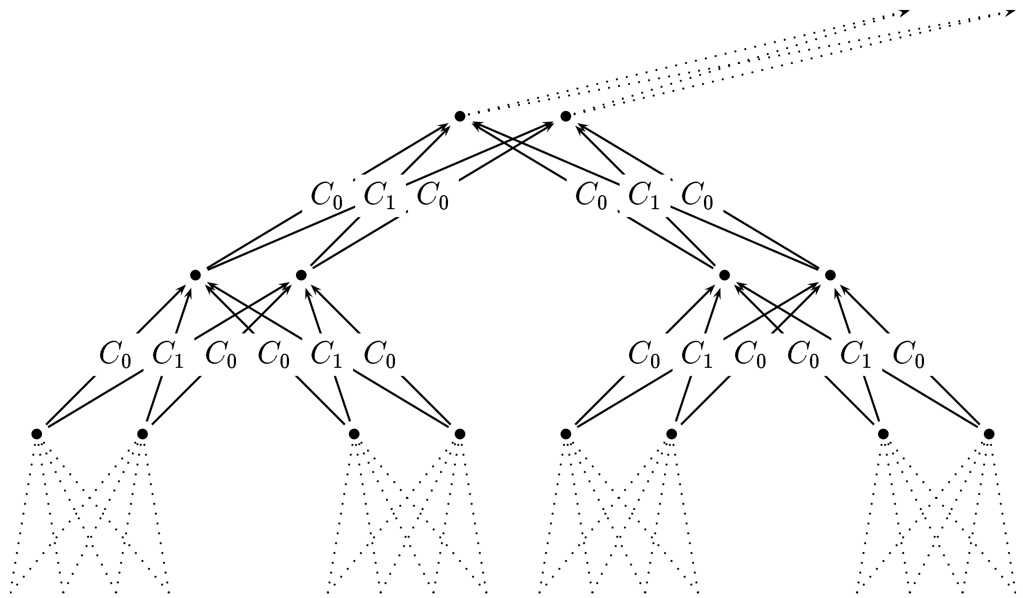
Pour décrire le groupe d'automorphismes de M_7 il suffit de faire la remarque suivante : pour tout $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$, ou bien pour tout $x \in \Gamma$, $\gamma(x)$ est à une distance paire de x, ou bien pour tout $x \in \Gamma$, $\gamma(x)$ est à une distance impaire de x. On dira que γ est pair ou impair. On vérifie alors simplement que :

$$\mathrm{Aut}(M_7) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes_{\psi} \mathrm{Aut}(\Gamma)$$

où $\psi(\gamma)$ est l'identité si γ est pair et $\psi(\gamma)$ échange les coordonnées si γ est impair.

Enfin voici l'enrichissement qui donne un exemple non libre non unimodulaire : soit M_8 l'enrichissement de M_6 par une relation E telle que $E \subset R \times R$ et E est une relation d'équivalence sur R ayant les deux classes suivantes :

$$C_0 := \{((x,\varepsilon),(f(x),\varepsilon))\} \text{ et } C_1 := \{((x,\varepsilon),(f(x),\varepsilon+1))\}.$$



Structure M_8

Alors S est définissable dans M_8. Donc M_8 est un enrichissement de M_7. Pour tout $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ et $\varepsilon' \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, l'application qui à (x, ε) associe $(\gamma(x), \varepsilon + \varepsilon')$ est un automorphisme de M_8 qui fixe globalement les deux classes. Par conséquent M_8 est fortement minimale triviale (2.2.17). Soit $a \in \Gamma$. Soit l'automorphisme de M_8 qui à (x, ε) associe (x, ε) si la distance de x à a est paire, et sinon associe $(x, \varepsilon + 1)$. Cet automorphisme échange C_0 et C_1, donc M_8 n'est pas libre (2.2.17).

On peut vérifier par ailleurs que $\mathrm{Aut}(M_8) = \mathrm{Aut}(M_7)$.

2.4 Groupe d'automorphismes d'une composante

Par (2.2.19) l'étude du groupe d'automorphismes d'une structure fortement minimale à valence bornée (ou libre) se ramène à l'étude du groupe K des automorphismes de la composante algébrique et du groupe G des automorphismes d'une composante non algébrique.

De plus par (2.2.8) une structure fortement minimale triviale est à valence bornée si et seulement si le sous-groupe G' des automorphismes forts d'une composante non algébrique est égal au groupe des automorphismes de cette même composante. Enfin l'étude du sous-groupe H de G constitué des automorphismes fixant un point de la composante est motivé par les travaux de A. Ivanov sur la conjecture A. Nous montrerons dans la section suivante que pour tout groupe profini il existe une structure fortement minimale triviale telle que ce groupe profini est isomorphe à H.

Dans cette section nous étudions les groupes K, G ,G' et H.

Tout d'abord, pour tout groupe profini K il existe une structure fortement minimale triviale telle que $K = \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ (2.4.2).

Nous donnons ensuite une condition nécessaire et suffisante pour que le triplet

(G, G', H) corresponde à une structure fortement minimale triviale : soient G un groupe topologique, G' et H deux sous-groupes de G, alors il existe une structure fortement minimale triviale M telle que $G = \mathrm{Aut}(D)$, $G' = \mathrm{Autf}(D)$ et $H = \mathrm{Aut}_d(D)$ pour $D = \mathrm{iacl}(d)$ une composante non algébrique de M si et seulement si H est un sous-groupe ouvert et profini de G tel que l'ensemble des intersections finies de conjugués de H forme un système de voisinages ouverts de 1, et G' est un sous-groupe normal fermé de G tel que $G = G'H$ (2.4.3,2.4.4 et 2.4.5).

Nous montrons de plus qu'une structure fortement minimale triviale qui a une clôture algébrique du vide triviale, peut être reconstruite à partir de son triplet (G, G', H) (2.4.6).

Nous remarquons ensuite que l'unimodularité d'une structure fortement minimale triviale est donnée par l'unimodularité du groupe G (2.4.9).

Enfin nous montrons que la propriété du petit indice pour les structures fortement minimales, à valence bornée ou sur un langage fini, est équivalente à la propriété du petit indice pour le groupe des automorphismes de la clôture algébrique d'un point non algébrique (2.4.13 et 2.4.14).

Pour cette section, notre référence pour les définitions des groupes profinis, des groupes localement compacts et des groupes localement compacts unimodulaires est [Hi 74].

2.4.1 Groupes profinis - Groupes localement compacts

Nous rappelons rapidement les définitions équivalentes d'un groupe profini :

Définition. Un groupe topologique G est profini s'il vérifie les propriétés équivalentes suivantes :

i) G est compact et totalement discontinu.

ii) L'ensemble des sous-groupes normaux ouverts d'indice fini de G forme un système de voisinages de l'unité et est d'intersection triviale.

iii) Si $(N_i)_{i \in I}$ est la famille des sous-groupes normaux ouverts d'indice fini de G alors

$$G = \varprojlim G/N_i.$$

Remarque. Soit G un groupe profini. Alors G est séparable s'il vérifie l'une des propositions équivalentes suivantes :

i) Une partie dénombrable de G est dense.

ii) G a une base dénombrable d'ouverts.

iii) L'ensemble des sous-groupes normaux ouverts de G est dénombrable.

iv) L'ensemble des sous-groupes ouverts de G est dénombrable.

Nous démontrons les faits bien connus suivants :

Fait 2.4.1. *Soit M une structure.*

i) $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ *est un groupe profini.*

ii) Si $X = \mathrm{acl}(\bar{x})$ *(ou* $X = \mathrm{iacl}(\bar{x})$*) pour* $\bar{x}$ *un uple fini alors* $\mathrm{Aut}(X)$ *est localement compact car* $\mathrm{Fix}(\bar{x}) = \mathrm{Aut}_{\bar{x}}(X)$ *est un sous-groupe ouvert profini.*

iii) Si $\mathrm{acl}(\emptyset)$ *(resp.* X*) est dénombrable alors* $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ *(resp.* $\mathrm{Fix}(\bar{x})$*) est séparable.*

$\triangleright$ i) Vérifions que $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ est profini.

Un système de voisinages de 1 dans $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ est l'ensemble des $\mathrm{Fix}(A)$, pour A parcourant les parties finies de $\mathrm{acl}(\emptyset)$. Soit A une partie finie de $\mathrm{acl}(\emptyset)$. Si l'on considère l'ensemble A' des conjugués des éléments de A alors $\mathrm{Fix}(A')$ est normal dans $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ et A' fini. D'où $\mathrm{Fix}(A')$ est d'indice fini dans $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ (car $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))/\mathrm{Fix}(A') = \mathrm{Aut}(A')$). Par ailleurs l'intersection des $\mathrm{Fix}(A)$ pour A fini est triviale. On en déduit que l'ensemble des sous-groupes normaux ouverts d'indice fini forme un système de voisinages de 1 d'intersection triviale. De plus si $\mathrm{acl}(\emptyset)$ est dénombrable alors ce système est dénombrable car il n'y a alors qu'un nombre dénombrable de parties finies de $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$.

ii) Par définition de la topologie sur $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\bar{x}))$, $\mathrm{Fix}(\bar{x})$ est un sous- groupe ouvert de $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\bar{x}))$.

Si $X = \mathrm{acl}(\bar{x})$, $\mathrm{Fix}(\bar{x})$ se voit comme $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ en ajoutant $\bar{x}$ aux constantes du langage. Donc $\mathrm{Fix}(\bar{x})$ est profini et on conclut de même pour iii)

Pour $X = \mathrm{iacl}(\bar{x})$, il suffit de remarquer que la projection qui à un automorphisme de $\mathrm{acl}(\bar{x})$ associe sa restriction à $\mathrm{iacl}(\bar{x})$ est un morphisme continu qui envoie $\mathrm{Aut}_{\bar{x}}(\mathrm{acl}(\bar{x}))$ sur $\mathrm{Aut}_{\bar{x}}(\mathrm{iacl}(\bar{x}))$. D'autre part si $\mathrm{iacl}(\bar{x})$ est dénombrable alors $\mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}(\bar{x}))$ a une base dénombrable d'ouverts. $\triangleleft$

Réciproquement nous montrons que tout groupe profini est $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ pour une structure fortement minimale triviale :

Proposition 2.4.2. *Soit* G *un groupe profini. Il existe une structure* M *fortement minimale triviale (saturée) à valence bornée telle que pour toute partie* A *de* M*,* $\mathrm{acl}(A) = A \cup \mathrm{acl}(\emptyset)$ *et telle que* $G = \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset)) = \mathrm{Gal}(M)$.

$\triangleright$ Soit G un groupe profini et $(N_i)_{i\in I}$ ses sous-groupes normaux ouverts formant un système de voisinages de l'unité. Donc G est la limite projective de G/N_i muni des projections $p_{i,j} : G/N_j \to G/N_i$ pour $N_i \supseteq N_j$.

Soit $L = \{U_i(x),\ \sigma_i(x_1, .., x_{m_i})\ (m_i =\mid G/N_i \mid),\ P_{i,j}(x,y)\ (i \leq j)\}$, $D = \{gN_i;\ g \in G; i \in I\}$ et (D, L) la L-structure définie par :

$$\begin{aligned}
U_i(D) &= \{gN_i;\ g \in G\} \\
\sigma_i(D^{m_i}) &= \{(gN_i, gg_2N_i, .., gg_{m_i}N_i);\ g \in G\} \\
&\quad \text{où les } 1, g_2N_i, .., g_{m_i}N_i \text{ représentent les classes modulo } N_i \\
P_{i,j}(D^2) &= \{(gN_i, g'N_j);\ g'N_i = gN_i\ g, g' \in G\}.
\end{aligned}$$

Soit M la sur-structure de D obtenue en lui ajoutant une infinité de points de cardinal plus grand que celui de I (sans aucune structure sur ces nouveaux points).

On a $D = \mathrm{acl}(\emptyset)$. Soit $H = \mathrm{Aut}(D) = \mathrm{Aut}(acl(\emptyset))$. Nous allons montrer que $H = G$:

Soit f_i l'application qui à $h \in H$ associe $h(N_i)$ dans G/N_i. Alors f_i est un morphisme de groupe. Soit $h, h' \in H$. On a $h(N_i) = g_l N_i$ et $h'(N_i) = g_{l'} N_i$. Alors :

$$\sigma_i(N_i, .., {g_{l'}}^{-1} N_i, ..) \xrightarrow{h'} \sigma_i(g_{l'} N_i, .., N_i, ..) \xrightarrow{h} \sigma_i(g_l . g_{l'} N_i, .., g_l N_i, ..).$$

Donc $h \circ h'(N_i) = g_l g_{l'} N_i$.

Soit $f : h \mapsto (f_i(h))_{i \in I}$. Par les $P_{i,j}$, f est à valeurs dans G. Donc f est un homomorphisme de H dans G. De plus f est injectif : si pour tout i, $f_i(h) = N_i$ alors pour tout i, $h(N_i) = N_i$ et donc $h = id$. Et f est surjectif : soit $g \in G$, soit $h : g_l N_i \mapsto g.g_l N_i$, alors h est un automorphisme tel que $f(h) = g$.

On vérifie que f est un homéomorphisme : $f^{-1}(N_i) = \{h \in H;\ h(N_i) = N_i\}$ et $f(\{h \in H;\ h(gN_i) = gN_i\}) = N_i$.

M est fortement minimale triviale car sa théorie dit que les U_i, σ_i, $P_{i,j}$ ne sont satisfaits que par des éléments algébriques. Il n'y a donc qu'un seul type non algébrique et les éléments non algébriques sur vide sont nécessairement indépendants. $\lhd$

Nous passons à l'étude du groupe d'automorphismes d'une composante non algébrique.

2.4.2 Groupe d'automorphismes d'une composante non algébrique

Nous rappelons que la classe de conjugaison H^g est $g^{-1}Hg$.

Proposition 2.4.3. *Soit M une structure fortement minimale triviale et $d \in M \setminus \mathrm{acl}(\emptyset)$. Soient $D = \mathrm{iacl}(d)$, $G = \mathrm{Aut}(D)$, $G' = \mathrm{Autf}(D)$ et $H = \mathrm{Fix}(d)$. Alors G est un groupe localement compact, H un sous-groupe profini ouvert de G tel que l'ensemble des conjugués de H par G a une intersection triviale et tel que l'ensemble des intersections finies de ces conjugués forme un système de voisinages ouverts de 1, et G' est un sous-groupe normal fermé de G tel que $G = G'H$.*

$\rhd$ On a vu précédemment que H est un sous-groupe ouvert profini de G.

Pour tout $g \in G$, $\mathrm{Fix}(g^{-1}(d)) = H^g$. Donc par homogénéité de D, $\bigcap_{g \in G} H^g = \mathrm{Fix}(D) = \{1\}$.

De plus $\mathrm{Fix}(g_1^{-1}(d), \ldots, g_n^{-1}(d)) = H^{g_1} \cap \ldots \cap H^{g_n}$ et donc par définition l'ensemble des intersections finies de conjugués de H forme un système de voisinages ouverts de 1.

Le sous-groupe G' est normal fermé comme tout sous-groupe d'automorphismes forts. Montrons que $G = G'H$. Soit $g \in G$. Alors $g(d)$ a même type fort que d car M est fortement minimale. Donc il existe $g' \in G'$ tel que $g(d) = g'(d)$. D'où $g \in g'H$. $\lhd$

Réciproquement pour le cas non $\aleph_0$-catégorique :

Proposition 2.4.4. *Soient G un groupe topologique infini, G' un sous-groupe normal fermé de G et H un sous-groupe ouvert de G profini tels que l'ensemble des intersections* *finies de conjugués de H forme un système de voisinages ouverts de 1 et tels que $G = G'H$.*

Alors il existe une structure D fortement minimale triviale à valence bornée et réduite à une composante telle que D a pour ensemble de base G/H (ensemble des classes à gauche de G) et $G = \mathrm{Aut}(D)$, $H = \mathrm{Fix}(H)$.

De plus il existe un enrichissement D' de D fortement minimal trivial réduit à une composante tel que $G = \mathrm{Aut}(D')$, $G' = \mathrm{Autf}(D')$ et $H = \mathrm{Fix}(H)$.

$\triangleright$ Le groupe H est profini donc pour tout $g \in G$, le sous-groupe $H \cap H^g$ est d'indice fini dans H car ouvert, et l'intersection $\cap_{g \in G} H^g = \{1\}$. Donc G/H est infini : en effet, ou bien H est fini et comme G infini, G/H est infini, ou bien H est infini et il y a donc une infinité de conjugués de H.

Soit D la structure d'ensemble de base G/H munie pour chaque entier n et pour chaque orbite d'un n-uple de G/H par l'action de G , d'un prédicat n-aire interprété par cette orbite.

Montrons que $G = \mathrm{Aut}(D)$ et que $H = \mathrm{Fix}(H)$:

Tout élément de G induit un automorphisme sur D par son action.

Cette action est transitive donc D est transitive. Cette action est en fait régulière : soit $k \in G$ tel que pour tout $g \in G$, $kgH = gH$. Alors pour tout $g \in G$, $g^{-1}kg \in H$ et donc $k \in H^{g^{-1}}$. Comme l'ensemble des H^g a une intersection triviale, $k = 1$.

De plus $\mathrm{Fix}(gH) \cap G = H^{g^{-1}}$. Par conséquent G est un sous-groupe topologique de $\mathrm{Aut}(D)$.

Comme H est profini, donc en particulier compact, H est fermé.

Soit ϕ est un automorphisme de D fixant H. Soit O un ouvert contenant ϕ. Il existe $g_1, \ldots, g_n$ et $g'_1, \ldots, g'_n$ tels que $\phi(g_iH) = g'_iH$ et tels que O contient l'ouvert de base constitué des automorphismes qui envoient $H, g_1H, \ldots, g_nH$ sur $H, g'_1H, \ldots, g'_nH$. Comme ϕ est un automorphisme, $H, g_1H, \ldots, g_nH$ et $H, g'_1H, \ldots, g'_nH$ sont dans la même orbite par l'action de G et O contient un élément de H.

Donc ϕ est adhérent à H qui est fermé, et $H = \mathrm{Fix}(H)$.

Soit ψ un automorphisme. Alors $\psi(H)$ est un conjugué de H par l'action de G. Il existe donc $g \in G$ tel que $\psi(H) = gH$. Alors $g^{-1}\psi \in H$ et $\psi \in G$.

Montrons maintenant que D est à valence bornée. En effet le nombre de conjugués de gH par $\mathrm{Fix}(H)$ est égal à $[\mathrm{Fix}(H) : \mathrm{Fix}(gH) \cap \mathrm{Fix}(H)] = [H : H \cap H^{g^{-1}}]$. Ce nombre est donc fini. Par conséquent les prédicats d'orbites sont à valence borné. Par (2.2.12) D est fortement minimale triviale à valence bornée et de plus est réduite à une composante car tout gH est algébrique sur H.

Enrichissons D de la manière suivante : pour chaque entier n et chaque relation R à valence bornée de D correspondant à une orbite par G d'un n-uple de D, nous enrichissons D par une relation $E \subseteq R \times R$ qui définit une relation d'équivalence telle que les classes de E correspondent aux orbites par l'action de G' sur les réalisations de R. Comme $G'H = G$, le groupe G' agit transitivement sur D' en fixant globalement chacune des classes d'équivalence. Par (2.2.17) D' est fortement minimale triviale. Le groupe G est inclus dans $\mathrm{Aut}(D')$ puisque G' est normal dans G : soient $g \in G$,

$\bar{a} \in D'$, $\bar{b} \in D'$ et E une relation d'équivalence tels que $E(\bar{a}, \bar{b})$ et montrons qu'alors $E(g(\bar{a}), g(\bar{b}))$. Il existe $g' \in G'$ tel que $\bar{b} = g'(\bar{a})$ et donc $g'' \in G'$ tel que $g(\bar{b}) = (g''g)(\bar{a})$.

Donc $G = \mathrm{Aut}(D')$ car $G \subseteq \mathrm{Aut}(D') \subseteq \mathrm{Aut}(D) = G$. On a alors $H = \mathrm{Aut}_H(D')$.

Toujours par (2.2.17), $G' \subseteq \mathrm{Autf}(D')$. Soient $g \in \mathrm{Autf}(D')$, $\bar{a} \in D$ et E la relation d'équivalence correspondant à $\bar{a}$. On a nécessairement $E(\bar{a}, g(\bar{a}))$, donc il existe $g' \in G'$, tel que $g'(\bar{a}) = g(\bar{a})$. Alors g est dans l'adhérence de G' qui est fermé dans G et donc $G' = \mathrm{Autf}(D')$. $\triangleleft$

Dans le cas $\aleph_0$-catégorique (c'est-à-dire G fini) :

Proposition 2.4.5. *Soient G un groupe fini muni de la topologie discrète, G' un sous-groupe normal de G et H un sous-groupe de G tels que l'ensemble des conjugués de H a une intersection triviale et tels que $G = G'H$.*

Alors il existe une structure M fortement minimale triviale à valence bornée $\aleph_0$-catégorique telle que $\mathrm{acl}(\emptyset) = \emptyset$ et telle que $G = \mathrm{Aut}(D)$, $H = \mathrm{Fix}(d)$ pour $D = \mathrm{iacl}(d)$ une composante non algébrique de M.

De plus il existe un enrichissement M' de M fortement minimal trivial tel que $G = \mathrm{Aut}(D')$, $G' = \mathrm{Autf}(D')$, $H = \mathrm{Aut}_d(D')$ où $D' = \mathrm{acl}_{M'}(d) = \mathrm{iacl}_M(d) = D$.

$\triangleright$ Soit $\bar{d}$ une énumération de G/H. Soit P l'orbite de $\bar{d}$ par l'action de G. Soit D la structure finie $(G/H, P)$ et M l'union d'une infinité de copies disjointes de D. Alors D est une composante de M. Comme l'ensemble des conjugués de H a une intersection triviale, G agit régulièrement sur D. En fait comme D est finie, on voit immédiatement que $G = \mathrm{Aut}(D)$ et $H = \mathrm{Fix}(H)$. Par (2.2.11) M est fortement minimale triviale puisque M est transitive à valence bornée.

Soit M' l'enrichissement de M par la relation $E \subseteq P \times P$ suivante : $E(\bar{a}, \bar{b})$ si et seulement si il existe $\bar{d}_1$ et $\bar{d}_2$ deux copies de $\bar{d}$ dans M, $g \in G$ et $g' \in G'$ tels que $\bar{a} = g(\bar{d}_1)$ et $\bar{b} = g'g(\bar{d}_2)$. Alors M' vérifie les hypothèses du lemme 2.2.11 donc M' est fortement minimale triviale. On a encore de manière évidente, $G = \mathrm{Aut}(D')$, $H = \mathrm{Aut}_H(D')$ et $G' = \mathrm{Autf}(D)$. $\triangleleft$

Dans le cas particulier où la clôture algébrique du vide est vide, nous pouvons donc reconstruire la structure à partir du triplet (G, G', H) :

Corollaire 2.4.6. *Soit M une structure fortement minimale triviale de dimension κ telle que $\mathrm{acl}(\emptyset) = \emptyset$. Soient $C = \mathrm{iacl}(c)$ une composante non algébrique de M, $G = \mathrm{Aut}(C)$, $G' = \mathrm{Autf}(C)$ et $H = \mathrm{Aut}_c(C)$. Soit D la structure (éventuellement finie si G est fini) obtenue à partir de G et H. Soit D' l'enrichissement de D obtenue à partir de G' (2.4.4) ou (2.4.5). Alors la structure réduite de M à L_{Vb} est $\emptyset$-interdéfinissable avec l'union de κ copies disjointes de D et la structure M est $\emptyset$-interdéfinissable avec l'union de κ copies disjointes de D' (où l'on recolle les classes d'équivalence : c'est-à-dire si $\bar{a}_1$ et $\bar{a}_2$ sont deux copies d'un même uple $\bar{a}$ dans D' et si E est une relation sur uples bornés contenant $\bar{a}$ du langage de D' alors on pose $E(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$).*

$\triangleright$ La composante C est en bijection avec D par l'application ϕ qui à $g(c)$ associe gH. Modulo cette bijection ϕ, un prédicat d'orbite de D est une relation à valence bornée fortement minimale de C. Donc ϕ définit un isomorphisme de la structure réduite de

C au langage L_{VbMin} dans la structure D. Par (2.2.11) et (2.2.14), la structure réduite de M au langage à valence bornée (car $\mathrm{acl}(\emptyset) = \emptyset$) est isomorphe à l'union de κ copies disjointes de la structure réduite de C au langage L_{VbMin}.

Montrons maintenant que M est $\emptyset$-interdéfinissable avec l'union de κ copies disjointes de D'. Toujours modulo ϕ, les relations définies de D' par G' sont des relations d'équivalence sur uples bornés e-minimales de C. Nous concluons avec (2.2.14) et (2.2.17). $\lhd$

Remarque. - Une structure fortement minimale triviale telle que $\mathrm{dcl} = \mathrm{acl}$ et $\mathrm{acl}(\emptyset) = \emptyset$ est donc une union de copies disjointes d'un graphe de Cayley d'un groupe.

- Sur l'exemple 2.3.2, en partant de $M = M_5$ alors D est $\emptyset$-interdéfinissable avec M_4.

2.4.3 Unimodularité

Nous remarquons dans cette partie que l'unimodularité dans une structure fortement minimale triviale est équivalente à l'unimodularité du groupe d'automorphismes d'une composante non algébrique. Nous nous servirons de cette remarque dans les sections 2.5 et 2.6. Nous commençons par rappeler les définitions :

E. Hrushovski dans [Hr 92b] introduit la définition d'une structure fortement minimale M unimodulaire en rapport avec l'unimodularité des groupes topologiques localement compacts (voir [Hi 74]) :

Définition - Proposition 2.4.7.

i) Un groupe G localement compact est muni de mesures de Haar (invariantes) à droite et de mesures de Haar (invariantes) à gauche. Deux mesures de Haar à droite (ou à gauche) sont proportionnelles. A partir d'une mesure μ de Haar à droite (resp. à gauche), on obtient une mesure ν de Haar à gauche (resp. à droite) de la manière suivante : on pose $\nu(Y) = \mu(Y^{-1})$ pour tout borel Y de G.

ii) Un groupe G localement compact est **unimodulaire** si toute mesure de Haar à droite est une mesure de Haar à gauche.
A un groupe G localement compact est associé sa **fonction modulaire** : l'homomorphisme α de G dans $(\mathbb{R}^+, .)$ défini par $\mu(gY) = \alpha(g)\mu(Y)$ pour tout borel Y de G et toute mesure de Haar à droite μ.
G est donc unimodulaire si et seulement si $\alpha = 1$.

iii) Soit M une structure fortement minimale saturée.
Pour un uple fini $\bar{d} \in M$ libre, la fonction modulaire associée au groupe localement compact $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\bar{d}))$ (ou au groupe $\mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}(\bar{d}))$) vérifie l'équation :

$$\begin{aligned}\alpha(g) &= \mathrm{mult}(\bar{d}/g(\bar{d}))/\mathrm{mult}(g(\bar{d})/\bar{d}) \\ &= [\mathrm{Fix}(g(\bar{d})) : \mathrm{Fix}(\bar{d}) \cap \mathrm{Fix}(g(\bar{d}))]/[\mathrm{Fix}(\bar{d}) : \mathrm{Fix}(\bar{d}) \cap \mathrm{Fix}(g(\bar{d}))].\end{aligned}$$

iv) M est **unimodulaire** si pour tous uples finis libres $\bar{d}$ et $\bar{d}'$ interalgébriques, $\mathrm{mult}(\bar{d}/\bar{d}') = \mathrm{mult}(\bar{d}'/\bar{d})$ (c'est-à-dire si $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\bar{d}))$ est unimodulaire ou de manière équivalente si $\mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}(\bar{d}))$ est unimodulaire).

v) Si pour tout entier n il existe m_n tel que pour tous uples finis libres de longueur n, $\bar{d}$ et $\bar{d}'$ interalgébriques, $\mathrm{mult}(\bar{d}/\bar{d}') \leq m_n$ alors M est unimodulaire.

Dans le cas trivial il suffit de vérifier l'unimodularité sur les uples réduit à un élément :

Lemme 2.4.8. *Soit M une structure fortement minimale triviale. Alors M est unimodulaire si et seulement si pour tout a libre et b libre tels que a et b sont interalgébriques alors* $\mathrm{mult}(a/b) = \mathrm{mult}(b/a)$.

$\triangleright$ Soit $\bar{a} = a_1 \dots a_n$ libre et $\bar{b} = b_1 \dots b_n$ libre tels que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont interalgébriques. On suppose donc que pour tout i, a_i et b_i sont interalgébriques et que $\mathrm{mult}(a_i/b_i) = \mathrm{mult}(b_i/a_i)$. Il faut montrer que $\mathrm{mult}(\bar{a}/\bar{b}) = \mathrm{mult}(\bar{b}/\bar{a})$.

Nous montrons que $\mathrm{mult}(\bar{a}/\bar{b}) = \mathrm{mult}(a_1 \dots a_{n-1}b_n/b_1 \dots b_{n-1}a_n)$.
Nous utilisons dans les équations suivantes, le fait que dans une théorie stable, si $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont indépendants au-dessus de A alors $\mathrm{mult}(\bar{x}\bar{y}/A) = \mathrm{mult}(\bar{x}/A\bar{y}) \cdot \mathrm{mult}(\bar{y}/A)$.
$\mathrm{mult}(a_nb_1 \dots b_{n-1}/b_n) = \mathrm{mult}(a_n/\bar{b}) \cdot \mathrm{mult}(b_1 \dots b_{n-1}/b_n) = \mathrm{mult}(a_n/\bar{b})$ et
$\mathrm{mult}(a_nb_1 \dots b_{n-1}/b_n) = \mathrm{mult}(b_1 \dots b_{n-1}/a_nb_n) \cdot \mathrm{mult}(a_n/b_n) = \mathrm{mult}(a_n/b_n)$.
D'où $\mathrm{mult}(a_n/\bar{b}) = \mathrm{mult}(a_n/b_n) = \mathrm{mult}(b_n/a_n) = \mathrm{mult}(b_n/a_nb_1 \dots b_{n-1})$.
On en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathrm{mult}(\bar{a}/\bar{b}) &= \mathrm{mult}(a_n/\bar{b}) \cdot \mathrm{mult}(a_1 \dots a_{n-1}/a_n\bar{b}) \\ &= \mathrm{mult}(b_n/a_nb_1 \dots b_{n-1}) \cdot \mathrm{mult}(a_1 \dots a_{n-1}/a_nb_1 \dots b_{n-1}b_n) \\ &= \mathrm{mult}(a_1 \dots a_{n-1}b_n/b_1 \dots b_{n-1}a_n). \end{aligned}$$

$\triangleleft$

Corollaire 2.4.9. *Soit M une structure fortement minimale triviale. Soit $D = \mathrm{iacl}(d)$ une composante non algébrique de M. Soit $G = \mathrm{Aut}(D)$ et $H = \mathrm{Aut}_d(D)$.*

Alors M est unimodulaire si et seulement si G est unimodulaire si et seulement si pour tout $g \in G$, $[H : H \cap H^g] = [H^g : H \cap H^g]$.

2.4.4 Propriété du petit indice

Il est connu que si une structure $\aleph_0$-catégorique a la propriété du petit indice alors ses groupes de Galois (relativement à des ensembles de paramètres finis) ont aussi la propriété du petit indice. (Rappelons que $\mathrm{Gal}_A(M) = \mathrm{Aut}_A(M)/\mathrm{Autf}_A(M)$.)

Nous démontrons dans cette partie que les structures fortement minimales dénombrables, à valence bornée, ou sur un langage fini, ont la propriété du petit indice si et seulement si leurs groupes de Galois ont la propriété du petit indice (2.4.13 et 2.4.14). Ceci permet de retrouver que toutes les structures fortement minimales à valence bornée $\aleph_0$-catégoriques ont la propriété du petite indice (qui est un cas particulier du même résultat pour l'ensemble des structures ω-stables $\aleph_0$-catégoriques).

Définition. Soit G un groupe topologique (dont tous les sous-groupes ouverts sont d'indice dénombrable). On dit que G a la **propriété du petit indice** si tout sous-groupe de G d'indice dénombrable est ouvert.

Soit M une structure dénombrable. On dit que M a la **propriété du petit indice** si le groupe $\mathrm{Aut}(M)$ a la propriété du petit indice.

Remarque 2.4.10. Soient G_1 et G_2 deux groupes topologiques et soit H un sous-groupe ouvert de G_1 d'indice dénombrable. Alors :

i) Le groupe $G_1 \times G_2$ a la propriété du petit indice si et seulement si les groupes G_1 et G_2 ont la propriété du petit indice.

ii) Le groupe G_1 a la propriété du petit indice si et seulement si le sous-groupe H a la propriété du petit indice.

Proposition 2.4.11. *Soit M une structure fortement minimale triviale dénombrable à valence bornée qui a la propriété du petit indice. Soit $\bar{a}$ un uple fini de M. Alors les groupes* $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ *(*$= \mathrm{Gal}(M)$*),* $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\bar{a}))$*,* $\mathrm{Aut}_{\bar{a}}(\mathrm{acl}(\bar{a}))$ *(*$= \mathrm{Gal}_{\bar{a}}(M)$*),* $\mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}(\bar{a}))$ *et* $\mathrm{Aut}_{\bar{a}}(\mathrm{iacl}(\bar{a}))$ *ont la propriété du petit indice.*

$\triangleright$ Soit $(C_i)_{i\in I}$ les composantes non algébriques de M. Soient $d \in M$ non algébrique et $G = \mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}(d))$.

Commençons par montrer que le groupe $\mathrm{Aut}_d(\mathrm{acl}(d))$ a la propriété du petit indice.

Soient O un sous-groupe d'indice dénombrable de $\mathrm{Aut}_d(\mathrm{acl}(d))$ et $O' = \{g \in \mathrm{Aut}_d(M);\ g_{|\mathrm{acl}(d)} \in O\}$. On a $[\mathrm{Aut}_d(M) : O'] = [\mathrm{Aut}_d(\mathrm{acl}(d)) : O]$ car $\mathrm{Aut}_d(M)$ fixe globalement $\mathrm{acl}(d)$.

Donc O' est d'indice dénombrable dans $\mathrm{Aut}_d(M)$. Comme $\mathrm{Aut}_d(M)$ est d'indice dénombrable dans $\mathrm{Aut}(M)$, le groupe O' est ouvert et contient donc le fixateur d'un uple fini $\bar{b}$. Puisque M est à valence bornée $\mathrm{Aut}_d(M) = \mathrm{Aut}_d(\mathrm{acl}(d)) \times \mathrm{Aut}(M \setminus \mathrm{acl}(d))$ (2.2.19) et le groupe O contient donc l'ouvert $\mathrm{Aut}_{\bar{b}\cap\mathrm{acl}(d)}(\mathrm{acl}(d))$ de $\mathrm{Aut}_d(\mathrm{acl}(d))$.

Le groupe $\mathrm{Aut}_d(\mathrm{acl}(d))$ a la propriété du petit indice et nous en déduisons maintenant que les autres groupes ont la propriété du petit indice.

Comme M est à valence bornée, par (2.2.19),

$$\mathrm{Aut}_d(\mathrm{acl}(d)) = \mathrm{Aut}_d(\mathrm{iacl}(d)) \times \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset)).$$

Donc part (2.4.10), $\mathrm{Aut}_d(\mathrm{iacl}(d))$ et $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ ont la propriété du petit indice. De plus comme $\mathrm{Aut}_d(\mathrm{iacl}(d))$ est un sous-groupe ouvert d'indice dénombrable de G, le groupe G a la propriété du petit indice (2.4.10).

On peut supposer que $\bar{a} = \bar{a}_1 \dots \bar{a}_n$ tel que les $\bar{a}_j$ sont dans des composantes distinctes. Soit I_0 l'ensemble des $i \in I$ tel que pour un j, $\bar{a}_j \in C_i$.

Comme M est à valence bornée, par (2.2.19),

$$\mathrm{Aut}_{\bar{a}}(\mathrm{acl}(\bar{a})) \subseteq G^{I_0} \times \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset)) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\bar{a}))$$

et si $\bar{a} \cap \mathrm{acl}(\emptyset) = \emptyset$,

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\bar{a})) = \mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}(\bar{a})) \times \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset)).$$

De plus $\mathrm{Aut}_{\bar{a}}(\mathrm{acl}(\bar{a}))$ est un sous-groupe ouvert d'indice dénombrable de $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\bar{a}))$. Donc comme G et $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ ont la propriété du petit indice, par (2.4.10), $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\bar{a}))$, $\mathrm{Aut}_{\bar{a}}(\mathrm{acl}(\bar{a}))$ $(= \mathrm{Gal}_{\bar{a}}(M))$, $\mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}(\bar{a}))$ et $\mathrm{Aut}_{\bar{a}}(\mathrm{iacl}(\bar{a}))$ ont la propriété du petit indice. $\triangleleft$

Remarque. La structure M_3 (2.3.2) n'a pas la propriété du petit indice puisque le groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\omega$ ne l'a pas : en effet ce groupe à $2^{2^{\aleph_0}}$ sous-groupes d'indice 2, donc des groupes d'indice 2 non ouverts.

En fait un groupe profini séparable qui, pour un entier n possède une infinité de sous-groupes ouverts d'indice dénombrable, contient $2^{2^{\aleph_0}}$ sous-groupes d'indice n [Po 73]. Nous pouvons donc obtenir de nombreuses structures fortement minimales triviales n'ayant pas la propriété du petit indice en utilisant (2.4.2) ou, par la suite, (2.5.6) et (2.5.7).

Nous montrons la réciproque de (2.4.11). Pour cela nous utilisons le résultat démontré par J.D. Dixon, P.M. Neumann et S. Thomas [DNT 86] : le groupe S_ω des permutations de ω a la propriété du petit indice (c'est-à-dire l'ensemble infini dénombrable sans structure à la propriété du petit indice).

Proposition 2.4.12. *Soit M une structure fortement minimale triviale dénombrable à valence bornée non réduite à* $\mathrm{acl}(\emptyset)$. *Soit $d \in M$ non algébrique. Si* $\mathrm{Gal}_d(M)$ *(=* $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset)) \times \mathrm{Aut}_d(\mathrm{iacl}(d))$*) a la propriété du petit indice alors M a la propriété du petit indice.*

$\triangleright$ Soit $G = \mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}(d))$. Par (2.4.10), les groupes G et $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ ont la propriété du petit indice. Par (2.2.19),

$$\mathrm{Aut}(M) = \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset)) \times (G^{\dim(M)} \rtimes S_{\dim(M)}).$$

Toujours par (2.4.10), si $\dim(M)$ est fini alors $\mathrm{Aut}(M)$ a la propriété du petit indice.

Supposons donc M saturée. Soit $(C_i)_{i\in\omega}$ les composantes non algébriques de M. Par hypothèse le groupe $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ a la propriété du petit indice : il suffit donc de montrer que $\mathrm{Aut}(M \setminus \mathrm{acl}(\emptyset))$ ($= \mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M) = G^\omega \rtimes S_\omega$) a la propriété du petit indice (2.4.10). Soit H un sous-groupe d'indice dénombrable de ce groupe. Montrons que H est ouvert. Pour toute partie I de ω, notons $S_{\omega\setminus I}$ le sous-groupe des permutations de ω fixant point par point I. Il existe une partie I finie tel que $1 \rtimes S_{\omega\setminus I} \subseteq H$ car $H \cap (1 \rtimes S_\omega)$ est d'indice dénombrable dans $1 \rtimes S_\omega$ qui a la propriété du petit indice [DNT 86].

Plaçons-nous dans le sous-groupe $(G^I \rtimes S_I) \times (G^{\omega\setminus I} \rtimes S_{\omega\setminus I})$ de $\mathrm{Aut}(M \setminus \mathrm{acl}(\emptyset))$. Soient $H_1 = H \cap \big((G^I \rtimes 1) \times 1\big)$ et $H_2 = H \cap \big(1 \times (G^{\omega\setminus I} \rtimes S_{\omega\setminus I})\big)$.

Soient K_1 la projection de H_1 sur G^I et K_2 la projection de H_2 sur $G^{\omega\setminus I} \rtimes S_{\omega\setminus I}$. Par ce qui précède nous savons que K_2 contient $1 \rtimes S_{\omega\setminus I}$. Donc la projection de K_2 sur $G^{\omega\setminus I}$ est stable par toute permutation d'indice. Le lemme qui suit montre que cette projection est nécessairement égale à $G^{\omega\setminus I}$. Donc $K_2 = G^{\omega\setminus I} \rtimes S_{\omega\setminus I}$.

Le groupe G à la propriété du petit indice, donc G^I aussi (2.4.10). Par conséquent il existe un uple fini non vide $\bar{a} \in \cup_{i\in I} C_i$ tel que $\mathrm{Aut}_{\bar{a}}(\mathrm{iacl}(\bar{a})) \subseteq K_1$.

Toujours par (2.2.19)

$$\mathrm{Aut}_{\bar{a}}(M \setminus \mathrm{acl}(\emptyset)) = \mathrm{Aut}_{\bar{a}}(\mathrm{iacl}(\bar{a})) \times (G^{\omega\setminus I} \rtimes S_{\omega\setminus I}).$$

Donc H contient $\mathrm{Aut}_{\bar{a}}(M \setminus \mathrm{acl}(\emptyset))$ puisque

$$K_1 \supseteq \mathrm{Aut}_{\bar{a}}(\mathrm{iacl}(\bar{a})) \text{ et } K_2 = G^{\omega\setminus I} \rtimes S_{\omega\setminus I}.$$

Le groupe H est donc ouvert.

Montrons maintenant le lemme qui permet de vérifier que $K_2 = G^{\omega\setminus I} \rtimes S_{\omega\setminus I}$:

Lemme. *Soient G un groupe et H un sous-groupe de G^ω d'indice dénombrable. Si H est stable par permutation des indices alors $H = G^\omega$.*

Preuve : soit pour toute partie I de ω, p_I la projection de G^ω sur G^I.

Montrons pour toute partie I infinie et coinfinie de ω que $p_I(H) = G^I$. Comme H est stable par permutation des indices il suffit de le démontrer pour une seule partie. Choisissons une partition infinie de ω par des parties infinies $(I_i)_{i\in\omega}$. Pour tout $i \in \omega$, $p_{I_i}(H) = p_{I_0}(H)$. Donc $H \subseteq p_{I_0}(H)^\omega$. Comme H est d'indice dénombrable, nécessairement $p_{I_0}(H) = G^{I_0}$.

Soit $g \in G^\omega$. Nous allons montrer en deux étapes que $g \in H$.

Soit l'élément $h \in G^\omega$ défini par $h(4n) = h(4n+1)^{-1} = g(n)$ et $h(4n+2) = h(4n+3) = 1$ pour tout $n \in \omega$. Montrons que $h \in H$. Par ce qui précède il existe $h_1 \in H$ tel que pour tout $n \in \omega$, $h_1(4n) = g_n$ et $h_1(4n+1) = 1$. Par permutation des indices, il existe $h_2 \in H$ tel que pour tout $n \in \omega$, $h_2(4n) = h_1(4n+1)$, $h_2(4n+1) = h_1(4n)$, $h_2(4n+2) = h_1(4n+2)$ et $h_2(4n+3) = h_1(4n+3)$. Alors $h = h_2^{-1}h_1 \in H$.

Soit l'élément $g_1 \in G^\omega$ défini par $g_1(4n) = g(4n)$, $g_1(4n+1) = g(4n+1)$ et $g_1(4n+2) = g_1(4n+3) = 1$ pour tout $n \in \omega$. Montrons que $g_1 \in H$. Nous définissons pour cela par induction sur n, deux éléments de G^ω, h_3 et h_4 tels que $h_3(0) = g(0)$, $h_4(0) = 1$, $h_3(1) = h_3(0)^{-1}$, $h_4(1) = g(1)h_3(0)$, $h_3(2) = h_3(3) = h_4(2) = h_4(3) = 1$ et pour tout $n > 0$, $h_4(4n) = h_4(4(n-1)+1)^{-1}$, $h_3(4n) = h_4(4n)^{-1}g(4n)$, $h_3(4n+1) = h_3(4n)^{-1}$, $h_4(4n+1) = g(4n+1)h_3(4n)$ et $h_3(4n+2) = h_3(4n+3) = h_4(4n+2) = h_4(4n+3) = 1$. Ainsi, $g_1 = h_4h_3$. Par ce qui précède $h_3 \in H$. Par une permutation des indices, h_4 est du même type que h_3, donc $h_4 \in H$. Donc $g_1 = h_4h_3 \in H$. Encore par permutation des indices, $g_2 = g_1^{-1}g$, est du même type que g_1. Donc $g_2 \in H$ et $g \in H$. ◁

Corollaire 2.4.13. *Soit M une structure dénombrable fortement minimale triviale à valence bornée non réduite à* $\mathrm{acl}(\emptyset)$. *Soit d un élément non algébrique de M. Alors M a la propriété du petit indice si et seulement si* $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(d))$ *a la propriété du petit indice, si et seulement si* $\mathrm{Gal}_d(M)$ *(*$= \mathrm{Aut}_d(\mathrm{acl}(d))$*) a la propriété du petit indice.*

Corollaire 2.4.14. *Soit M une structure dénombrable non réduite à* $\mathrm{acl}(\emptyset)$ *et fortement minimale triviale sur un langage fini. Soit d un élément non algébrique de M. Alors M a la propriété du petit indice si et seulement si* $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(d))$ *a la propriété du petit indice.*

▷ Par (2.2.15) il existe une partie finie C de M telle que $M' = (M, c;\ c \in C)$ est à valence bornée. Alors $\mathrm{Aut}(M') = \mathrm{Aut}_C(M)$. Donc $\mathrm{Aut}(M')$ est un sous-groupe ouvert d'indice dénombrable dans $\mathrm{Aut}(M)$. Par (2.4.10), ou bien les structures M et M' ont toutes deux la propriété du petit indice, ou bien aucune des deux ne l'a.

Nous décomposons la preuve dans les deux cas suivants : si $\mathrm{acl}_M(\emptyset)$ est infini alors nous pouvons supposer $C \subset \mathrm{acl}_M(\emptyset)$ (2.2.15). Dans ce cas d est encore un élément non algébrique de M'. Alors $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_{M'}(d)) = \mathrm{Aut}_C(\mathrm{acl}_M(d))$ est un sous-groupe ouvert d'indice dénombrable dans $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_M(d)$. Donc $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_{M'}(d))$ a la propriété du petit indice si et seulement si $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_M(d)$ l'a. Par (2.4.13), M a la propriété du petit indice si et seulement si M' a la propriété du petit indice, si et seulement si $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_{M'}(d))$ l'a, si et seulement si $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_M(d))$ l'a.

Dans le second cas $\mathrm{acl}_M(\emptyset)$ est fini. Par (2.2.15) supposons que $\mathrm{acl}_M(\emptyset) \subset C \subseteq \mathrm{acl}_M(d)$. Nous pouvons alors supposer que $\mathrm{acl}_M(\emptyset) = \mathrm{dcl}_M(\emptyset)$. Il suffit pour cela de considérer la structure $(M, a;\ a \in \mathrm{acl}(\emptyset))$ et de remarquer comme ci-dessus que $\mathrm{Aut}(M)$ a la propriété du petit indice si et seulement si $\mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M)$ l'a et que $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(d))$ a cette propriété si et seulement si $\mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(\mathrm{acl}(d))$ l'a.

Supposons donc que $\mathrm{acl}_M(\emptyset) = \mathrm{dcl}_M(\emptyset)$ et que C est une partie non vide de $\mathrm{iacl}_M(d)$. Soit d' un élément non algébrique dans M'. (S'il n'existe pas de tel élément cela signifie que $M = \mathrm{acl}_M(d)$ et dans ce cas il n'y a rien à démontrer.) Montrons que $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_{M'}(d'))$ a la propriété du petit indice si et seulement si $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_M(d))$ l'a. Il suffit de montrer que $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_{M'}(\emptyset))$ et $\mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}_{M'}(d'))$ ont la propriété du petit indice si et seulement si $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_M(d))$ l'a, car $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_{M'}(d')) = \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_{M'}(\emptyset)) \times \mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}_{M'}(d'))$, puisque M' est à valence bornée.

De plus $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_{M'}(\emptyset)) = \mathrm{Aut}_C(\mathrm{acl}_M(d))$. Donc $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_{M'}(\emptyset))$ a la propriété du petit indice si et seulement si $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_M(d))$ l'a (2.4.10).

D'autre part

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}_M(d')) = \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_M(d')) \simeq \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_M(d))$$

car $\mathrm{acl}_M(\emptyset) = \mathrm{dcl}_M(\emptyset)$. Par (2.2.16), il existe une partie C' finie de $\mathrm{iacl}_M(d')$ tel que $\mathrm{Aut}_{C'}(M) \subseteq \mathrm{Autf}(M)$. Si f est un automorphisme fort de M alors $f_{|\mathrm{iacl}_M(d')} \in \mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}_{M'}(d'))$ car cet isomorphisme partiel de M peut se prolonger par l'identité en dehors de $\mathrm{iacl}_M(d)$. Donc $\mathrm{Aut}_{C'}(\mathrm{iacl}_M(d')) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}_{M'}(d')) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}_M(d))$.

Par conséquent $\mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}_{M'}(d'))$ est un sous-groupe ouvert d'indice dénombrable de $\mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}_M(d))$. Par (2.4.10), $\mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}_{M'}(d'))$ a la propriété du petit indice si et seulement si $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_M(d))$ l'a.

Nous concluons de la même manière que dans le cas $\mathrm{acl}(\emptyset)$ infini en utilisant (2.4.13). $\triangleleft$

2.5 Groupe des automorphismes d'une composante fixant un point

Dans cette section nous étudions le fixateur d'un point dans une composante non algébrique. Nous avons remarqué que ce fixateur est toujours un groupe profini (2.4.1)

A l'aide des extensions HNN et de la proposition 2.4.4, nous montrons que tout groupe profini est fixateur d'un point d'une structure fortement minimale unimodulaire à valence bornée et réduite à une composante (2.5.6). De plus si ce groupe profini est séparable, nous pouvons choisir une structure dénombrable. Dans le cas non unimodulaire, nous montrons qu'il est nécessaire et suffisant que le groupe profini contienne deux sous-groupes ouverts homéomorphes et d'indices distincts (2.5.7). Par (2.4.13), ces structures obtenues à partir d'un groupe profini ont la propriété du petit indice si et seulement si ce groupe profini a la propriété du petit indice.

Toujours par des constructions HNN, nous montrons qu'il existe deux structures fortement minimales à valence bornée, l'une unimodulaire, l'autre non, telles que tout groupe profini séparable est homéomorphe au fixateur d'une partie de chacune de ces structures (2.5.8).

Enfin pour tout groupe profini H séparable commutatif et non trivial, nous donnons une construction modèle théorique d'une structure fortement minimale triviale non libre telle que le fixateur d'un point est homéomorphe à H (2.5.10).

2.5.1 Extensions HNN

Nous commençons par rappeler la définition d'une extension HNN, le théorème de forme normale d'une telle extension et le lemme de Britton. Pour plus de détails sur ce sujet consulter par exemple [Co 89].

Définition. Soient H un groupe et $(A_i, A_{-i})_{i\in I}$ une famille de paires de sous-groupes isomorphes de H munie d'isomorphismes α_i entre A_i et A_{-i}. Soient $(p_i)_{i\in I}$ une famille de lettres distinctes et P le groupe libre sur $(p_i)_{i\in I}$. Soit N le sous-groupe normal du produit libre $H * P$ engendré par l'ensemble des $p_i^{-1}a_ip_i(\alpha_i(a_i))^{-1}$ pour $i \in I,\ a_i \in A_i$. Alors $G = (H*P)/N$ est appelé **l'extension HNN** de base H munie des lettres stables (p_i) et des paires de sous-groupes A_i et $A_{-i} = j_i(A_i)$ et est noté $< H, p_i; p_i^{-1}A_ip_i = A_{-i},\ i \in I >$.

Théorème 2.5.1. *(Forme normale)*

Soit l'extension HNN de H, $G =< H, p_i; p_i^{-1}A_ip_i = A_{-i},\ i \in I >$. Soit pour tout $i \in I$, S_i (resp. S_{-i}) un ensemble de représentants des translatés à gauche par H de A_i (resp. A_{-i}) contenant 1.

L'homomorphisme canonique de H dans G est injectif et tout élément g de G s'écrit de manière unique sous la forme :

$$g = h_0p_{i_0}^{\varepsilon_0}h_1 \dots h_{n-1}p_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}}h_n$$

où $n \geq 0,\ \varepsilon_j = \pm 1,\ h_n \in H,\ h_j \in S_{\varepsilon_j i_j}$ pour $j < n$ et si $i_{j-1} = i_j$ et $\varepsilon_{j-1} = -\varepsilon_j$ alors $h_j \neq 1$.
($n = 0$ signifie que $g \in H$).

Remarque 2.5.2. L'existence de la forme normale s'obtient par réduction : si g s'écrit

$$h_0p_{i_0}^{\varepsilon_0}h_1 \dots h_{n-1}p_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}}h_n$$

avec $n \geq 0,\ \varepsilon_j = \pm 1,\ h_j \in H$ alors il existe $k \leq n,\ 0 \leq j_0 < \dots < j_k \leq n$ et pour $0 \leq l < k$, $h'_l \in S_{\varepsilon_{j_l} i_{j_l}}$ et $h'_k \in H$ tel que g s'écrit sous la forme normale suivante :

$$g = h'_0p_{i_{j_0}}^{\varepsilon_{j_0}}h'_1 \dots h'_{k-1}p_{i_{j_{k-1}}}^{\varepsilon_{j_{k-1}}}h'_k.$$

Pour la suite on note la longueur de g, $l(g) := k$ (c'est-à-dire le nombre de p dans l'écriture normale de g).

Définition. Un élément $h_0p_{i_0}^{\varepsilon_0}h_1\dots h_{n-1}p_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}}h_n$ de $H*P$ avec $n\geq 0,\ \varepsilon_j=\pm 1,\ h_j\in H$ a un **pinch** si il existe r tel que $i_r=i_{r-1}$, $\varepsilon_r=-\varepsilon_{r-1}$ et $h_r\in A_{\varepsilon_r i_r}$.

Théorème 2.5.3 (Lemme de Britton). *i) Tout élément de G peut s'écrire par un mot dans $H*P$ sans pinch.*

ii) Si un élément peut être écrit par deux mots sans pinch :

$$h_0p_{i_0}^{\varepsilon_0}h_1\dots h_{n-1}p_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}}h_n$$

et

$$h'_0p_{i'_0}^{\varepsilon'_0}h'_1\dots h'_{n'-1}p_{i'_{n'-1}}^{\varepsilon'_{n'-1}}h_n$$

alors $n=n'$, $i_j=i'_j$ et $\varepsilon_j=\varepsilon'_j$.

iii) Si $g\in H$ s'écrit par un mot de $H*P$ tel que $n>0$ alors ce mot à un pinch.

Il est simple de déduire de ces théorèmes le lemme suivant :

Lemme 2.5.4. *Soit $g\in G$ tel que g s'écrit sous forme normale*

$$h_0p_{i_0}^{\varepsilon_0}h_1\dots h_{n-1}p_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}}h_n.$$

i) Supposons $n>0$ et $g'\in G$ tel que $l(g')<n$ alors $gg'\notin H$.

ii) g^{-1} s'écrit sous forme normale :

$$h'_np_{i_{n-1}}^{-\varepsilon_{n-1}}\dots h'_1p_{i_0}^{-\varepsilon_0}h'_0.$$

iii) Si $g'=h'_0p_{i'_0}^{\varepsilon'_0}h'_1\dots h'_{n-1}p_{i'_{n-1}}^{\varepsilon'_{n-1}}h'_n$ (non nécessairement sous forme normale) et $gg'\in H$ alors $h_nh'_0\in A_{\varepsilon'_0i'_0}$.

Voici enfin un lemme technique que nous utiliserons par la suite plusieurs fois et que nous redémontrons :

Lemme 2.5.5. *Soit $g\in G$ tel que g s'écrit sous forme normale*

$$h_0p_{i_0}^{\varepsilon_0}h_1\dots h_{n-1}p_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}}h_n.$$

avec $n>0$.

i) Supposons $n>0$.

Soit $K_n=A_{-\varepsilon_{n-1}i_{n-1}}$ et pour $1\leq j<n$,

$$K_j=h_j(\alpha_{i_j}^{-\varepsilon_j}(K_{j+1}))h_j^{-1}\bigcap A_{-\varepsilon_{j-1}i_{j-1}}$$

et enfin $K_0=h_0(\alpha_{i_0}^{-\varepsilon_0}(K_1))h_0^{-1}$.

Alors $H\cap H^{g^{-1}}=K_0$

ii) Si pour tout $i\in I$, $A_{-i}=A_i$, A_i normal dans H et α_i est l'identité alors :

$$H\cap H^{g^{-1}}=A_{i_0}\cap A_{i_1}\dots\cap A_{i_{n-1}}\ \text{et}\ H\cap H^g=H\cap H^{g^{-1}}.$$

iii) Si pour tout $i \in I$, $A_{-i} = A_i$ et α_i est l'identité alors :

$$[H : H \cap H^g] = [H : H \cap H^{g^{-1}}].$$

▷ i) Soit pour $0 < j \leq n$, $g_j = h_0 p_{i_0}^{\varepsilon_0} h_1 \dots h_{j-1} p_{i_{j-1}}^{\varepsilon_{j-1}}$.

Soit $h \in H$ tel que $ghg^{-1} \in H$.

Soit $k_n = h_n h h_n^{-1}$. Alors $g_n k_n g_n^{-1} = ghg^{-1}$. Par (2.5.4 iii)) $k_n \in A_{-\varepsilon_{n-1} i_{n-1}} = K_n$.

Toujours en utilisant (2.5.4 iii), on montre par induction pour $1 \leq j < n$, que $k_j = h_j(\alpha_{i_j}^{-\varepsilon_j}(k_{j+1}))h_j^{-1}$ vérifie $g_j k_j g_j^{-1} = ghg^{-1}$ et donc que $k_j \in A_{-\varepsilon_{j-1} i_{j-1}}$. On a alors $k_j \in K_j$.

Alors $ghg^{-1} = h_0 p_{i_0}^{\varepsilon_0} k_1 p_{i_0}^{-\varepsilon_0} h_0^{-1}$. Toujours en utilisant (2.5.4 iii) on en déduit que $ghg^{-1} \in K_0$.

On a donc montré que $gHg^{-1} \cap H \subseteq K_0$.

Réciproquement si $k_0 \in K_0$. On définit par induction pour $0 < j \leq n$, $k_j = \alpha_{i_{j-1}}^{\varepsilon_{j-1}}((h_{j-1} k_{j-1} h_{j-1}^{-1}))$. Alors $g_j k_j g_j^{-1} = k_0$. On a alors $g_n k_n g_n^{-1} = k_0$, d'où $k_0 = g k_n^{h_n} g^{-1}$.

ii) Avec les hypothèses supplémentaires sur l'extension HNN, on a $K_n = A_{i_{n-1}}$ et pour $j > 1$, $K_{j-1} = K_j \cap A_{i_{j-2}}$.

Alors par (2.5.4 ii), $H^g \cap H = H^{g^{-1}} \cap H$.

iii) Remarquons que $[H : H \cap H^g] = [H : H \cap H^{h_0^{-1} g h_n^{-1}}]$ et que $[H : H \cap H^{g^{-1}}] = [H : H \cap H^{(h_0^{-1} g h_n^{-1})^{-1}}]$. Nous pouvons donc supposer que $h_0 = h_n = 1$.

Alors $g^{-1} = p_{i_{n-1}}^{-\varepsilon_{n-1}} h_{n-1}^{-1} \dots h_1^{-1} p_{i_0}^{-\varepsilon_0}$ et donc g^{-1} s'écrit sous forme normale

$$g^{-1} = p_{i_{n-1}}^{-\varepsilon_{n-1}} h'_{n-2} \dots h'_0 p_{i_0}^{-\varepsilon_0} h'_{-1}.$$

Il est facile de vérifier par induction sur j que pour tout $0 < j < n$:

$$h_{n-1}^{-1} h_{n-2}^{-1} \dots h_{n-j}^{-1} A_{i_{n-(j+1)}} = h'_{n-2} h'_{n-3} \dots h'_{n-(j+1)}) A_{i_{n-(j+1)}}.$$

Donc pour tout $0 \leq j < n-1$:

$$A_{i_j}^{{h'}_j^{-1} \dots {h'}_{n-2}^{-1}} = A_{i_j}^{h_{j+1} \dots h_{n-1}}.$$

Par (i), une simple induction montre que :

$$H \cap H^{g^{-1}} = A_{i_{n-1}}^{h_{n-1}^{-1} \dots h_1^{-1}} \cap \dots \cap A_{i_1}^{h_1^{-1}} \cap A_{i_0} \text{ et } H \cap H^g = A_{i_0}^{{h'}_0^{-1} \dots {h'}_{n-2}^{-1}} \cap \dots \cap A_{i_{n-1}}.$$

D'où

$$(H \cap H^{g^{-1}})^{h_1 \dots h_{n-1}} = A_{i_{n-1}} \cap A_{i_{n-2}}^{h_{n-1}} \cap \dots \cap A_{i_0}^{h_1 \dots h_{n-1}} = H \cap H^g.$$

Par conséquent $[H : H \cap H^{g^{-1}}] = [H : H \cap H^g]$. ◁

Maintenant à partir d'un groupe profini, nous construisons une extension HNN unimodulaire et vérifiant les hypothèses de (2.4.4). Ainsi nous obtenons la structure voulue :

Proposition 2.5.6. *Soit H un groupe profini. Il existe une structure D fortement minimale unimodulaire à valence bornée et réduite à une composante telle que $H = \mathrm{Fix}(d)$ $(= \mathrm{Gal}_d(D))$. Si H est séparable, on peut choisir D dénombrable. En fait pour tout κ cardinal infini tel que le cardinal de l'ensemble des sous-groupes normaux ouverts de H est inférieur ou égal à κ, on peut choisir D de cardinal κ.*

$\triangleright$ Soit $(N_i)_{i\in I}$ l'ensemble des sous-groupes ouverts de H. Soit G l'extension HNN $< H, p_i;\ p_i^{-1}N_ip_i = N_i >$.

Soit $g \in G \setminus H$. Si g s'écrit sous forme normale

$$g = h_0 p_{i_0}^{\varepsilon_0} h_1 \dots h_{n-1} p_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}} h_n$$

alors par (2.5.5 ii)

$$H \cap H^{g^{-1}} = H \cap H^g = N_{i_0} \cap \dots \cap N_{i_{n-1}}.$$

Donc (G, H) vérifie les hypothèses de la proposition 2.4.4 et on peut construire D tel que $G = \mathrm{Aut}(D)$ et $H = \mathrm{Fix}(d)$.

D'autre part $[H^g : H \cap H^g] = [H : H \cap H^{g^{-1}}] = [H : H \cap H^g]$ donc D est unimodulaire (2.4.9).

Pour tout $i \in I$ $[H : N_i]$ est fini donc $|D| = |G/H| = \max(\aleph_0, |I|)$. En particulier si H est séparable, I est dénombrable et donc D est dénombrable.

Pour obtenir une structure de cardinalité κ, il suffit de considérer l'extension HNN

$$< H, p_i, q_j; p_i^{-1}N_ip_i = N_i\ (i \in I), q_j^{-1}Hq_j = H\ (j \in \kappa) > .$$

C'est à dire prendre le produit libre de G avec $*_\kappa\mathbb{Z}$. $\triangleleft$

Remarque. i) En nommant d, on obtient que tout groupe profini est groupe d'automorphismes de la clôture algébrique du vide d'une structure fortement minimale à valence bornée et non $\aleph_0$-catégorique.

ii) Si H est fini, on peut simplement choisir comme extension HNN le produit libre de H avec $\mathbb{Z}$, $H * \mathbb{Z}$.

iii) Il y a des exemples de groupes $\mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}(d))$ qui ne sont pas des extensions HNN de $\mathrm{Fix}(d)$: considérons la structure M_4 ou la structure M_5 (2.3.2).

Dans cet exemple $H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes_\psi \mathbb{Z}$ tel que $\psi(2m) = id$ et $\psi(2m+1)(\theta_0, \theta_1) = (\theta_1, \theta_0)$.

Nous montrons que G n'est pas une extension HNN de H. Si c'était le cas, le produit libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * < t >$ se plongerait dans G par un plongement p. Notons ε le générateur de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alors ε est d'ordre 2, donc $p(\varepsilon)$ est de la forme $(\theta_0, \theta_1, 0)$.D'autre part $p(t^2) = (\theta'_0, \theta'_1, 2m)$. Donc $p(\varepsilon)$ et $p(t^2)$ commutent.

Par conséquent $p(t^{-2}\varepsilon t^2) = p(\varepsilon)$ ce qui est impossible car p est un plongement.

Nous traitons ici le cas non unimodulaire : le fixateur d'un point possède nécessairement deux sous-groupes ouverts homéomorphes d'indice distinct (2.4.9). Nous montrons la réciproque par une extension HNN et (2.4.4) :

Proposition 2.5.7. *Soit H un groupe profini. Il existe une structure $D = \mathrm{iacl}(d)$ fortement minimale triviale non unimodulaire réduite à une composante telle que $H = \mathrm{Fix}(d)$ si et seulement si il existe deux sous-groupes ouverts de H, A_1 et A_2 homéomorphes et tels que $[H : A_1] \neq [H : A_2]$.*

Pour tout κ cardinal infini tel que le cardinal de l'ensemble des sous-groupes normaux ouverts de H est inférieur ou égal à κ, on peut choisir D de cardinal κ.

$\triangleright$ Si $H = \mathrm{Fix}(d)$ avec D non unimodulaire. Alors il existe $g \in \mathrm{Aut}(D)$ tel que $[H : H \cap H^g] \neq [H^g : H \cap H^g]$ (2.4.9). Donc $[H : H \cap H^g] \neq [H : H \cap H^{g^{-1}}]$. D'autre part l'automorphisme intérieur défini par g est un homéomorphisme qui envoie $H \cap H^g$ sur $H \cap H^{g^{-1}}$.

Réciproquement soit H un groupe profini et soient A_1 et A_2 deux sous-groupes ouverts de H homéomorphes et d'indices distincts dans H. Soit α l'homéomorphisme qui envoie A_1 sur A_2.

Soit $(N_i)_{i \in I}$ recouvrant l'ensemble des sous-groupes normaux ouverts de H. On suppose que $0 \notin I$. Soit G l'extension HNN $< H, p_i;\ p_0^{-1} A_1 p_0 = \alpha(A_1),\ p_i^{-1} N_i p_i = N_i\ (i \neq 0) >$.

Montrons que pour tout $g \in G$, $H \cap H^{g^{-1}}$ est un sous-groupe ouvert de H. On reprend (2.5.5 i) : soit $g = h_0 p_{i_0}^{\varepsilon_0} h_1 \dots h_{n-1} p_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}} h_n$ sous forme normale, alors K_n est l'un des N_i ou A_1 ou A_2. Si K_{j+1} est un ouvert de H, $\alpha_{i_j}^{-\varepsilon_j}(K_{j+1})$ est encore ouvert, car $\alpha_{i_j} = \pm\alpha$ ou l'identité. D'autre part un automorphisme intérieur de H est un homéomorphisme, donc K_j est encore ouvert. On en déduit par induction que K_0 est un ouvert.

D'autre part pour tout $i \in I$, $H \cap H^{p_i} = N_i$ donc l'intersection des conjugués de H forme un système de voisinages ouverts de 1 dans G qui induit la même topologie que celle de départ sur H.

Enfin $H \cap H^{p_0} = A_2$ et $H \cap H^{p_0^{-1}} = A_1$ donc G n'est pas unimodulaire.

Pour la question de cardinalité il suffit d'utiliser le même argument que dans la preuve pour le cas unimodulaire. $\triangleleft$

Remarque. Certains groupes profinis commutatifs sont fixateurs de structures non unimodulaires. Par exemple tous les groupes de la forme K^ω avec K fini vérifient les hypothèses de la proposition précédente.

Il existe des groupes profinis séparables tels que tout groupe profini séparable est un fermé de chacun de ces groupes. Il suffit pour cela de considérer par exemple le groupe produit de tous les groupes finis. Toujours en utilisant les extensions HNN et (2.4.4), nous montrons la proposition suivante :

Proposition 2.5.8. *Il existe une structure dénombrable D fortement minimale à valence bornée unimodulaire réduite à une composante et une structure dénombrable D' fortement minimale à valence bornée non unimodulaire réduite à une composante telles que pour tout groupe profini séparable H, il existe $X \subseteq D$ et $X' \subseteq D'$ tels que $H = \mathrm{Aut}_X(D) = \mathrm{Aut}_{X'}(D)$.*

$\triangleright$ Soit $(H_i)_{i\in\omega}$ une énumération de tous les groupes finis. Considérons le groupe profini séparable $H = \prod_{i\in\omega} H_i$. Alors tout groupe profini K séparable est isomorphe à un sous-groupe fermé de H : en effet par définition il existe une partie I de ω telle que K est un sous-groupe fermé de $\prod_{i\in I} H_i$. Tout sous-groupe fermé de H est une intersection de sous-groupe ouverts de H car H est profini.

Le groupe H est séparable donc il existe une énumération $(A_i)_{i\in\omega}$ des sous-groupes ouverts de H. Soit G l'extension HNN $< H, p_i;\ p_i^{-1}A_ip_i = A_i >$. Par (2.5.5 i), pour tout $g \in G$, $H \cap H^g$ est un sous-groupe ouvert de H et pour tout $i \in \omega$, $H \cap H^{p_i} = A_i$.

Par (2.4.4) il existe D tel que $G = \mathrm{Aut}(D)$ et $H = \mathrm{Fix}(d)$. La structure D est unimodulaire car pour tout $g \in G$, $[H : H \cap H^g] = [H : H \cap H^{g^{-1}}]$ (2.5.5 iii). Si K est un groupe profini séparable, alors il existe une partie I de ω telle que $K = \cap_{i\in I} A_i$. Donc $K = \mathrm{Fix}(d, p_i(d);\ i \in I)$.

Pour obtenir une structure D' non unimodulaire ayant les mêmes propriétés il suffit de considérer le groupe $H' = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\omega \times H$. Alors tout groupe profini séparable est isomorphe à un sous-groupe fermé de H' car H est un sous-groupe fermé de H'. De plus il existe un sous-groupe ouvert A' de H' homéomorphe à H'. Soit $(A'_i)_{i\in\omega}$ une énumération des sous-groupes ouverts de H'. Soit G' l'extension HNN $< H', q, p_i;\ q^{-1}H'q = A',\ p_i^{-1}A'_ip_i = A'_i >$. Par (2.4.4) la structure D' telle que $G' = \mathrm{Aut}(D')$ et $H = \mathrm{Fix}(d')$ vérifie les propriétés voulues. $\triangleleft$

2.5.2 Structures non libres pour un groupe profini commutatif séparable

Les constructions précédentes par extensions HNN donnent des structures libres (c'est-à-dire à valence bornée). Par un autre type de construction dans le cas où H est un groupe profini séparable, non trivial et commutatif, nous obtenons des structures non libres. Par séparabilité on peut voir H comme limite projective d'une famille de groupes finis $(H_n)_{n\in\omega}$ munie pour tout $n \in \omega$ d'une projection p_n de H_{n+1} dans H_n. Nous construisons en deux étapes une structure fortement minimale triviale unimodulaire non libre tel que le groupe H est le fixateur d'un point. La première étape consiste en une construction d'une structure à valence bornée où H apparaît comme fixateur d'une partie dénombrable. Cette première construction ne nécessite pas l'hypothèse H commutatif mais cette hypothèse simplifie la preuve qui utilise (2.2.11). Ensuite nous enrichissons la structure à valence bornée par des relations d'équivalence finies afin que H soit le fixateur d'un point. Nous vérifions alors par (2.2.17) que la structure obtenue est toujours fortement minimale. Il est nécessaire ici que H soit commutatif.

Enfin cette construction est une généralisation de l'exemple 2.3.2 : en effet en partant du groupe profini $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, nous obtenons par (2.5.9), la structure M_3 et par l'enrichissement (2.5.10), la structure M_5.

Construction 2.5.9. On considère le langage L suivant : pour tout $n \in \omega$ une relation binaire R_n et une fonction binaire P_n définie sur les réalisations de R_n et pour tout $h \in H_n$ des fonctions unaires g_h. L'ensemble de base de notre structure sera le produit

libre des groupes $H_n \times \mathbb{Z}$. (On ne met pas la loi de groupe dans la structure D.)
Soit $D = (*_{n\in\omega}(H_n \times \mathbb{Z}), L)$ tel que :

- $R_n := \{(x, (h,1)\cdot x)/\ x \in D,\ h \in H_n\}$,
- $g_h(x) = (h,0)\cdot x$ pour $x \in D$,
- $P_n(x, (h,1)\cdot x) = (p_n(h),1)\cdot x$ pour $x \in D$ et $h \in H_{n+1}$.

La structure D est définie de telle manière que pour tout $x \in D$ et tout $n \in \omega$, H_n agit régulièrement sur l'ensemble des $y \in D$ tels que $R_n(x,y)$, et de plus telle que les actions de H_{n+1} et H_n sont compatibles avec p_n.

La structure D est fortement minimale triviale et $H = \mathrm{Aut}_1(X)$ pour $X := \{(h,1)/\ n \in \omega,\ h \in H_n\} \cup \{1\}$.
La structure D est unimodulaire car pour tout $x \in D$ et $h \in H_n$, $\mathrm{mult}((h,1)\cdot x/x) = \mathrm{mult}(x/(h,1)\cdot x)$.

▷ Nous avons un langage à valence bornée.

De plus D est transitive : soient x, y deux éléments de D et f la bijection de D définie par $f(t) = t\cdot x^{-1}\cdot y$, alors f est un automorphisme de la structure D qui envoie x sur y.

Donc D est fortement minimale triviale (2.2.11).

D'autre part pour tout x et $k \in H_n$, $(k,0)\cdot x$ est définissable sur x et $(k,1)\cdot x$ est algébrique sur x. Donc D est réduite à une composante.

Nous montrons maintenant que H est homéomorphe à $\mathrm{Aut}_1(X)$. Soit l'application

$$\phi : \begin{array}{ccl} \mathrm{Fix}(1) & \to & \prod_{n\in\omega} H_n \\ f & \mapsto & (h_n^{-1})_{n\in\omega};\ f((1_n,1)) = (h_n,1). \end{array}$$

Alors ϕ est un morphisme : soient f_1 et f_2 dans Fix(1) tels que $\phi(f_1) = (h_{1,n}^{-1})$ et $\phi(f_2) = (h_{2,n}^{-1})$. Alors

$$\begin{aligned} f_1 \circ f_2((1_n,1)) &= f_1((h_{2,n},1)) \\ &= f_1(g_{h_{2,n}}((1_n,1))) \\ &= g_{h_{2,n}}(f_1((1_n,1))) \\ &= (h_{2,n},0)\cdot(h_{1,n},1) \\ &= (h_{2,n}h_{1,n},1). \end{aligned}$$

Le noyau de ϕ est égal à $\mathrm{Fix}(X)$ et $\mathrm{Fix}(1)/\mathrm{Fix}(X) = \mathrm{Aut}_1(X)$.

L'image de ϕ est incluse dans H : soit $f \in \mathrm{Fix}(1)$.
Pour tout $n \in \omega$, $P_n(1,(1_{n+1},1)) = (1_n,1)$, donc $P_n(1, f(1_{n+1},1)) = f(1_n,1)$ et par conséquent, $p_n(\phi(f)_{n+1}) = \phi(f)_n$.

Réciproquement : soit $h \in H$. Nous allons définir $f \in \mathrm{Fix}(1)$ tel que $\phi(f) = h^{-1}$.

Tout élément $x \in D$ s'écrit de manière unique sous la forme normale suivante : $x = (k_1,n_1)\dots(k_m,n_m)$ tel que pour tout $i \in \{1,\dots,m\}$, $(k_i,n_i) \in H_{j_i}\times\mathbb{Z}\setminus\{(1_{j_i},0)\}$ et $j_i \neq j_{i+1}$.

Pour un tel élément $x \in D$, on pose $f(x) = (k_1 h_{j_1}^{n_1}, n_1)\dots(k_m h_{j_m}^{n_m}, n_m)$.

Du fait que H est commutatif il est facile de vérifier que pour tout $x \in D$ et $k \in H_n$, $f((k,0)\cdot x) = (k,0)\cdot f(x)$ et $f((k,1)\cdot x) = (kh_n, 1)\cdot x$. Ceci permet de vérifier simplement que f est un automorphisme de D.

Montrons l'unimodularité : ce qui précède montre que pour tout $n \in \omega$, l'ensemble des conjugués de $(1_n, 1)$ par Fix(1) est égal à $\{(h,1)/h \in H_n\}$ et de même l'ensemble des conjugués de $(1_n, -1)$ par Fix(1) est égal à $\{(h,-1)/h \in H_n\}$. Donc pour tout $x \in D$ et $h \in H_n$, $\mathrm{mult}((h,1)\cdot x/x) = \mathrm{mult}(x/(h,1)\cdot x)$. On en déduit que si x et y sont dans D il existe $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$, tel que $\mathrm{mult}(x_i/x_{i+1}) = \mathrm{mult}(x_{i+1}, x_i)$.

Pour conclure il suffit de remarquer la propriété suivante de la multiplicité : si a,b et c sont deux à deux interalgébriques et si $\mathrm{mult}(a/b) = \mathrm{mult}(b/a)$, $\mathrm{mult}(b/c) = \mathrm{mult}(c/b)$ alors $\mathrm{mult}(a/c) = \mathrm{mult}(c/a)$. En effet :

$$\begin{aligned}
\mathrm{mult}(a/c)\cdot\mathrm{mult}(b/ac) &= \mathrm{mult}(ab/c)\\
&= \mathrm{mult}(a/bc)\cdot\mathrm{mult}(b/c) = \mathrm{mult}(a/bc)\cdot\mathrm{mult}(c/b)\\
&= \mathrm{mult}(ac/b)\\
&= \mathrm{mult}(c/ba)\cdot\mathrm{mult}(a/b) = \mathrm{mult}(c/ba)\cdot\mathrm{mult}(b/a)\\
&= \mathrm{mult}(cb/a) = \mathrm{mult}(c/a)\cdot\mathrm{mult}(b/ca).
\end{aligned}$$

$\triangleleft$

Construction 2.5.10. Soit D la structure définie par la construction 2.5.9. Soit D' la structure de D enrichie par des relations $(E_n)_{n\in\omega}$ tel que pour tout $n \in \omega$, $E_n \subset R_n \times R_n$ et E_n est une relation d'équivalence sur les couples réalisant R_n définissant les $|H_n|$ classes suivante :

$$C_h := \{(x, (h,1)\cdot x);\ x \in D\}.$$

D' est fortement minimale triviale unimodulaire, $H = \mathrm{Fix}(1)$ et si H n'est pas trivial D' n'est pas libre.

$\triangleright$ Pour tous x, y éléments de D et f l'automorphisme de D défini par $f(t) = t\cdot x^{-1}\cdot y$, qui envoie x sur y, est un automorphisme de D' qui fixe globalement chaque classe d'équivalence.

Par conséquent D' vérifie les hypothèse du lemme 2.2.17 et est donc fortement minimale triviale.

On reprend les notations de la preuve précédente :

Le morphisme ϕ devient injectif car $\mathrm{Fix}(X) = \{id\}$: en effet si l'on fixe X, on fixe toutes les classes d'équivalence et alors tout devient définissable.

Le morphisme ϕ est toujours surjectif : soit $h \in H$. On reprend l'automorphisme f de D qui s'envoie sur h^{-1}. Il est simple de vérifier que f est un automorphisme de D' qui envoie pour $k \in H_n$ la classe C_k sur C_{kh_n}.

On a donc $\mathrm{Fix}(1) = H$.

D'autre part si H n'est pas trivial, pour $h \neq 1$, l'automorphisme f correspondant ne fixe pas toutes les classes d'équivalence. Par conséquent D' n'est pas libre. $\triangleleft$

2.6 Structures fortement minimales triviales et finiment axiomatisées

En utilisant les résultats de A.A. Ivanov, nous montrons dans cette partie que toute structure fortement minimale triviale finiment axiomatisable est unimodulaire (2.6.5) et que l'existence d'une structure fortement minimale triviale finiment axiomatisée implique l'existence d'une telle structure à valence bornée réduite à une composante telle que le fixateur d'un point est infini (2.6.7).

A.A. Ivanov [Iv 93] a montré, en utilisant son résultat (2.2.15), qu'à partir d'une structure fortement minimale finiment axiomatisée on peut toujours se ramener à une structure à valence bornée réduite à une composante finiment axiomatisée :

Proposition 2.6.1. *[Iv 93] Si M est une structure finiment axiomatisée fortement minimale triviale ω-saturée, alors il existe $C \subseteq M$ fini tel que $(M, c; c \in C)$ est à valence bornée et encore finiment axiomatisée.*

Remarque 2.6.2. On peut oublier la composante algébrique : la structure D d'une composante non algébrique d'une structure fortement minimale à valence bornée et finiment axiomatisée est encore fortement minimale à valence bornée et finiment axiomatisée.

Ceci permet à A.A. Ivanov [Iv 93] d'énoncer le théorème suivant à partir du théorème analogue pour un graphe connexe fortement minimal à valence bornée et finiment axiomatisé qu'il avait démontré auparavant [Iv 89] :

Théorème 2.6.3. *([Iv 89] et [Iv 93]) Soit M une structure fortement minimale à valence bornée et finiment axiomatisée. Soit $D = \mathrm{iacl}(d)$ une composante non algébrique de M, $G = \mathrm{Aut}(D)$ et $H = \mathrm{Aut}_d(D)$ le fixateur de d. Soit $< X, \Sigma >$ une présentation de H telle que pour tout $x \in X$ il existe $x' \in X$ vérifiant $xx' \in \Sigma$. Alors :*

- *i) il existe une partie finie Y de G, un ensemble fini Σ' de mots sur $X \cup Y$, et un ensemble Σ'' de mots du type $yxy^{-1}h$ où $x \in X$, $y \in Y$ et h est un mot sur X et où pour tout $x \in X$, $y \in Y$ il existe un unique mot de ce type dans Σ'', tels que $< X \cup Y, \Sigma \cup \Sigma' \cup \Sigma'' >$ est une présentation de G.*
- *ii) Il existe $g_1, \dots, g_n$ dans G tel que pour tout $g \in G$ il existe $m > 0$ et $h \in H$ tel que g^m est conjugué à l'un des hg_i.*

Par ce théorème il est évident que si H est fini alors G vérifie les propriétés de la conjecture A (ceci est nécessaire car si G est finiment présenté alors H est dénombrable donc fini car il est profini). On peut donc se demander si le fixateur d'un point dans une structure fortement minimale à valence bornée et finiment axiomatisée est nécessairement fini. Malheureusement la réponse est négative : d'une part nous construisons à partir d'un groupe vérifiant les hypothèses de la conjecture A, un graphe fortement minimal à valence bornée finiment axiomatisable tel que $H = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\omega$ (2.6.6). D'autre part nous montrons que l'existence d'une structure fortement minimale triviale finiment axiomatisée implique l'existence d'une telle structure à valence bornée dont le fixateur d'un point est infini (2.6.7).

Auparavant nous déduisons à partir des résultats de A.A. Ivanov et du lemme 2.6.4 suivant facile à vérifier que toute structure fortement minimale triviale finiment axiomatisable est unimodulaire :

Lemme 2.6.4. *Soit M une structure fortement minimale saturée. Soit $A \subseteq M$ tel que $|A| < |M|$. Alors M est unimodulaire si et seulement si $(M, a; a \in A)$ est unimodulaire.*

Proposition 2.6.5. *Toute structure fortement minimale triviale finiment axiomatisable est unimodulaire.*

$\triangleright$ Soit M une telle structure. Par interdéfinissabilité on peut supposer M finiment axiomatisée.

Par (2.6.1) et (2.6.4), on peut supposer M à valence bornée. Alors M est unimodulaire si et seulement si $G = \mathrm{Aut}(D)$ est unimodulaire où $D = \mathrm{iacl}(d)$ est une composante non algébrique de M (2.4.9).
Soit α la fonction modulaire correspondant à G (voir 2.4.7). Alors α vaut 1 sur $H = \mathrm{Aut}_d(D)$. Soit $g \in G$. Si g est d'ordre fini alors $\alpha(g) = 1$ car il existe m tel que $g^m = 1$ donc tel que $\alpha(g)^m = 1$. Sinon par le résultat de A.A. Ivanov (2.6.3 ii), il existe $g_1, \ldots, g_n$ dans G tels que pour tout $k > 0$ il existe $m_k > 0$, i_k et $h_k \in H$ tels que g^{km_k} est conjugué à $h_k g_{i_k}$. On en déduit qu'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ et r, s distincts tels que $\alpha(g^r) = \alpha(g^s) = \alpha(g_i)$. D'où $\alpha(g) = 1$. $\triangleleft$

Construction 2.6.6. S'il existe un groupe vérifiant les propriétés de la conjecture A alors il existe un graphe connexe à valence bornée fortement minimal trivial finiment axiomatisé tel que $\mathrm{Fix}(x) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\omega$ pour tout élément x du graphe. De plus comme $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\omega$ n'a pas la propriété du petit indice, le graphe non plus (2.4.11).

$\triangleright$ Soit G un groupe vérifiant les hypothèses de la conjecture A.

Soit $< a_1, \ldots, a_n / w_1, \ldots w_k >$ une présentation de G. Soient $g_1, \ldots, g_n$ les éléments de G correspondant à $a_1, \ldots, a_n$.

On peut supposer que les g_i sont tous distincts de 1 et que pour tout i il existe j tel que $g_j = g_i^{-1}$. On peut aussi supposer que la condition sur les classes de conjugaisons s'exprime de la façon suivante : pour tout $g \neq 1 \in G$, il existe $m > 0$ tel que g^m est conjugué à l'un des g_i.

La première structure finiment axiomatisable est simplement le graphe de Cayley de G dans le langage réduit à $\{a_1, \ldots, a_n\}$, c'est à dire $D_1 = (G, a_1, \ldots, a_n)$ tel que $a_i(g) = g_i g$. Dans ce cas acl = dcl.
La théorie de D_1 est axiomatisée par :$\forall x \ a_i(x) \neq x$ $(1 \leq i \leq n)$ et $\forall x \ w_j(x) = x$ $(1 \leq j \leq k)$. Ceci vient du fait que la condition sur les classes de conjugaisons implique que si $w \neq 1$, alors g, correspondant au mot w dans G, a une puissance conjuguée à l'un des g_i, donc l'axiome $\forall x \ a_i(x) \neq x$ implique $\forall x \ w(x) \neq x$.

Alors D_1 est fortement minimale triviale car transitive et à valence bornée (2.2.11).

Pour obtenir maintenant une structure telle que $\mathrm{Fix}(x)$ est infini on double G et on munit cette structure du même type de langage que le graphe de Cayley mais sur les doublons :
Soit $D_2 = (G \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, R_1, \ldots, R_n)$ où $R_i = \{(g, \varepsilon), (g_i.g, \varepsilon')/g \in G, \ \varepsilon, \ \varepsilon' \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$.

Il est alors évident que la relation d'équivalence E, dont les classes d'équivalence sont les doublons, est définissable dans D_2. On en déduit une axiomatisation simple de la théorie de D_2 : E est une relation d'équivalence compatible avec les R_i telle que la structure induite sur D_2/E est élémentairement équivalente à D_1.
Donc D_2 est finiment axiomatisable. La structure D_2 est aussi fortement minimale triviale car D_2 est transitive et à valence bornée.

Pour tout $x \in D_2$, $\mathrm{Fix}(x) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\omega$ (2.2.11). $\triangleleft$

Proposition 2.6.7. *L'existence d'une structure fortement minimale triviale finiment axiomatisée implique l'existence d'une telle structure à valence bornée réduite à une composante telle que* $\mathrm{Fix}(x)$ *est infini.*

$\triangleright$ Par (2.6.1) et (2.6.2) il existe une structure D finiment axiomatisée fortement minimale triviale réduite à une composante et à valence bornée. Soient $R_1, \dots, R_n$ les relations à valence bornée définissant le langage. Nous doublons D de façon à être sûr que le fixateur d'un point est infini, de la même manière que pour (2.6.6).

Soit $D' = (D \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, R'_1, \dots, R'_n)$ où pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$R'_i = \{((x_1, \varepsilon_1), \dots, (x_l, \varepsilon_l));\ x_j \in D,\ \varepsilon_j \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ et } lR_i(x_1, \dots, x_l)\}.$$

Pour les mêmes raisons que dans la construction 2.6.6, D' est fortement minimale triviale et finiment axiomatisée. De plus pour $x \in D$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\omega \subseteq \mathrm{Fix}(x)$. $\triangleleft$