Université Paris 7 - Denis Diderot

Thèse de doctorat - Mathématiques

Spécialité : logique et fondements de l'informatique

Ensembles minimaux localement modulaires

Groupes d'automorphismes d'ensembles triviaux et Sous-groupes $\bigwedge$-définissables du groupe additif d'un corps séparablement clos

Thomas Blossier

Soutenue le 17 décembre 2001

Directrice :
Élisabeth Bouscaren

Rapporteurs :
Dugald Macpherson
Frank Wagner

Jury :
Élisabeth Bouscaren
Claude Dellacherie
Françoise Delon
Daniel Lascar
Dugald Macpherson
Frank Wagner

Remerciements

J'ai eu beaucoup de plaisir à suivre les cours de DEA de René Cori, Françoise Ville, Ramez Labib-Sami, Françoise Delon et Élisabeth Bouscaren. Leurs cours m'ont initié aux joies de la logique mathématique et je les en remercie.

Élisabeth Bouscaren a su ensuite m'inciter à poursuivre en Théorie de Modèles et j'ai eu la chance de travailler sous sa direction. Avec patience elle m'a exposé et expliqué divers pans de la théorie de la stabilité et de la stabilité géométrique, et m'a proposé des sujets variés dans ces domaines. Ses encouragements et son soutien tout au long de ce travail m'ont été d'une grande aide. Je la remercie également pour ses questions, sa lecture attentive du manuscrit, ses commentaires et corrections. Enfin, j'espère ne pas l'avoir trop privée de Benjamin ces derniers temps.

Les travaux récents d'Élisabeth Bouscaren et Françoise Delon sur les corps séparablement clos sont le point de départ du troisième chapitre. Je remercie Françoise Delon pour ses explications sur le sujet, ses nombreuses suggestions, ses corrections et ses commentaires sur ce chapitre. Une place dans le jury lui revenait naturellement et je suis très heureux qu'elle l'ait acceptée.

Pour ce troisième chapitre, je suis également redevable aux questions stimulantes de Thomas Scanlon.

Le second chapitre doit beaucoup aux discussions avec Alexandre Ivanov et aux suggestions de Thierry Coulbois, d'Ehud Hrushovski et de Daniel Lascar. Je les en remercie et je suis honoré que Daniel Lascar soit membre du jury.

Je remercie vivement mes rapporteurs Dugald Macpherson et Frank Wagner d'avoir accepté cette tâche et de l'avoir accomplie en un si bref délai.

Claude Dellacherie m'a, lui aussi, fait le plaisir d'accepter de faire partie du jury. Je lui suis reconnaissant de m'avoir soutenu, il y a quatre ans, dans mon refus du service militaire en m'accueillant chaleureusement dans la bibliothèque (qui n'était pas toujours bien chauffée) du laboratoire de mathématiques à Rouen. J'espère n'y avoir pas trop mis de désordre par mon incompétence. Cette expérience d'"aide-bibliothécaire" fut agréable et m'a permis de rencontrer les membres du laboratoire et du département de maths de l'université de Rouen. Je les remercie pour leur sympathie et pour m'avoir soutenu en m'accordant un poste d'ATER.

J'ai apprécié l'accueil chaleureux de l'équipe de logique et de l'UFR de maths de Paris 7. Des remerciements particuliers à tous les thésards et ex-thésards pour leur humour et bonne humeur, et également à Odile Ainardi, Jacqueline Lepage et Michèle Wasse pour leur bonne humeur et pour tous les services qu'elles m'ont rendus.

Plus de dix ans après, je voudrais remercier Pierre Bequin pour le plaisir que m'ont procuré à l'époque ses devoirs en temps libre au Lycée de Sillé le Guillaume. Il a certainement contribué ainsi à l'orientation de mes études.

Je n'oublie pas mes amis et ma famille qui furent d'un grand soutien. Des pensées toutes particulières à Anne, Théo et Anatole.

Table des matières

Introduction

Au début des années 80, le problème, jusqu'alors ouvert, de la non finie axiomatisabilité des théories totalement catégoriques, est résolu à la fois par B. Zil'ber [Zil 81] et par G. Cherlin, L. Harrington et A. Lachlan [CHL]. Plus généralement, on a longtemps cru qu'aucune théorie $\aleph_1$-catégorique n'était finiment axiomatisée. Ceci fut réfuté par des constructions de contre-exemples dues à M. Peretyat'kin [Pe 80, Pe 91], puis à E. Baisalov [Ba 91]. Cependant, l'existence d'une théorie fortement minimale finiment axiomatisée reste une question ouverte. D'autre part, les exemples cités précédemment ont tous une géométrie triviale et laissent donc la question suivante ouverte : existe-t-il des théories $\aleph_1$-catégoriques finiment axiomatisées non triviales ? E. Hrushovski [Hr 94] a répondu partiellement à cette question en prouvant qu'une théorie $\aleph_1$-catégorique finiment axiomatisée est nécessairement localement modulaire.

Par ailleurs, la théorie d'un espace vectoriel sur un corps infini, finiment présenté en tant qu'anneau, est évidemment un exemple classique de théorie fortement minimale finiment axiomatisable non triviale. Mais l'existence de tels corps est une question également ouverte. Réciproquement, E. Hrushovski [Hr 94] a conjecturé que le corps des quasi-endomorphismes associé à une théorie $\aleph_1$-catégorique localement projective finiment axiomatisée est finiment présenté en tant qu'anneau.

Pour le cas trivial, il a été conjecturé que l'existence d'une théorie fortement minimale triviale finiment axiomatisée implique l'existence d'un groupe G infini, de présentation finie et possédant un nombre fini de classes de conjugaisons $C_1, \ldots, C_k$ telles que pour tout élément de $g \in G$, il existe $m > 0$ tel que g^m est dans l'un des C_i. La réciproque de cette conjecture est évidente : il suffit de considérer le graphe de Cayley d'un tel groupe G, mais l'existence de ce groupe est aussi une question ouverte.

De nombreuses questions se posent naturellement autour de ces deux conjectures. Certaines de ces questions sont à l'origine de ce travail, même s'il ne porte pas directement sur les questions de finie-axiomatisabilité. Nous appellerons, par la suite conjecture A, la conjecture concernant le cas trivial et conjecture B, la conjecture de E. Hrushovski.

Des résultats d'A. Ivanov [Iv 89, Iv 93] montrent qu'un groupe naturel qui pourrait vérifier les propriétés de la conjecture A est le groupe G des automorphismes d'une composante non algébrique d'une structure fortement minimale à valence bornée finiment axiomatisée. Rappelons qu'une composante non algébrique est $\mathrm{acl}(a) \setminus \mathrm{acl}(\emptyset)$ pour un élément a non algébrique, et qu'une structure est à valence bornée si elle a l'élimination des quantificateurs aux formules à valence bornées qui sont les formules du type $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ tel que si $(a_1, \ldots, a_n)$ réalise ϕ alors les éléments $a_1, \ldots, a_n$ sont inter-algébriques. Une structure fortement minimale à valence bornée est donc évidemment triviale.

Notons H le sous-groupe de G qui fixe un point de la composante non algébrique. A. Ivanov a en fait montré que le groupe G satisfait les propriétés voulues si et seulement si le sous-groupe H est fini.

Nous avions déduit des résultats d'A. Ivanov qu'une structure fortement minimale triviale finiment axiomatisée est unimodulaire (c'est-à-dire pour tous éléments non algébriques a et b, $\mathrm{mult}(a/b) = \mathrm{mult}(b/a)$) (2.6.5). Puis, nous avions remarqué que l'existence d'une structure fortement minimale triviale finiment axiomatisée implique l'existence d'une structure fortement minimale à valence bornée finiment axiomatisée, dont le groupe H est infini, et donc, dont le groupe G ne vérifie pas les propriétés de la conjecture A (2.6.7).

Ces résultats ont motivé notre étude des structures fortement minimales à valence bornée, des groupes G et H qui leurs sont associés, et plus généralement, des groupes d'automorphismes de structures fortement minimales triviales.

Nous commençons le **second chapitre** par la caractérisation des structures fortement minimales à valence bornée par leurs groupes d'automorphismes : une structure fortement minimale triviale saturée est à valence bornée si et seulement si le groupe de ses automorphismes qui fixent globalement chacune de ses composantes est le produit des groupes d'automorphismes de chaque composante (2.2.19 et 2.2.20).

L'étude d'un langage "canonique minimal" des structures fortement minimales triviales nous a permis de donner une construction générale de structures fortement minimales à valence bornée (2.2.12), et d'en déduire une seconde construction de structures fortement minimales triviales qui ne sont pas à valence bornée par des enrichissements des structures provenant de la première construction (2.2.17).

Nous présentons des exemples de telles constructions dans la section 2.3.

Dans la section suivante, nous nous intéressons au groupe des automorphismes d'une composante non algébrique. A une structure fortement minimale, nous associons le triplet (G, G', H) : G est le groupe des automorphismes d'une composante non algébrique, G' le sous-groupe des automorphismes forts de cette composante et H le sous-groupe des automorphismes fixant un point de cette composante. Nous donnons une caractérisation des triplets associés aux structures fortement minimales triviales. Un triplet (G, G', H) est associé à une structure fortement minimale triviale si et seulement si il satisfait les propriétés suivantes : G est localement compact, H est un sous-groupe profini ouvert de G tel que l'ensemble des intersections finies des conjugués de H par G forme un système de voisinages ouverts de 1, et G' est un sous-groupe normal fermé de G tel que $G = G'H$ (2.4.3 et 2.4.4). Remarquons ici que si $G = G'$, la structure fortement minimale ainsi construite est à valence bornée : en effet, une structure fortement minimale triviale est à valence bornée si et seulement tout automorphisme d'une composante non algébrique est fort (2.2.8).

Nous montrons, de plus, qu'une structure fortement minimale triviale, dont la clôture algébrique du vide est vide, peut être reconstruite à partir de son triplet (G, G', H) (2.4.6).

Ensuite, nous nous intéressons particulièrement au sous-groupe H, fixateur d'un point non algébrique. Ce groupe H est nécessairement un groupe profini. Réciproquement, nous montrons que pour tout groupe profini K, il existe une structure fortement minimale à valence bornée unimodulaire dont le sous-groupe H est homéomorphe à K (2.5.6). Nous utilisons pour cela des extensions HNN de K qui nous permettent d'obtenir des couples (G, H) (c'est-à-dire des triplets (G, G, H)) qui vérifient les conditions précédentes. Dans ces constructions on a donc toujours $G' = G$ et par conséquent on obtient à chaque fois des structures à valence bornée. Dans le cas particulier d'un groupe K profini séparable et commutatif non trivial, nous présentons un autre type de construction d'une structure fortement minimale triviale dont le sous-groupe H est aussi homéomorphe à K, mais qui, elle, n'est pas à valence bornée (2.5.10).

Enfin, nous montrons qu'une structure dénombrable fortement minimale, à valence bornée ou sur un langage fini, a la propriété du petit indice si et seulement si le groupe des automorphismes de la clôture algébrique d'un point non algébrique a cette même propriété du petit indice (2.4.13 et 2.4.14).

Explicitons maintenant la conjecture B. Une structure fortement minimale localement modulaire non trviale est équialgébrique à un groupe minimal localement modulaire $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissable, c'est-à-dire minimal 1-basé (Hrushovski [Hr 85]).

De manière générale, E. Hrushovski et A. Pillay [HP 87] ont démontré que la structure induite sur un groupe G 1-basé $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissable est une structure abélienne : tout ensemble relativement définissable de G^m est une combinaison booléenne finie de translatés de sous-groupes définissables de G^m.

De plus, Hrushovski [Hr 85] a donné une description de la géométrie pour la classe des groupes minimaux 1-basés $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissables : soient G un groupe minimal $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissable et $\mathrm{QsE}(G)$ l'anneau des quasi-endomorphismes de G, c'est-à-dire l'anneau des endomorphismes définissables du groupe G quotienté par sa clôture algébrique du vide G_0, alors $\mathrm{QsE}(G)$ est un corps et si G est localement modulaire (c'est-à-dire 1-basé), la géométrie de G est la même que celle du $\mathrm{QsE}(G)$-espace vectoriel sur G/G_0. Ce théorème détermine donc totalement la géométrie, mais en revanche ne détermine pas complètement la structure induite.

Dans un cas, la structure induite sur le groupe G minimal localement modulaire $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissable est relativement simple : si G est d'exposant non borné, le corps $\mathrm{QsE}(G)$ est un corps de fractions de l'anneau $\mathrm{End}(G)$ des endomorphismes définissables de G et J. Loveys [Lo 90] a démontré que la structure induite sur G est presque interdéfinissable au-dessus de la clôture algébrique du vide avec la structure de $\mathrm{End}(G)$-module sur G. Nous avons remarqué (1.5.7) que la conjecture B se confronte alors à la question ouverte suivante : existe-t-il des théories de module finiment axiomatisées ?

Dans l'autre cas, lorsque G est d'exposant borné, les rapports entre la structure induite sur G, la structure induite par les quasi-endomorphismes sur G et la structure de $\mathrm{End}(G)$-module sur G s'avèrent extrêmement complexes [HL].

Ceci a en partie motivé notre étude, pour le **troisième chapitre**, des sous-groupes minimaux (c'est-à-dire de rang U un et connexes) $\bigwedge$-définissables du groupe additif d'un corps séparablement clos de degré d'imperfection fini strictement positif, qui sont évidemment des groupes d'exposant borné, et plus particulièrement du rapport entre leurs anneaux d'endomorphismes définissables et leurs corps de quasi-endomorphisnes.

Depuis une dizaine d'années, l'étude des groupes $\bigwedge$-définissables dans des structures de corps est au centre des applications de la théorie des modèles en géométrie. En particulier, certains groupes minimaux $\bigwedge$-définissables dans un corps séparablement clos et la dichotomie entre ceux qui sont localement modulaires et ceux qui ne le sont pas, jouent un rôle central dans la preuve due à E. Hrushovski [Hr 96] de la conjecture de Mordell-Lang en caractéristique finie.

La classe de groupes minimaux considérée par Hrushovski [Hr 96] est la classe des groupes minimaux divisibles. En fait, un groupe minimal $\bigwedge$-définissable, d'un corps L séparablement clos de caractéristique p, est ou bien divisible et dans ce cas de rang de transcendance fini, ou bien d'exposant p, et dans ce cas définissablement isomorphe à un sous-groupe du groupe additif de L et de rang de transcendance arbitraire [BD2]. La classe des groupes minimaux additifs $\bigwedge$-définissables (les sous-groupes minimaux $\bigwedge$-définissables du groupe additif de L) est donc particulièrement riche et contient de nombreuses familles de groupes deux à deux orthogonaux (en, effet deux groupes non orthogonaux ont nécessairement même rang de transcendance).

Notre étude de cette classe a confirmé sa complexité : nous avons montré qu'il existe parmi ceux-ci des groupes localement modulaires pour lesquels le corps des quasi-endomorphismes est infini alors que l'anneau des endomorphismes définissables est fini, ce qui illustre la difficulté de l'étude de la structure induite sur un groupe d'exposant borné (3.5.16).

Remarquons que tous ces groupes "vivent" dans une structure de module. En effet, nous avons montré (section 3.3) que tout sous-groupe G additif connexe $\bigwedge$-définissable dans la structure de corps L est $\bigwedge$-définissable dans la structure L_{mod} de $\mathrm{End}(L,+)$-module sur L (où $\mathrm{End}(L,+)$ est l'anneau des endomorphismes de $(L,+)$ définissables dans la structure de corps L), que tout endomorphisme définissable (respectivement quasi-endomorphisme) de G est la trace d'un endomorphisme (respectivement quasi-endomorphisme) de $(L,+)$, et que si le groupe G est 1-basé, sa structure induite dans la structure de corps L est identique à sa structure induite dans la structure de module L_{mod}.

Nous avons, d'autre part, construit $2^{\aleph_0}$ groupes minimaux additifs G_i deux à deux orthogonaux, qui ont tous un corps fini $\mathrm{QsE}(G_i)$ de quasi-endomorphismes, et dont la structure induite sur G_i est exactement celle d'un $\mathrm{QsE}(G_i)$-espace vectoriel qui est par conséquent $\aleph_0$-catégorique (3.5.20).

Nos constructions précédentes de groupes montrent que la locale modularité d'un sous-groupe minimal additif $\bigwedge$-définissable ne se voit pas sur son anneau d'endomorphismes définissables (3.4.24). En effet, parmi ces constructions, il y a un groupe localement modulaire et un autre non localement modulaire, qui ont tous deux comme anneau d'endomorphismes définissables le corps $\mathbb{F}_p$. En revanche, la locale modularité se voit sur le corps des quasi-endomorphismes (3.5.9).

Nous terminons ce chapitre par une construction de sous-groupes additifs $\bigwedge$-définissables rangés de rang infini (3.6.5). Z. Chatzidakis, G. Cherlin, S. Shelah, G. Srour et C. Wood [CCSSW] avaient donné une construction de types triviaux rangés de rang infini, mais l'existence de groupes $\bigwedge$-définissables rangés de rang infini demeurait une question ouverte.

Chapitre 1

Préliminaires

Nous supposons connues les notions usuelles de théorie des modèles (langages du premier ordre, théories, types, structures, ensembles définissables, extensions élémentaires, structures saturées ...) et de théorie de la stabilité (déviation, rang de Morley noté RM, rang U de Lascar noté RU, orthogonalité ...). Pour ces notions nos références sont les ouvrages [Ho 93], [Po 85], [Pi 83], [La 86] et [Bu 96]. En ce qui concerne les groupes stables, nous nous référons à [Po 87], [Wa 97], [Pi 96] et [Bu 96].

Nous rappelons dans la première section les définitions des types forts, des ensembles $\bigwedge$-définissables et des structures 1-basées. Dans la seconde section nous énonçons le fait qu'un ensemble minimal est localement modulaire si et seulement si il est 1-basé. Nos références pour la section suivante concernant les groupes 1-basés et les groupes minimaux sont le livre de A. Pillay [Pi 96], le livre de S. Buechler [Bu 96] et le livre de F. Wagner [Wa 97]. Dans la quatrième section nous énonçons le résultat de J. Loveys [Lo 90] concernant la structure induite d'un groupe minimal 1-basé d'exposant non borné. Enfin pour terminer, nous précisons la définition d'une structure finiment axiomatisable, nous présentons les résultats de E. Hrushovski [Hr 94] sur les structures $\aleph_1$-catégoriques finiment axiomatisées et nous déduisons du résultat de J. Loveys [Lo 90], un corollaire immédiat sur les groupes minimaux d'exposant non borné finiment axiomatisables.

1.1 Structures et ensembles définissables

$\mathcal{L}$ dénotera un langage du premier ordre et M dénotera une $\mathcal{L}$-structure. Nous ne considérons tout au long de cette thèse que des structures stables. En théorie des modèles, il est pratique étant donné une structure, de se placer dans une extension élémentaire "universelle". Pour une structure M stable, il suffit pour cela de considérer une extension élémentaire saturée $\mathbf{C}$ de M (c'est-à-dire tout type consistant d'uple fini sur un ensemble de paramètres de cardinal strictement inférieur à celui de $\mathbf{C}$, est réalisé dans $\mathbf{C}$). Dans ce cas $\mathbf{C}$ est aussi une structure (fortement) homogène : pour tous uples $\bar{a}$ et $\bar{b}$ de cardinal strictement inférieur à celui de $\mathbf{C}$, les uples $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type si et seulement si il existe un automorphisme de $\mathbf{C}$ qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$.

Pour toute la suite des préliminaires nous fixons M une $\mathcal{L}$-structure stable et $\mathbf{C}$ une extension élémentaire saturée de M. Les lettres A et B dénoterons des parties de $\mathbf{C}$ "petites" (c'est-à-dire de cardinalité strictement inférieure à celle de $\mathbf{C}$) et n, m des entiers. Par homogénéité, pour tout ensemble définissable $D \subseteq \mathbf{C}^n$ à paramètres dans $\mathbf{C}$, D est définissable à paramètres dans A si et seulement D est (globalement) stable par tout automorphisme de $\mathbf{C}$ fixant (point par point) A. Dans ce cas nous dirons que D est A-définissable ou définissable sur A. Un élément a de $\mathbf{C}$ est algébrique sur A, s'il a un nombre fini de conjugués par l'action des automorphismes de $\mathbf{C}$ fixant A. Nous notons $\mathrm{acl}(A)$ la clôture algébrique de A : l'ensemble des éléments algébriques sur A. De même un élément a est définissable sur A s'il est fixé par tout automorphisme de $\mathbf{C}$ fixant A. Nous notons $\mathrm{dcl}(A)$ la clôture définissable de A : l'ensemble des éléments définissables sur A.

Nous utilisons les notations usuelles $\mathcal{L}^{eq}$, M^{eq} et $\mathbf{C}^{eq}$: $\mathcal{L}^{eq}$ est le langage à plusieurs sortes construit à partir des relations d'équivalence $\emptyset$-définissables et M^{eq}, $\mathbf{C}^{eq}$ sont les $\mathcal{L}^{eq}$-structures correspondant aux $\mathcal{L}$-structures M et $\mathbf{C}$. Nous utilisons les notations dcl^{eq} et acl^{eq} pour les clôtures définissables ou algébriques dans la structure $\mathbf{C}^{eq}$. La structure $\mathbf{C}^{eq}$ reste stable et saturée, est une extension élémentaire de M^{eq} et $\mathbf{C}^{eq} = \mathrm{dcl}^{eq}(\mathbf{C})$, $M^{eq} = \mathrm{dcl}^{eq}(M)$. Une partie $D \subseteq M^n$ définissable dans la structure M^{eq} est définissable dans la structure M.

A partir de maintenant et pour la suite des préliminaires A et B désignent éventuellement des parties "petites" de $\mathbf{C}^{eq}$ (au lieu de $\mathbf{C}$).

1.1.1 Interdéfinissabilité

Soit $\mathcal{L}'$ un autre langage du premier ordre tel que l'ensemble M peut être muni d'une $\mathcal{L}'$-structure. Notons pour cette partie $(M, \mathcal{L})$ la $\mathcal{L}$-structure sur M et $(M, \mathcal{L}')$ la $\mathcal{L}'$-structure sur M.

Définition 1.1.1. Supposons $A \subseteq M$.

i) Les structures $(M, \mathcal{L})$ et $(M, \mathcal{L}')$ sont A-**interdéfinissables** si pour tout entier m et toute partie D de M^m, D est A-définissable dans $(M, \mathcal{L})$ si et seulement si D est A-définissable dans $(M, \mathcal{L}')$.

ii) Les structures $(M, \mathcal{L})$ et $(M, \mathcal{L}')$ sont **presque** A-**interdéfinissables** si pour tout entier m et toute partie D de M^m, D est $\mathrm{acl}^{eq}_{\mathcal{L}}(A)$-définissable dans $(M, \mathcal{L})$ si et seulement si D est $\mathrm{acl}^{eq}_{\mathcal{L}'}(A)$-définissable dans $(M, \mathcal{L}')$.

iii) Soit N une $\mathcal{L}'$-structure.
Les structures $(M, \mathcal{L})$ et $(N, \mathcal{L}')$ sont $\emptyset$-**interdéfinissables** (respectivement **presque** $\emptyset$-**interdéfinissables**) s'il existe une bijection ϕ de M sur N telle que $(\phi(M), \mathcal{L})$ et $(N, \mathcal{L}')$ sont $\emptyset$-interdéfinissables (respectivement presque $\emptyset$-interdéfinissables).

1.1.2 Types forts

Nous rappelons que M est une structure stable, $\mathbf{C}$ une extension saturée de M et A une partie "petite" de $\mathbf{C}^{eq}$.

Par stabilité tout type sur M ou sur $\mathrm{acl}^{eq}(A)$ est stationnaire.

Définition 1.1.2. Soient $\bar{a}$ et $\bar{b}$ deux uples de $\mathbf{C}$. Alors $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même **type fort** sur A s'ils ont même type sur $\mathrm{acl}^{eq}(A)$.

Définition 1.1.3. Une relation d'équivalence est **une relation d'équivalence finie** si elle a un nombre fini de classes d'équivalence.

Théorème 1.1.4. *Soient a et b des éléments de $\mathbf{C}^n$. Alors a et b ont même type fort sur A si et seulement si pour toute relation E d'équivalence finie A-définissable, a et b sont dans la même E-classe.*

Définition 1.1.5. Un automorphisme f de $\mathbf{C}$ est un **automorphisme fort sur A ou A-fort** si pour tout entier m et pour tout élément a de $\mathbf{C}^m$, $f(a)$ a même type fort sur A que a (c'est-à-dire f fixe globalement chacune des classes des relations d'équivalence finies A-définissables).

1.1.3 Ensembles 1-basés

Définition 1.1.6. Une partie **infiniment définissable** D de $\mathbf{C}^n$ est une intersection d'un ensemble de parties définissables de $\mathbf{C}^n$ qui a une cardinalité strictement inférieure à celle de $\mathbf{C}$. Nous noterons simplement que D est **$\bigwedge$-définissable**. Un ensemble D $\bigwedge$-définissable est en fait un type partiel sur un ensemble de paramètres de cardinalité strictement inférieure à la cardinalité de $\mathbf{C}$. Si D est un type partiel sur A, nous dirons que D est $\bigwedge$-définissable sur A.

Pour la suite des préliminaires nous fixons un ensemble D $\bigwedge$-définissable sur A.

Définition 1.1.7. Supposons $B \supseteq A$.

Une partie E de D^m est **relativement définissable** sur B s'il existe un ensemble B-définissable E' de $\mathbf{C}^{nm}$ tel que E est l'intersection de D avec E'.

La **structure induite** sur D par $\mathbf{C}$ au-dessus de B est l'ensemble D muni des relations définies par toutes les parties relativement définissables sur B.

Nous notons $D_A^{eq} := \{c \in \mathbf{C}^{eq};\ c \in \mathrm{dcl}^{eq}(D \cup A)\}$.

Définition 1.1.8. Une partie X de D_A^{eq} est **algébriquement close dans** D_A^{eq} si $A \subseteq X$ et $X = \mathrm{acl}^{eq}(X) \cap D_A^{eq}$.

On dit que D est **1-basé** si pour toutes parties X et Y de D_A^{eq} algébriquement closes, X et Y sont indépendants (au sens de la déviation) au-dessus de $X \cap Y$.

Remarque. La définition donnée ci-dessus utilise l'ensemble de paramètres A qui n'est pas canonique, mais en fait cette définition est indépendante du choix de cet ensemble de paramètres. En particulier si l'on enrichit la structure $\mathbf{C}$ par des constantes, D est 1-basée dans $\mathbf{C}$ si et seulement si D est 1-basée dans la structure enrichie.

Remarque 1.1.9. Il existe une définition équivalente en terme de "base canonique" : D est 1-basé si pour tout $m > 0$, $B \supseteq A$ et $d \in D^m$, la base canonique du type de d sur B est dans la clôture algébrique de d.

1.2 Ensembles minimaux et locale modularité

Nous précisons ici les définitions d'ensembles minimaux, fortement minimaux et faiblement minimaux que nous utiliserons par la suite :

Définition 1.2.1. L'ensemble $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissable D est **minimal** si toute partie relativement définissable de D est finie ou cofinie dans D.

Si de plus D est définissable, alors D est dit **fortement minimale**.

Un ensemble définissable est **faiblement minimal** s'il est infini et ne contient que des types de rang U inférieur ou égal à 1.

Remarque. D est minimal si et seulement si pour toute partie $B \supseteq A$, D contient un unique type (complet) sur B non algébrique. En particulier si D est fortement minimal alors D est faiblement minimal. Une structure fortement minimale est une structure de rang de Morley 1 et de degré de Morley 1, c'est-à-dire une structure "irréductible" ou une structure stable "minimale".

Nous pouvons définir une notion d'indépendance sur les structures minimales, qui vérifie les axiomes de Steinitz :

Proposition 1.2.2. *Soit D minimal (ou faiblement minimal). Soit pour toute partie X de D,* $\mathrm{cl}(X) := \mathrm{acl}(A \cup X) \cap D$. *Alors* (D, cl) *est une prégéométrie : la relation* $a \notin \mathrm{cl}(X)$ *pour $a \in D$ et $X \subseteq D$, satisfait les axiomes de Steinitz d'une relation d'indépendance, c'est-à-dire le caractère fini, la transitivité (l'hypothèse D minimal est inutile pour ces deux premiers axiomes) et le lemme de l'échange. Pour une partie X de D nous notons* $\dim X$*, la dimension de X définie par cette relation d'indépendance. Cette relation d'indépendance correspond en fait à celle définie par la déviation : pour tout $X \subseteq D$,* $\dim X = \mathrm{RU}(X)$ *et dans le cas où D est fortement minimal (c'est-à-dire D définissable),* $\dim X = \mathrm{RM}(X)$.

Définition 1.2.3. Soit D minimal.

D est **trivial** si pour toute partie X de D, $\mathrm{cl}(X) = \cup_{x \in X} \mathrm{cl}(\{x\})$ (c'est-à-dire toute famille d'éléments deux à deux indépendants est libre).

D est **localement modulaire** si pour toutes parties X et Y de D telles que $X = \mathrm{cl}(X)$, $Y = \mathrm{cl}(Y)$, et $X \cap Y \neq \emptyset$, alors $\dim(X \cup Y) + \dim(X \cap Y) = \dim(X) + \dim(Y)$ (c'est-à-dire X et Y sont indépendants au-dessus de $X \cap Y$).

Le lecteur peut trouver la preuve de la proposition suivante dans ([Bo 97] ou [Pi 96]) :

Proposition 1.2.4. *Soit D minimal. Alors D est localement modulaire si et seulement si D est 1-basé.*

Remarque. Cette proposition n'est pas un corollaire immédiat des définitions 1.1.8 et 1.2.3, car une partie X de D telle que $X = \mathrm{cl}(X)$ n'est pas une partie close de D_A^{eq}.

Voici les exemples classiques de structures fortement minimales :

- exemples triviaux : l'ensemble infini sans structure et l'ensemble des entiers muni du successeur.

- exemples localement modulaires non triviaux : espaces vectoriels, espaces affines sur un corps fixé.
- exemples non localement modulaires : corps algébriquement clos de caractéristique fixée.

B. Zil'ber avait conjecturé que les seuls exemples non triviaux étaient "en gros" ceux cités ci-dessus. E. Hrushovski [Hr 93] et [Hr 92a], a réfuté cette conjecture pour les ensembles non localement modulaires, par contre il a montré qu'un type minimal localement modulaire non trivial est équialgébrique avec le générique d'un groupe minimal [Hr 85].

1.3 Groupes $\bigwedge$-définissables

Nous supposons les résultats classiques sur les groupes stables connus. En particulier un groupe G $\bigwedge$-définissable sur A (c'est-à-dire l'ensemble G est $\bigwedge$-définissable sur A, et le graphe de la loi du groupe G est $\bigwedge$-définissable sur A ou de manière équivalente relativement définissable sur A) est une intersection de groupes A-définissables.

Nous rappelons que la **composante connexe** G^0 d'un groupe G $\bigwedge$-définissable est l'intersection des sous-groupes de G d'indice fini relativement définissables. Un groupe $\bigwedge$-définissable est **connexe** s'il n'a pas de sous-groupe propre d'indice fini et relativement définissable. Les groupes minimaux sont des exemples de groupes connexes.

Les prémices des résultats (1.3.2 et 1.3.6) présentés dans cette section, sont dûs aux travaux de B. Zil'ber sur les structures fortement minimales.

1.3.1 Groupes 1-basés

A. Pillay et E. Hrushovski ont démontré que la structure induite sur un groupe 1-basé est une "structure de module généralisée".

Proposition 1.3.1. *[HP 87] Soit G un groupe stable $\bigwedge$-définissable sur A et 1-basé. Soient $a \in G$ et $B \supseteq A$. Soit p le type fort de a sur B. Alors p est le type générique d'un translaté $\bigwedge$-définissable sur* $\mathrm{acl}^{eq}(B)$ *d'un sous-groupe connexe H de G $\bigwedge$-définissable sur* $\mathrm{acl}^{eq}(A)$. *Le groupe H est en fait le stabilisateur dans G de p.*

Les résultats du théorème suivant sont des corollaires de cette proposition :

Théorème 1.3.2. *[HP 87] Soit G un groupe stable $\bigwedge$-définissable sur A.*

i) G est 1-basé si et seulement si pour tout entier m, toute partie de G^m relativement définissable sur $\mathrm{acl}^{eq}(A)$ *est une combinaison booléenne de translatés de sous-groupes de G^m relativement définissables sur* $\mathrm{acl}^{eq}(A)$.

ii) Si G est 1-basé et $B \supseteq A$ alors toute partie de G^n relativement définissable sur B est une combinaison booléenne de translatés relativement définissables sur $\mathrm{acl}^{eq}(B)$ *de sous-groupes de G^n relativement définissables sur* $\mathrm{acl}^{eq}(A)$.

iii) Si G est 1-basé alors G est abélien par fini.

iv) Si G est 1-basé alors tout sous-groupe $\bigwedge$-définissable connexe de G^n est $\bigwedge$-définissable sur $\mathrm{acl}^{eq}(A)$.

Remarque 1.3.3. Les structures de modules sont les exemples naturels de structures 1-basées (voir [Zi 84] et [GR 90]).

1.3.2 Groupes minimaux

Un groupe minimal est abélien. E. Hrushovski [Hr 85] a démontré que modulo la clôture algébrique de l'ensemble des paramètres, la structure induite sur un groupe minimal 1-basé est celle d'un espace vectoriel :

Définition - Proposition 1.3.4. Soit G un groupe $\bigwedge$-définissable sur A et minimal. Supposons $B \supseteq A$. Soit $G_B := G \cap \mathrm{acl}^{eq}(B)$.

i) Un **quasi-endomorphisme** de G définissable sur B est un sous-groupe minimal S de $G \times G$, relativement définissable sur $\mathrm{acl}^{eq}(B)$, dont la projection sur la première coordonnée est G. Le **conoyau** d'un quasi-endomorphisme S est l'ensemble fini $\mathrm{coker}(S) := \{y;\ (0,y) \in S\}$. Nous notons $\mathrm{QsE}_B(G)$ l'ensemble des quasi-endomorphismes de G définissables sur B.

ii) Un **endomorphisme quasi-définissable de** G/G_B est un endomorphisme f de G/G_B, tel qu'il existe une formule $\psi(x,y)$ à paramètres dans $\mathrm{acl}^{eq}(B)$ qui vérifie : pour tout $a,\ b \in G$, $f(a+G_B) = b+G_B$ si et seulement si il existe $c \in a+G_B$ et $d \in b+G_B$ qui satisfont ψ.

iii) Soit $S \in \mathrm{QsE}_B(G)$. Alors $\{(a+G_B, b+G_B);\ (a,b) \in S\}$ est le graphe d'un endomorphisme quasi-définissable f_S de G/G_B. De plus l'application qui à $S \in \mathrm{QsE}_B(G)$ associe f_S est une bijection de l'ensemble des quasi-endomorphismes de G définissables sur B dans l'ensemble des endomorphismes quasi-définissables de G/G_B.

iv) L'anneau des endomorphismes de G/G_B induit une structure de corps sur $\mathrm{QsE}_B(G)$.

Remarque 1.3.5. Si G est de plus 1-basé alors $\mathrm{QsE}_B(G) = \mathrm{QsE}_A(G)$ car tout sous-groupe minimal de $G \times G$ $\bigwedge$-définissable est $\bigwedge$-définissable sur $\mathrm{acl}^{eq}(A)$ (1.3.2 iv).

Théorème 1.3.6. *[Hr 85] Soit G un groupe $\bigwedge$-définissable sur A, minimal et 1-basé. Alors la prégéométrie de G est donnée par la structure de $\mathrm{QsE}_A(G)$-espace vectoriel : pour tous $g, g_1, \ldots, g_n \in G$, $g \in \mathrm{acl}(g_1, \ldots, g_n)$ si et seulement si il existe $S_1, \ldots, S_n \in \mathrm{QsE}_A(G)$ tel que $g + G_A = f_{S_1}(g_1 + G_A) + \ldots + f_{S_n}(g_n + G_A)$.*

Nous terminons cette section par des remarques sur l'orthogonalité.

1.3.3 Orthogonalité et isogénies

Le théorème (1.3.6) montre en particulier qu'un groupe minimal localement modulaire est **modulaire** (définition identique à celle de localement modulaire (1.2.3) sans la condition $X \cap Y \neq \emptyset$).

Voici un résultat utile pour la suite (qui est en fait vrai pour tous les ensembles minimaux modulaires) :

Proposition 1.3.7. *[Pi 96, Corollary 2.5.5] Soient G et H deux groupes minimaux localement modulaires et $\bigwedge$-définissables sur A. Si G et H sont non orthogonaux alors* *leurs types génériques sur A sont interalgébriques (c'est-à-dire G et H sont non faiblement orthogonaux sur A).*

Regardons maintenant le rapport entre la non orthogonalité et l'isogénie.

Commençons par rappeler la définition d'une isogénie :

Définition. Une **isogénie** est un homomorphisme surjectif d'un groupe sur un autre qui a un noyau fini. On dit que le premier groupe est isogène au second.

Remarque. Il est évident que si un groupe G minimal est définissablement isogène à un autre groupe H minimal alors G et H sont non orthogonaux.

Voici les réciproques :

Lemme 1.3.8. *Soient G et H deux groupes $\bigwedge$-définissables sur A, minimaux et 1-basés. Si G et H sont non orthogonaux alors il existe un sous-groupe fini G' de G et un sous-groupe fini H' de H, définissables sur $\mathrm{acl}^{eq}(A)$ tels que G/G' et H/H' sont définissablement isomorphes sur $\mathrm{acl}^{eq}(A)$. En particulier $\mathrm{QsE}_A(G)$ et $\mathrm{QsE}_A(H)$ sont isomorphes.*

$\triangleright$ Le groupe $G \times H$ est 1-basé.

Soient g et h respectivement génériques dans G et H au-dessus de A et interalgébriques au-dessus de A. Soit p le type fort de (g, h) sur A et K le stabilisateur dans $G \times H$ de p. Par (1.3.1), K est un groupe connexe $\bigwedge$-définissable sur $\mathrm{acl}^{eq}(A)$ et p est le type générique d'un translaté de K. Donc K est minimal. Par ailleurs, K contient (g', h') tel que g' est générique dans G et h' est un générique dans H (il suffit pour cela de choisir g' générique de G au-dessus de $\{g\} \cup A$), donc la projection de K sur G (de même que sur H) est égale à G (à H). Enfin comme K est minimal, $\ker K$ et $\mathrm{coker} K$ sont finis, donc K définit un isomorphisme de $G/\ker K$ dans $H/\mathrm{coker} K$. $\triangleleft$

Corollaire 1.3.9. *Soient G et H deux groupes $\bigwedge$-définissables sur A, minimaux et 1-basés. Supposons $G_A (= G \cap \mathrm{acl}^{eq}(A)) = \{0\}$ et $H_A (= H \cap \mathrm{acl}^{eq}(A)) = \{0\}$. Alors G et H sont non orthogonaux si et seulement si G et H sont définissablement isomorphes sur $\mathrm{acl}^{eq}(A)$.*

Corollaire 1.3.10. *Soient G et H deux groupes $\bigwedge$-définissables sur A, minimaux et 1-basés. Alors G est définissablement isogène à un quotient de H par un sous-groupe fini. Si de plus H est divisible alors G est définissablement isogène à H.*

1.4 Structure induite sur un groupe minimal 1-basé

Le résultat (1.3.6) montre que la structure induite sur un groupe minimal 1-basé est "relativement proche" d'une structure d'espace vectoriel. La difficulté pour décrire la structure induite se situe dans la clôture algébrique de l'ensemble de paramètres de définition. Dans le cas d'un groupe d'exposant non borné, J. Loveys [Lo 90] a montré que la structure induite est presque interdéfinissable avec la structure de module sur l'anneau des endomorphismes définissables. Ce résultat est en partie conséquence du fait que le corps des quasi-endomorphismes d'un groupe d'exposant non borné est un corps de fractions de l'anneau des endomorphismes :

Lemme 1.4.1. *Soit G un groupe minimal $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissable sur A d'exposant non borné. Alors l'anneau des quasi-endomorphismes définissables sur B est un corps de fractions de l'anneau des endomorphismes définissables sur B.*

$\triangleright$ Soit S un quasi-endomorphisme définissable sur B non nul. Soit m le cardinal de $\mathrm{coker}(S)$. Alors m est un entier strictement positif et $S' := \{(x, mx);\ x \in G\}$ est le graphe d'un endomorphisme non nul de G définissable sur B et tel que $S' \circ S$ est un endomorphisme de G. $\triangleleft$

Théorème 1.4.2. *[Lo 90] Soit une structure G de groupe abélien faiblement minimal d'exposant non borné. Soient R l'anneau des endomorphismes de G définissables sur $\mathrm{acl}^{eq}(\emptyset)$ et $G_0 := G \cap \mathrm{acl}(\emptyset)$. Soit G' la structure $(G, +, r, c;\ r \in R,\ c \in G_0)$. Si G est 1-basé alors la structure G est presque $\emptyset$-interdéfinissable avec la structure G'.*

Une preuve identique à celle du théorème précédent donne le résultat analogue pour les groupes minimaux d'exposant non borné :

Théorème 1.4.3. *Soit G un groupe minimal d'exposant non borné $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissable sur A dans $\mathbf{C}$. Soient R l'anneau des endomorphismes de G $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissables sur $\mathrm{acl}^{eq}(A)$ dans $\mathbf{C}$ et $G_A := G \cap \mathrm{acl}(A)$. Soit G' la structure $(G, +, r, c;\ r \in R,\ c \in G_A)$. Si G est 1-basé alors la structure induite sur G par $\mathbf{C}$ au-dessus de $\mathrm{acl}^{eq}(A)$ est presque $\emptyset$-interdéfinissable avec la structure G'.*

Par contre dans le cas d'un groupe d'exposant borné, les travaux de E. Hrushovski et J. Loveys [HL] montrent que la description de la structure induite est complexe. Leur contre-exemple qui suit, illustre le fait que la structure induite d'un tel groupe n'est pas nécessairement donnée par la loi de groupe et les quasi-endomorphismes :

Exemple 1.4.4. [HL] Soit V un espace vectoriel infini sur le corps $\mathbb{F}_8$. Soit $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ une base de $\mathbb{F}_8$ sur $\mathbb{F}_2$. Soient a et b dans V indépendants sur $\mathbb{F}_8$ et soit H le sous-groupe de V engendré par a, b et $\alpha a + \alpha^2 b$.

Soit G le groupe quotient V/H muni de la structure induite par V. Alors G est fortement minimal et 1-basé. Les graphes des endomorphismes α et α^2 deviennent des quasi-endomorphismes de G. Les conoyaux de ces quasi-endomorphismes sont de cardinalité 8. La relation ternaire P sur G induite par la formule $(y = \alpha x \wedge z = \alpha^2 x)$ de V n'est pas définissable à partir de l'addition et des quasi-endomorphismes de G. Ceci vient principalement de la remarque suivante : pour tout $u \in V$, il existe 64 triplets $(u+H, v+H, w+H)$ tels que $(u+H, v+H)$ est dans le graphe de α et $(u+H, w+H)$ dans le graphe de α^2, alors qu'il y a seulement 8 triplets qui sont dans P.

D'autre part le corps des quasi-endomorphismes d'un groupe d'exposant borné n'est pas nécessairement un corps de fractions de l'anneau des endomorphismes, contrairement au cas précédent (1.4.1). Dans le troisième chapitre de cette thèse nous étudions les sous-groupes minimaux du groupe additif d'un corps séparablement clos de caractéristique finie. Ce sont des groupes d'exposant borné. Nous montrons qu'il existe parmi ceux-ci un groupe localement modulaire dont le corps des quasi-endomorphismes définissables est infini alors que son anneau d'endomorphismes définissables est fini

(3.5.16). La structure induite sur ce groupe est par conséquent "éloignée" de sa structure de module sur son anneau d'endomorphismes.

1.5 Finie axiomatisabilité

Nous rappelons que l'existence d'une structure fortement minimale finiment axiomatisée est une question ouverte. Par contre il existe des exemples $\aleph_1$-catégorique et même de rang de Morley 2 finiment axiomatisés, dûs à M.G. Peretyatkin [Pe 80, Pe 91], puis à E.R. Baisalov [Ba 91]. Ces exemples ont tous une géométrie triviale.

Commençons par préciser la définition de la finie axiomatisabilité :

Définition 1.5.1. Une structure $(M, \mathcal{L})$ est **finiment axiomatisable** si il existe une partie finie $\mathcal{L}_0$ de $\mathcal{L}$ telle que les structures $(M, \mathcal{L}_0)$ et $(M, \mathcal{L})$ sont $\emptyset$-interdéfinissables et telle que la structure $(M, \mathcal{L}_0)$ est axiomatisée par un unique axiome.

Remarque. Si $\mathcal{L}$ est fini, une structure $(M, \mathcal{L})$ finiment axiomatisable est finiment axiomatisée.

Pour E une relation d'équivalence $\emptyset$-définissable sur M^n, nous notons M_E la structure à deux sortes $(M, M^n/E;\ \mathcal{L}, f_E)$ extraite de la structure M^{eq}.

Lemme 1.5.2. *Soit M une $\mathcal{L}$-structure et E une relation d'équivalence $\emptyset$-définissable dans M. La structure M est finiment axiomatisable si et seulement si la structure M_E l'est.*

$\triangleright$ La structure M_E est axiomatisée par n'importe quelle axiomatisation de M à laquelle l'on ajoute l'axiome ϕ : "f_E est une application surjective de M^n dans M^n/E et $f_E(x) = f_E(y)$ si et seulement si $E(x, y)$".

Si M ou M_E est finiment axiomatisable, on peut supposer $\mathcal{L}$ fini.

Si M est finiment axiomatisée, M_E l'est aussi car il suffit d'ajouter l'axiome ϕ.

Réciproquement si M_E est finiment axiomatisée, par compacité M_E est axiomatisée par un énoncé θ de la théorie de M et ϕ. On peut supposer que θ implique que E est une relation d'équivalence. Ainsi si N est un modèle de θ alors N_E est élémentairement équivalente à M_E et donc N est élémentairement équivalente à M. Par conséquent M est axiomatisée par θ. $\triangleleft$

Lemme 1.5.3. *Soit M une $\mathcal{L}$-structure et $a \in M$ algébrique (ou simplement tel que le type de a est isolé). Alors la structure $(M, \mathcal{L})$ est finiment axiomatisable si et seulement si la structure $(M, \mathcal{L}, a)$ l'est.*

$\triangleright$ On peut à nouveau supposer $\mathcal{L}$ fini.

Pour l'implication, il suffit de remarquer que $(M, \mathcal{L}, a)$ est axiomatisée par une axiomatisation de $(M, \mathcal{L})$ à laquelle l'on ajoute l'axiome $\phi(a)$ où ϕ isole le type de a dans M. Pour la réciproque il n'y a en fait pas besoin d'hypothèse sur le type de a. En effet si $(M, \mathcal{L}, a)$ est finiment axiomatisée, il y a une formule $\phi(a)$ dans $\mathcal{L}(a)$ qui l'axiomatise. Ainsi $(M, \mathcal{L})$ est axiomatisée par la formule $\exists x \phi(x)$. $\triangleleft$

Proposition 1.5.4. *Soit M muni d'une $\mathcal{L}$-structure et d'une $\mathcal{L}'$-structure telle que les structures $(M,\mathcal{L})$ et $(M,\mathcal{L}')$ sont presque $\emptyset$-interdéfinissables . Si la structure $(M,\mathcal{L})$ est finiment axiomatisable alors il existe une partie finie $\mathcal{L}'_0$ de $\mathcal{L}'$ telle que la structure $(M,\mathcal{L}'_0)$ est finiment axiomatisée et telle que les structures $(M,\mathcal{L})$ et $(M,\mathcal{L}'_0)$ sont encore presque $\emptyset$-interdéfinissables.*

$\triangleright$ Nous pouvons supposer $\mathcal{L}$ fini et donc M finiment axiomatisée. Il existe une partie finie $\mathcal{L}'_0$ de $\mathcal{L}'$ telle que les structures $(M,\mathcal{L})$ et $(M,\mathcal{L}'_0)$ sont presque $\emptyset$-définissables : il suffit pour cela de considérer l'ensemble fini de formules de $\mathcal{L}'^{eq}$ et de paramètres de $\mathrm{acl}^{eq}_{\mathcal{L}'}(\emptyset)$ qui permettent de définir $\mathcal{L}$ et de choisir une partie finie $\mathcal{L}'_0$ telle que cet ensemble fini est inclus dans ${\mathcal{L}'_0}^{eq} \cup \mathrm{acl}^{eq}_{\mathcal{L}'_0}(\emptyset)$.

Nous allons alors montrer que $(M,\mathcal{L}'_0)$ est finiment axiomatisée. Chaque élément de $\mathcal{L}'_0$ est $acl^{eq}_{\mathcal{L}}(\emptyset)$-définissable dans la structure $(M,\mathcal{L})$. Comme $\mathcal{L}'_0$ est fini, il existe $\bar{a} \in \mathrm{acl}^{eq}_{\mathcal{L}}(\emptyset)$ et $E_1,\ldots,E_m$ des relations d'équivalence $\emptyset$-définissables dans $(M,\mathcal{L})$, tels que chaque élément de $\mathcal{L}'_0$ est $\emptyset$-définissable dans la structure

$$N := (M, M^{n_1}/E_1,\ldots,M^{n_m}/E_m,\mathcal{L},f_{E_1},\ldots,f_{E_m},\bar{a}).$$

Nous pouvons supposer de plus que $\bar{a}$ est algébrique dans la structure

$$(M, M^{n_1}/E_1,\ldots,M^{n_m}/E_m,\mathcal{L},f_{E_1},\ldots,f_{E_m}).$$

Ainsi par (1.5.2 et 1.5.3) N est finiment axiomatisée car M l'est.

D'autre part les éléments de $\mathcal{L}$ sont $acl^{eq}_{\mathcal{L}'_0}(\emptyset)$-définissables dans $(M,\mathcal{L}'_0)$ donc il existe de même $\bar{b} \in \mathrm{acl}^{eq}_{\mathcal{L}'_0}(\emptyset)$ et $E'_1,\ldots,E'_{m'}$ des relations d'équivalence $\emptyset$-définissables dans $(M,\mathcal{L}'_0)$, tels que chaque élément de $\mathcal{L}$ est $\emptyset$-définissable dans la structure

$$N' := (M, M^{n'_1}/E'_1,\ldots,M^{n'_{m'}}/E'_{m'},\mathcal{L}'_0,f_{E'_1},\ldots,f_{E'_{m'}},\bar{b}).$$

Nous pouvons supposer aussi que $\bar{b}$ est algébrique dans la structure

$$(M, M^{n'_1}/E'_1,\ldots,M^{n'_{m'}}/E'_{m'},\mathcal{L}'_0,f_{E'_1},\ldots,f_{E'_{m'}}).$$

Le langage $\mathcal{L}'_0$ est $\emptyset$-définissable dans N, donc par (1.5.2 et 1.5.3) la structure

$$P := (N, M^{n'_1}/E'_1,\ldots,M^{n'_{m'}}/E'_{m'},f_{E'_1},\ldots,f_{E'_{m'}},\bar{b}).$$

est finiment axiomatisée. Soit

$$P' := (N', M^{n_1}/E_1,\ldots,M^{n_m}/E_m,f_{E_1},\ldots,f_{E_m},\bar{a}).$$

Les structures P et P' sont $\emptyset$-interdéfinissables. Toujours par (1.5.2 et 1.5.3), comme la structure P' est finiment axiomatisée, la structure N' est finiment axiomatisée et donc la structure $(M,\mathcal{L}'_0)$ est finiment axiomatisée. $\triangleleft$

E. Hrushovski [Hr 94] a démontré que toute structure $\aleph_1$-catégorique finiment axiomatisable est localement modulaire. Cette preuve est constituée des deux propositions qui suivent : nous rappelons que $\mathbf{C}$ est une structure stable saturée et que A et B sont deux parties de $\mathbf{C}$ "petites".

Définition. 1. On dit que B est **finiment engendré au-dessus de** A si il existe B_0 fini tel que $B = \mathrm{dcl}(A \cup B_0)$. On dit que B est **normal sur** A si il est globalement invariant par les automorphismes de $\mathbf{C}$ fixant A.

2. Si B est finiment engendré au-dessus de A et normal sur A, on note alors $\mathrm{Aut}(B/A)$ l'ensemble des automorphismes de B induits par ceux de $\mathbf{C}$ fixant A.

3. Un groupe fini simple G est **associé à** $\mathbf{C}$ si il existe $A, B \subset \mathbf{C}$ tel que B est finiment engendré sur A et normal sur A et tel que G est un facteur de composition de $\mathrm{Aut}(B/A)$.

4. G est **fortement associé à** $\mathbf{C}$ si A contient une sous-structure élémentaire de $\mathbf{C}$.

Proposition 1.5.5. *[Hr 94] Une structure M $\aleph_1$-catégorique finiment axiomatisable a un nombre fini de groupes finis simples associés à une (toute) extension élémentaire saturée de M.*

Proposition 1.5.6. *[Hr 94] Une structure M $\aleph_1$-catégorique non localement modulaire a une infinité de groupes finis non abéliens simples fortement associés à une extension élémentaire saturée de M.*

Nous démontrons maintenant deux corollaires du résultat de J. Loveys (1.4.2) :

Corollaire 1.5.7. *S'il existe un groupe G abélien faiblement minimal 1-basé d'exposant non borné finiment axiomatisable alors G a une structure de module finiment axiomatisable.*

$\triangleright$ G est presque $\emptyset$-interdéfinissable avec la structure $(G, +, 0, r, c;\ r \in R, c \in G_0)$ (1.4.2). Donc il existe $R' \subset R$ fini et $G_0' \subset G_0$ fini tel que $(G, +, 0, r, c;\ r \in R', c \in G_0')$ est finiment axiomatisable (1.5.4). On en déduit que $(G, +, 0, r;\ r \in R')$ est finiment axiomatisable. $\triangleleft$

Corollaire 1.5.8. *Soit G un groupe fortement minimal d'exposant non borné finiment axiomatisable et saturé. Alors G a une structure de module fortement minimale finiment axiomatisable et pour seulement un nombre fini de nombres premiers p, G contient un élément d'ordre p : c'est-à-dire il existe $p_1, \ldots, p_l$ des nombres premiers et $m_1, \ldots, m_l$ des entiers tels que $(G, +)$ est isomorphe à*

$$\kappa\, \mathbb{Q} \otimes m_1 \mathbb{Z}_{p_1^\infty} \otimes \ldots \otimes m_l \mathbb{Z}_{p_l^\infty}$$

où κ est le cardinal de G et où les groupes de Prüfer $\mathbb{Z}_{p_1^\infty}$,..., $\mathbb{Z}_{p_l^\infty}$ sont les limites directes des groupes $\mathbb{Z}/p_1^m\mathbb{Z}$,..., $\mathbb{Z}/p_l^m\mathbb{Z}$.

$\triangleright$ Comme G est finiment axiomatisable, G est localement modulaire [Hr 94]. De plus la presque-interdéfinissabilité conserve la forte minimalité. Donc il existe par le corollaire précédent un anneau d'endomorphismes R de $(G,+)$ finiment engendré tel que G est un R-module fortement minimal finiment axiomatisable.

Par le résultat de J. Reineke [Re 75] sur les groupes fortement minimaux, $(G,+)$ est isomorphe à

$$\kappa\,\mathbb{Q} \oplus \bigoplus_p m_p \mathbb{Z}_{p^\infty}.$$

Soit p un nombre premier tel que $m_p > 0$. Nous montrons qu'alors $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un groupe associé au R-module G : soit $G_p := \{x \in G;\ p^2 \cdot x = 0\}$. $(G_p,+)$ est isomorphe à $m_p(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ et est normal sur $\emptyset$. D'autre part si n est un entier premier à p, σ_n la multiplication par n sur G_p définit un isomorphisme partiel de G_p dans la structure de R-module G. Par saturation cet automorphisme se prolonge à G.

Le sous-groupe $\{\sigma_n;\ n \wedge p = 1\}$ de $\mathrm{Aut}(G_p)$ est isomorphe à $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ et est un sous-groupe normal de $\mathrm{Aut}(G_p)$. Donc $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, qui est un facteur de composition de $Aut(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$, est un facteur de composition de $Aut(G_p)$. Ainsi $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un groupe associé à G, mais G n'en a qu'un nombre fini (1.5.5). $\triangleleft$

Terminons en rappelant les deux conjectures sur l'existence d'ensembles minimaux finiment axiomatisés. Dans le cas trivial :

Conjecture A. L'existence d'une structure fortement minimale triviale finiment axiomatisée implique l'existence d'un groupe G infini de présentation finie et possédant un nombre fini de classes de conjugaisons $C_1, \ldots, C_k$ telles que pour tout élément de $g \in G$, il existe $m > 0$ tel que g^m est dans l'un des C_i.

Nous renvoyons le lecteur à la section 2.6 pour les énoncés des travaux de A.A. Ivanov sur le sujet.

La seconde conjecture est due à E. Hrushovski et concerne le cas non trivial. A une structure M $\aleph_1$-catégorique localement modulaire non triviale, il est associé un groupe G minimal 1-basé.

Conjecture B. [Hr 94] Si M est finiment axiomatisée alors le corps $\mathrm{QsE}(G)$ des quasi-endomorphismes de G, est finiment présenté en tant qu'anneau.

Les réciproques de ces conjectures sont évidentes : dans le cas trivial, le graphe de Cayley d'un groupe vérifiant les propriétés de la première conjecture est fortement minimal et finiment axiomatisé. Dans le cas non trivial, la théorie d'espace vectoriel sur un corps infini finiment présenté en tant qu'anneau est fortement minimale et finiment axiomatisable. Mais évidemment l'existence de tels groupes et de tels corps est une question ouverte.

Chapitre 2

Ensembles minimaux triviaux et groupes d'automorphismes

Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions les groupes d'automorphismes des structures fortement minimales triviales.

Après un bref rappel sur la topologie définie sur ces groupes, nous commençons, dans la seconde section, par l'étude des structures fortement minimales à valence bornée. Nous donnons plusieurs définitions équivalentes de cette notion et terminons cette section par une caractérisation en terme de groupe d'automorphismes (2.2.19 et 2.2.20).

Auparavant, nous donnons un langage "canonique" minimal des structures fortement minimales triviales non nécessairement à valence bornée (2.2.14). Ce langage nous permet de donner une construction générale pour enrichir des structures fortement minimales à valence bornée en des structures fortement minimales triviales qui ne sont plus à valence bornée (2.2.17).

Nous donnons des exemples de tels enrichissements dans la troisième section.

Dans le cas d'une structure fortement minimale à valence bornée, l'étude précédente montre que le groupe des automorphismes est donné par le groupe des automorphismes de la clôture algébrique du vide et le groupe des automorphismes d'une composante non algébrique.

A toute structure fortement minimale, on associe G le groupe des automorphismes d'une composante non algébrique, G' le sous-groupe des automorphismes forts de cette composante et H le sous-groupe fixant un point de cette composante. Dans la quatrième section, nous donnons les conditions topologiques nécessaires et suffisantes pour qu'un triplet (G, G', H) corresponde à une structure fortement minimale triviale (2.4.3 et 2.4.4). De plus, nous prouvons qu'une structure fortement minimale triviale dont la clôture algébrique du vide est vide peut être reconstruite à partir de son triplet (G, G', H) (2.4.6).

Ensuite, nous remarquons d'une part, que l'unimodularité d'une structure fortement minimale triviale est équivalente à l'unimodularité du groupe localement modulaire G

(2.4.9) et nous montrons, d'autre part, que la propriété du petit indice se voit sur le groupe des automorphismes de la clôture algébrique d'un point non algébrique, quand la structure est à valence bornée ou a un langage fini (2.4.13 et 2.4.14).

Dans la cinquième section, nous nous intéressons uniquement au groupe H, fixateur d'un point non algébrique. Nous montrons que pour tout groupe profini K, il existe une structure fortement minimale à valence bornée unimodulaire dont le groupe H est homéomorphe à K (2.5.6). Nous en déduisons que la propriété d'unimodularité ne se voit pas sur le groupe H.

Dans la dernière section, en utilisant les résultats d'A. Ivanov, nous montrons que toute structure fortement minimale triviale finiment axiomatisée est unimodulaire (2.6.5). D'autre part, nous montrons que l'existence d'une structure fortement minimale triviale finiment axiomatisée implique l'existence d'une structure fortement minimale triviale finiment axiomatisée et à valence bornée dont le groupe H est infini (2.6.7). Le groupe d'automorphismes d'une composante non algébrique d'une structure fortement minimale à valence bornée finiment axiomatisée ne satisfait donc pas nécessairement les propriétés de la conjecture A.

2.1 Topologie et notations

On ne considérera sauf précision que des structures infinies.

Soit M une structure. Nous notons S_M le groupe des permutations de l'ensemble M. Nous munissons S_M de la topologie donnée par le système de voisinages ouverts de l'identité suivant : l'ensemble des sous-groupes des permutations fixant $\bar{d}$ pour $\bar{d}$ parcourant les uples finis dans M.

Nous notons $\mathrm{Aut}(M)$ le groupe des automorphismes de M. Alors $\mathrm{Aut}(M)$ est un sous-groupe fermé de S_M. Nous choisissons de faire agir $\mathrm{Aut}(M)$ à gauche sur M : si $g \in \mathrm{Aut}(M)$ et $\bar{a} \in M$, nous notons $g(\bar{a})$ ou $g\bar{a}$ l'image de $\bar{a}$ par g.

Pour une partie A de M, nous notons $\mathrm{Aut}_A(M)$ (ou $\mathrm{Fix}(A)$ s'il n'y a pas d'ambiguité) le sous-groupe des automorphismes de M fixant point par point A. Par définition, l'ensemble des sous-groupes $\mathrm{Aut}_{\bar{a}}(M)$ pour $\bar{a}$ parcourant les uples finis de M, est un système de voisinages ouverts de l'identité.

Si A est une partie de M, nous notons $\mathrm{Aut}(A)$ le groupe des automorphismes de la structure induite sur A par M. Si M est saturée et si $|A| < |M|$, alors $\mathrm{Aut}(A)$ est le sous-groupe topologique des permutations de A se prolongeant en un automorphisme de M. Dans le cas particulier d'une structure fortement minimale, sans hypothèse de saturation, le groupe $\mathrm{Aut}(A)$ est toujours le sous-groupe topologique des permutations de A se prolongeant en un automorphisme de M.

Nous avons défini les types forts et les automorphismes forts dans le cadre de la stabilité (1.1.2). Dans ce chapitre nous restons dans ce cadre car nous considérons des structures fortement minimales.

Nous notons $\mathrm{Autf}(M)$ le sous-groupe des automorphismes forts de M. Par définition un automorphisme est fort s'il fixe globalement chacune des classes des relations d'équivalence finies $\emptyset$-définissables (1.1.4 et 1.1.5). Donc $\mathrm{Autf}(M)$ est un sous-groupe normal fermé de $\mathrm{Aut}(M)$. Pour A une partie de M, nous notons $\mathrm{Autf}(A)$ le sous-groupe des automorphismes de A fixant les types forts.

Nous notons $\mathrm{Gal}(M) = \mathrm{Aut}(M)/\mathrm{Autf}(M)$ le groupe de Galois de M. Si M est saturée, $\mathrm{Gal}(M) \simeq \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}^{eq}(\emptyset))$. Si M n'est pas saturée, $\mathrm{Gal}(M)$ peut-être un sous-groupe propre de $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}^{eq}(\emptyset))$, mais ce n'est jamais le cas dans une structure fortement minimale. On munit le groupe $\mathrm{Gal}(M)$ de la topologie du groupe $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}^{eq}(\emptyset))$. Pour plus d'informations concernant le groupe de Galois, on peut consulter par exemple les articles [La 82] et [La 91].

Pour une partie A de M, nous notons $\mathrm{Autf}_A(M)$ le groupe des automorphismes A-forts (c'est-à-dire les automorphismes que fixent globalement chacune des classes des relations d'équivalence finies A-définissables). Alors $\mathrm{Autf}_A(M)$ est un sous-groupe normal fermé de $\mathrm{Aut}_A(M)$ et nous notons $\mathrm{Gal}_A(M)$ le groupe quotient $\mathrm{Aut}_A(M)/\mathrm{Autf}_A(M)$. Si M est saturée, $\mathrm{Gal}_A(M) \simeq \mathrm{Aut}_A(\mathrm{acl}^{eq}(A))$.

2.2 Structures à valence bornée

Dans cette section nous caractérisons les structures fortement minimales dites libres (c'est-à-dire ayant un groupe d'automorphismes le plus libre possible). Nous montrons (2.2.19 et 2.2.20) que ces structures sont celles à valence bornée, notion utilisée par A.A. Ivanov dans ses travaux concernant les structures fortement minimales triviales finiment axiomatisées. A.A. Ivanov a montré que toute structure fortement minimale triviale sur un langage fini qui a une clôture algébrique du vide infinie, a un enrichissement par un nombre fini de constantes qui est à valence bornée [Iv 93]. En particulier c'est le cas de toutes les structures fortement minimales triviales non $\aleph_0$-catégoriques car dans une telle structure la clôture algébrique d'un élément non algébrique est infinie. Nous redémontrons ce résultat pour toute structure fortement minimale triviale sur un langage fini sans hypothèse sur la clôture algébrique du vide (2.2.15). Auparavant nous montrons que toute structure fortement minimale triviale est à valence bornée si et seulement si tout type d'uple ne contenant pas d'élément algébrique est stationnaire (2.2.8) et nous donnons un langage "canonique" minimal d'une structure fortement minimale triviale (2.2.14).

2.2.1 Structures à valence bornée et structures libres

Nous montrons qu'une structure est à valence bornée si et seulement si ses types sont déterminés par les types induits dans chaque composante (2.2.7).

Nous remarquons aussi qu'une structure M fortement minimale triviale est entre deux structures fortement minimales à valence bornée : un simple enrichissement de M par des constantes est à valence bornée (2.2.9) et une structure réduite de M, la structure réduite aux formules à valence bornée, est évidemment à valence bornée et a le même groupe d'automorphismes d'une composante non algébrique (2.2.10).

Nous donnons ensuite des constructions générales qui nous permettrons d'obtenir des structures fortement minimales à valence bornée (2.2.12) et des enrichissement de telles structures qui ne seront plus à valence bornée (2.2.17).

Définition. Soit M une structure. Pour tout $a \in M$ et $A \subset M$ nous notons iacl(a) l'ensemble des éléments interalgébriques avec a, et iacl(A) l'ensemble des éléments interalgébriques avec un élément de A (iacl$(A) = \cup_{a\in A}$iacl(a)).

La relation d'interalgébricité est une relation d'équivalence donc M est réunion disjointe de iacl(a_i) (ses **composantes** interalgébriques).

M est **réduite à une composante** si M = iacl(a) avec a non algébrique. En particulier dans ce cas acl$(\emptyset) = \emptyset$.

M est **libre** (ou ses composantes sont indépendantes) si pour toute extension élémentaire N de M et tout uple $\bar{a} = (\bar{a}_i)_{i\in I}$ (éventuellement infini) tel que les $\bar{a}_i$ sont dans des composantes distinctes alors le type de $\bar{a}$ est déterminé par les types des $\bar{a}_i$. Remarquons qu'une structure libre le reste si l'on ajoute des constantes au langage.

Remarque. Soit M une structure fortement minimale triviale.

- Une composante de M est soit la composante algébrique acl$(\emptyset)$, soit une composante non algébrique acl$(a) \setminus$ acl$(\emptyset)$ pour $a \in M \setminus$ acl$(\emptyset)$.
- Ses composantes non algébriques sont isomorphes.
- Si $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont dans deux composantes distinctes alors $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont indépendants.
- M est $\aleph_0$-catégorique si et seulement si ses composantes sont finies.

Remarque. Si M est une structure fortement minimale libre alors M est triviale.

$\triangleright$ On se place dans une extension élémentaire N saturée. Soient $a_1 \dots a_n$ et a des éléments de N tels que pour tout i, $a \notin$ acl(a_i). Soit $b \in N$ tel que pour tout i, $b \notin$ acl(a_i). Alors tp$(ba_1 \dots a_n) =$ tp$(aa_1 \dots a_n)$. Donc $a \notin$ acl$(a_1 \dots a_n)$. $\triangleleft$

Remarque 2.2.1. Soit M une structure fortement minimale triviale. Soient $(\bar{a}_i)_{i\in I}$ et $(\bar{b}_i)_{i\in I}$ deux familles d'uples d'éléments interalgébriques telles que pour tout $i \neq j$, $\bar{a}_i$ et $\bar{a}_j$ sont dans des composantes distinctes (de même pour $\bar{b}_i$ et $\bar{b}_j$).

i) Si pour tout $i \in I$, les uples $\bar{a}_i$ et $\bar{b}_i$ ont même type fort alors $(\bar{a}_i)_{i\in I}$ et $(\bar{b}_i)_{i\in I}$ ont même type fort.

ii) Si pour tout $i \in I$, le type de $\bar{a}_i$ est stationnaire alors le type de $(\bar{a}_i)_{i\in I}$ est stationnaire.

$\triangleright$ ii) est un corollaire immédiat de i) et i) se montre simplement en utilisant le fait que dans une structure fortement minimale triviale des éléments deux à deux indépendants sont indépendants. $\triangleleft$

Définition. Soit M une structure.

- Une relation R est **à valence bornée** dans M si R est $\emptyset$-définissable dans M et s'il existe un entier m tel que pour tout $a \in M$, il y a au plus m uples réalisant R et contenant a. Une relation à valence bornée n'est satisfaite que par des uples d'éléments interalgébriques et réciproquement un uple d'éléments interalgébriques dans M réalise une relation à valence bornée.

- Pour une L-structure M, on note $\mathbf{L_{Vb}}$ le langage constitué des relations à valence bornée dans M.

- M est **à valence bornée** si M est $\emptyset$-interdéfinissable avec une structure dont le langage est constitué de relations à valence bornée. Donc M est à valence bornée si M est $\emptyset$-interdéfinissable avec sa structure réduite à L_{Vb}. Dans ce cas on considérera M dans son langage à valence bornée, L_{Vb}.

Remarque. Toute relation unaire est à valence bornée et donc toute structure dont le langage est constitué de relations unaires est à valence bornée.

Remarque 2.2.2. Soit $\bar{a}$ un uple d'éléments interalgébriques dans une structure. Alors le type de $\bar{a}$ est déterminé par son type atomique restreint aux relations à valence bornée (c'est-à-dire l'ensemble des relations à valence bornée réalisées par $\bar{a}$, c'est-à-dire le type atomique de $\bar{a}$ dans le langage L_{Vb}). En particulier un automorphisme dans le langage L_{Vb} agit par permutation sur les composantes interalgébriques.

$\triangleright$ On peut supposer $\bar{a}$ fini. Il existe $R(\bar{x})$ une relation à valence bornée satisfaite par $\bar{a}$. Pour tout formule $\phi(\bar{x})$, $R(\bar{x}) \wedge \phi(\bar{x})$ reste à valence bornée et donc si $\bar{a}$ satisfait ϕ alors $R(\bar{a}) \wedge \phi(\bar{a})$ appartient au type atomique dans L_{Vb} de $\bar{a}$. $\triangleleft$

Nous commençons par vérifier qu'une structure libre est à valence bornée :

Lemme 2.2.3. *Si M est une structure libre alors M est à valence bornée et a l'élimination des quantificateurs dans le langage L_{Vb}.*

$\triangleright$ On se place dans n'importe quelle extension élémentaire N de M. Soit $\bar{a} = \bar{a}_1 \dots \bar{a}_n$ tel que les $\bar{a}_i$ sont des uples d'éléments interalgébriques de N qui appartiennent à des composantes distinctes. Comme M est libre, le type de $\bar{a}$ est déterminé par les types des $\bar{a}_i$. Par (2.2.2), pour chaque i, le type de $\bar{a}_i$ est déterminé par son type atomique restreint aux relations à valence bornée. Donc le type de $\bar{a}$ est aussi déterminé par son type atomique restreint aux relations à valence bornée. $\triangleleft$

Dans ce qui suit, nous montrons qu'une structure à valence bornée a l'élimination des quantificateurs et est ω-homogène (sans hypothèse de saturation) :

Lemme 2.2.4. *Soit M une structure à valence bornée. Soient $\bar{a}$ et $\bar{b}$ deux uples finis de M ayant même type atomique (c'est-à-dire satisfaisant les mêmes relations à valence bornée). Alors il existe un automorphisme de M envoyant $\bar{a}$ sur $\bar{b}$.*

$\triangleright$ On peut supposer que $\bar{a} = \bar{a}_1 \dots \bar{a}_n$ tels que pour tout i, $\bar{a}_i$ est un uple d'éléments interalgébriques. Évidemment $\bar{b}$ s'écrit alors de la même manière.

Par (2.2.2), pour tout i, $\mathrm{tp}(\bar{a}_i) = \mathrm{tp}(\bar{b}_i)$. Fixons un i. Dans une extension élémentaire de M il existe un automorphisme qui envoie $\bar{a}_i$ sur $\bar{b}_i$. Cet automorphisme induit un isomorphisme partiel de $\mathrm{iacl}(\bar{a}_i)$ sur $\mathrm{iacl}(\bar{b}_i)$.

Soient $A = \mathrm{iacl}(\bar{a})$ et $B = \mathrm{iacl}(\bar{b})$. Soit f l'union des isomorphismes partiels obtenus pour chaque i. Alors f est un isomorphisme partiel de A dans B car M est à valence bornée.

Nous prolongeons f à $A \cup B$ par induction. Remarquons que pour toute composante C de M il existe autant de composantes isomorphes à C dans A que dans B. En particulier si $A \neq B$ il existe une composante C dans B qui n'est pas dans A et alors il existe une composante C' isomorphe à C qui elle est dans A mais pas dans B. Nous prolongeons f à $A \cup C$ par un isomorphisme partiel qui envoie C sur C'. Par une induction finie on obtient un isomorphisme de $A \cup B$ dans $A \cup B$.

Pour obtenir un automorphisme de M il suffit d'étendre cet isomorphisme par l'identité en dehors de $A \cup B$. $\lhd$

Corollaire 2.2.5. *Si une structure M est à valence bornée alors toute formule $\emptyset$-définissable est combinaison booléenne de relations à valence bornée dans M (c'est-à-dire M en tant que L_{Vb}-structure a l'élimination des quantificateurs) et M est ω-homogène.*

Corollaire 2.2.6. *Si M est une structure à valence bornée alors M est libre et pour tout $A \subset M$,* $\mathrm{acl}(A) = \mathrm{acl}(\emptyset) \cup \mathrm{iacl}(A)$. *Si de plus M est fortement minimale alors M est triviale.*

Nous avons donc montré par (2.2.3), (2.2.5) et (2.2.6) :

Proposition 2.2.7. *Une structure est à valence bornée si et seulement si elle est libre, si et seulement si elle a l'élimination des quantificateurs dans L_{Vb}. De plus une structure à valence bornée est ω-homogène.*

Dans le cas des structures fortement minimales triviales, on peut donner une caractérisation des structures à valence bornée en terme de types stationnaires :

Lemme 2.2.8. *Soit M une structure fortement minimale triviale. Alors M est libre si et seulement si tout type sur $\emptyset$ d'uple ne contenant pas d'éléments algébriques est stationnaire. Ce qui est équivalent à ce que tout automorphisme de D est un automorphisme fort de D (c'est-à-dire* $\mathrm{Autf}(D) = \mathrm{Aut}(D)$*) pour une (toute) composante non algébrique D.*

En particulier si $\mathrm{acl}(\emptyset) = \mathrm{dcl}(\emptyset)$ *et* $\mathrm{acl}(\emptyset)$ *est infini, M est libre.*

$\rhd$ Par (2.2.1), remarquons que si tout type d'un uple d'une composante non algébrique est stationnaire, alors tout type d'uple ne contenant pas d'élément algébrique est stationnaire.

Supposons M libre. On se place dans une extension élémentaire N saturée. Soient $\bar{a}$ et $\bar{b}$ tels que $\bar{a}$ est d'intersection vide avec $\mathrm{acl}(\emptyset)$, et $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type (sur vide). Comme N est saturée il existe un sous-ensemble infini N' de N algébriquement clos ne contenant ni $\bar{a}$, ni $\bar{b}$ (il suffit de prendre l'union des autres composantes). Alors N' est une sous-structure élémentaire de N et $\bar{a}$ (de même que $\bar{b}$) est indépendant de N'. Comme M est libre, $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type au-dessus de N'. Donc le type de $\bar{a}$ est stationnaire.

Supposons réciproquement que tout type d'uple ne contenant pas d'élément algébrique est stationnaire. Soient $(\bar{a}_i)_{i\in I}$ et $(\bar{b}_i)_{i\in I}$ deux familles d'uples d'éléments dans une extension élémentaire N saturée de M telles que les $\bar{a}_i$ sont dans des composantes distinctes non algébriques (de même pour les $\bar{b}_i$) et telles que pour tout $i \in I$, $\bar{a}_i$ et $\bar{b}_i$ ont même type. Soient de plus $\bar{a}'$, $\bar{b}' \in \mathrm{acl}(\emptyset)$ qui ont même type. Montrons que $\bar{a}'(\bar{a}_i)_{i\in I}$ et $\bar{b}'(\bar{b}_i)_{i\in I}$ ont même type. Par (2.2.1), $(\bar{a}_i)_{i\in I}$ et $(\bar{b}_i)_{i\in I}$ ont même type et ce type est stationnaire. Comme $\bar{a}'$ et $\bar{b}'$ ont même type, il existe un automorphisme f de N qui envoie $\bar{a}'$ sur $\bar{b}'$. Alors $\bar{a}'(\bar{a}_i)_{i\in I}$ a même type que $\bar{b}'f((\bar{a}_i)_{i\in I})$ et par stationnarité, $\bar{b}'f((\bar{a}_i)_{i\in I})$ a même type que $\bar{b}'(\bar{b}_i)_{i\in I}$. $\triangleleft$

Corollaire 2.2.9. *Soit M une structure fortement minimale triviale et $C \subset M$ infini et algébriquement clos. Alors $M' = (M, c;\ c \in C)$ est à valence bornée.*

$\triangleright$ Les types dans le langage de M' sont stationnaires car C est une sous-structure élémentaire de M. Donc M' est libre (2.2.8). $\triangleleft$

Remarque. Le résultat de A.A. Ivanov (concernant l'enrichissement par un nombre fine de constantes dans le cas d'un langage fini), n'est pas un corollaire direct de (2.2.9). Nous retrouvons son résultat plus loin (2.2.15).

Nous venons de remarquer qu'il suffit d'enrichir une structure fortement minimale triviale par des constantes pour qu'elle devienne à valence bornée. Nous remarquons inversement que toute structure fortement minimale est un enrichissement d'une structure fortement minimale à valence bornée telle que le groupe d'automorphismes d'une (de toute) composante non algébrique reste inchangé :

Proposition 2.2.10. *Soit M une structure fortement minimale saturée (non nécessairement triviale), soient $a \in M \setminus \mathrm{acl}(\emptyset)$ et $D = \mathrm{iacl}(a)$. Soit $\tilde{M}$ la structure M réduite aux formules à valence bornée. Alors $\tilde{M}$ est fortement minimale triviale et le groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(D)$ reste inchangé dans $\tilde{M}$.*

$\triangleright$ La structure $\tilde{M}$ est saturée car M est saturée. Toute partie définissable de $\tilde{M}$ à paramètres dans M est finie ou cofinie car M est fortement minimale. Donc $\tilde{M}$ est fortement minimale. Comme $\tilde{M}$ est à valence bornée, $\tilde{M}$ est triviale. Soient $G = \mathrm{Aut}(D)$ dans M et $\tilde{G} = \mathrm{Aut}(D)$ dans $\tilde{M}$. La structure M est un enrichissement de la structure $\tilde{M}$ donc le groupe G est un fermé du groupe $\tilde{G}$. Pour tout uple fini $\bar{d}$ de D, l'orbite de $\bar{d}$ par $\mathrm{Aut}(M)$ est une partie définissable à valence bornée. Par conséquent tout élément de $\tilde{G}$ est dans l'adhérence de G. Donc $G = \tilde{G}$. $\triangleleft$

Définition. Une structure M est **transitive** si son groupe d'automorphismes agit transitivement sur M (c'est-à-dire pour tout $a, b \in M$, il existe un automorphisme g de M tel que $g(a) = b$).

Une structure fortement minimale dont la composante algébrique est vide, est transitive. Nous montrons réciproquement qu'une structure transitive à valence bornée est fortement minimale. L'hypothèse de transitivité implique que $\mathrm{acl}(\emptyset)$ est vide. Ce lemme nous donnera un moyen simple de construire des structures fortement minimales triviales libres.

Lemme 2.2.11. *Soit M une structure transitive à valence bornée alors M est fortement minimale (triviale libre) et si D est une composante de M, M est isomorphe à l'union de $\dim(M)$ copies disjointes de D.*

$\triangleright$ Ici M est une structure transitive donc toutes ses composantes interalgébriques sont isomorphes. Soit $D = \mathrm{iacl}(d)$ une composante. Nous montrons que toute structure élémentairement équivalente à M est isomorphe à une union de copies disjointes de D.

Soit N une structure élémentairement équivalente à M. On peut supposer M et N incluses dans une même extension élémentaire C.

Soit $a \in N$. Par transitivité a et d ont même type et par (2.2.4) il existe un automorphisme de C qui envoie a sur d. Cet automorphisme envoie $\mathrm{iacl}(a)$ sur $D = \mathrm{iacl}(d)$.

On obtient alors un isomorphisme entre N et une union de copies disjointes de D en faisant l'union des isomorphismes correspondant à chaque composante de N. C'est bien un isomorphisme car M est à valence bornée.

Montrons que pour toute partie A de N, $\mathrm{iacl}(A) = \mathrm{acl}(A)$ et qu'il n'y a qu'un seul type non algébrique sur A et donc que M est fortement minimale triviale.

Soient $b \notin \mathrm{iacl}(A)$ et $c \notin \mathrm{iacl}(A)$. Alors il existe un isomorphisme de N fixant $\mathrm{iacl}(A)$ et envoyant b sur c. En effet N est l'union disjointe de $\mathrm{iacl}(A)$ et de composantes B_i avec $B_0 = \mathrm{iacl}(b)$ et aussi l'union disjointe de $\mathrm{iacl}(A)$ et de composantes C_i avec $C_0 = \mathrm{iacl}(c)$. Pour chaque i, on a donc un isomorphisme partiel qui envoie B_i sur C_i et tel que l'isomorphisme correspondant à $i = 0$ envoie b sur c. On obtient un automorphisme de N en le prolongeant par l'identité sur $\mathrm{iacl}(A)$.

La structure M est libre car M est à valence bornée. $\triangleleft$

Remarque. Dans ce lemme, nous pouvons remplacer l'hypothèse de transitivité par les hypothèses $\mathrm{acl}(\emptyset)$ est fini et il y a un unique 1-type au-dessus de $\mathrm{acl}(\emptyset)$ non algébrique dans M : en effet la théorie de M dit alors qu'il y a un unique 1-type non algébrique au-dessus de $\mathrm{acl}(\emptyset)$.

Nous déduisons de ce lemme la proposition suivante :

Proposition 2.2.12. *Soit G un sous-groupe fermé du groupe des permutations d'un ensemble infini D tel que G agit transitivement sur D et pour tout $x \in D$, tout $y \in D$ a un nombre fini de conjugués par le sous-groupe fixant x. On munit D de la structure suivante : pour tout entier n et toute orbite de D^n par G on définit un prédicat que l'on interprète par cette orbite. Alors D est fortement minimale, triviale, libre, réduite à une composante et $G = \mathrm{Aut}(D)$.*

$\triangleright$ La structure D est transitive car $G \subset \mathrm{Aut}(D)$. Les prédicats correspondants aux n-orbites sont à valence bornée, donc D est à valence bornée. Par (2.2.11) D est fortement minimale triviale libre. Par ailleurs tous les éléments de D sont interalgébriques donc D est réduite à une composante.

Montrons que $\mathrm{Aut}(D) = G$. Soit $g \in \mathrm{Aut}(D)$. Alors un système de voisinages ouverts de g est donné par les $\{h \in \mathrm{Aut}(D);\ h(\bar{d}) = g(\bar{d})\}$, pour tous les uples finis $\bar{d}$. Pour un uple donné, $\bar{d}$, puisque g est un automorphisme, $g(\bar{d})$ est dans l'orbite par G de $\bar{d}$. Donc il existe $g' \in G$ tel que $g'(\bar{d}) = g(\bar{d})$ et le groupe $\mathrm{Aut}(D)$ est dans l'adhérence de G qui est fermé par hypothèse. $\triangleleft$

Définition. Soient M une structure et E une relation $\emptyset$-définissable dans M.

- E est une **relation d'équivalence sur uples bornés** dans M s'il existe une relation R à valence bornée dans M telle que $E \subset R \times R$ et telle que E définisse une relation d'équivalence finie (c'est-à-dire avec un nombre fini de classes) sur les uples réalisant R. En particulier $R(\bar{x}) = E(\bar{x}, \bar{x})$.

- On note $\mathbf{L_{VbRe}}$ le langage constitué des relations à valence bornée et des relations d'équivalence sur uples bornés.

- Une relation E d'équivalence sur uples bornés dans M est **e-minimale** si la relation à valence bornée $R(\bar{x}) = E(\bar{x}, \bar{x})$ est fortement minimale dans la structure réduite (M, L_{Vb}) et si E est minimale parmi les relations E' d'équivalence sur uples bornés tel que $E'(\bar{x}, \bar{x}) = R(\bar{x})$.

- On note $\mathbf{L_{VbMin}}$ le langage constitué des relations à valence bornée fortement minimales dans la structure réduite (M, L_{Vb}) et on note $\mathbf{L_{VbReMin}}$ le langage constitué des relations de L_{VbMin} et des relations d'équivalence sur uples bornés e-minimales.

Remarque. Les relations d'équivalence sur uples bornés e-minimales correspondent aux relations d'équivalence introduites par A. Ivanov dans la preuve de [Iv 93, Theorem 1.4]. Ce théorème correspond lui au corollaire 2.2.15 de la proposition 2.2.14 suivante.

Remarque 2.2.13. i) Soient M une structure, R une relation à valence bornée et E une relation telle que $E \subset R \times R$ et telle que E définisse une relation d'équivalence sur les uples réalisant R. Si le sous-groupe des automorphismes de M, préservant globalement chaque classe d'équivalence définie par E, agit transitivement sur M, alors E a un nombre fini de classes d'équivalence et est donc une relation d'équivalence sur uples bornés.

ii) Soient M une structure stable et E une relation d'équivalence sur uples bornés e-minimale alors E sépare les types forts réalisés dans $R(\bar{x}) = E(\bar{x}, \bar{x})$ (c'est-à-dire pour tout $\bar{a}$, $\bar{b}$ dans R, alors $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type fort si et seulement si $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont dans la même E-classe).

iii) Dans une structure M fortement minimale transitive (c'est-à-dire $\mathrm{acl}(\emptyset) = \emptyset$), le groupe des automorphismes forts agit transitivement sur M et fixe globalement chacune des classes de chaque relation d'équivalence sur uples bornés.

iv) Dans une structure fortement minimale, si une classe d'une relation d'équivalence sur uples bornés contient un uple non algébrique, alors cette classe a un représentant dans toute composante non algébrique.

v) Une classe d'une relation d'équivalence sur uples bornés a un représentant dans tout modèle. En particulier dans le cas d'une théorie fortement minimale, cette classe a un représentant dans la clôture algébrique du vide si celle-ci est infinie.

Nous montrons que, sous certaines conditions, une structure fortement minimale triviale a seulement pour langage L_{VbRe} :

Proposition 2.2.14. *Soit M une structure fortement minimale triviale. Deux uples $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type fort s'ils ont même type atomique dans le langage L_{Vb} et si pour chaque relation E d'équivalence sur uples bornés contenant $\bar{a}' \subseteq \bar{a}$ alors $\bar{a}'$ et $\bar{b}'$ (correspondant à $\bar{a}'$ dans $\bar{b}$) sont dans la même E-classe. En particulier un automorphisme fort de M est simplement un automorphisme qui fixe globalement chacune des classes des relations d'équivalence sur uples bornés.*

De plus si $\mathrm{acl}(\emptyset) = \mathrm{dcl}(\emptyset)$ *ou si* $\mathrm{acl}(\emptyset)$ *est infini alors* M *est* $\emptyset$*-interdéfinissable avec sa structure réduite au langage* L_{VbRe}.

Enfin si $\mathrm{acl}(\emptyset) = \emptyset$ *alors* M *est* $\emptyset$*-interdéfinissable avec sa structure réduite au langage* $L_{VbReMin}$ *et la structure* M *réduite à* L_{Vb} *est* $\emptyset$*-interdéfinissable avec la structure* M *réduite au langage* L_{VbMin}.

$\triangleright$ Soient $\bar{a}$ et $\bar{b}$ deux uples finis de M vérifiant les hypothèses. Montrons que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type fort. Par (2.2.1) on peut supposer que $\bar{a}$ est un uple d'éléments interalgébriques. Donc par (2.2.2) $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type. Soit E une relation d'équivalence finie sur les uples de même longueur que $\bar{a}$. Soit R une relation à valence bornée satisfaite par $\bar{a}$ (et donc par $\bar{b}$). Soit $E' = E \cap (R \times R)$. Alors E' est une relation d'équivalence sur uples bornés. Par hypothèse on a $E'(\bar{a}, \bar{b})$, donc $E(\bar{a}, \bar{b})$. Les uples $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont donc dans les mêmes classes de relations d'équivalence finies. Ils ont donc même type fort.

Montrons maintenant que si $\mathrm{acl}(\emptyset) = \mathrm{dcl}(\emptyset)$ ou si $\mathrm{acl}(\emptyset)$ est infini alors M est $\emptyset$-interdéfinissable avec sa structure réduite au langage L_{VbRe}. On se place dans une extension élémentaire N saturée et on considère deux uples finis $\bar{a}$ et $\bar{b}$ qui ont même type dans le langage L_{VbRe}. Nous montrons qu'alors ils ont même type.

Supposons que $\bar{a} = \bar{a}_0\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n$ tel que $\bar{a}_0 \in \mathrm{acl}(\emptyset)$ et tel que les $\bar{a}_i$ sont dans des composantes distinctes. On a alors $\bar{b} = \bar{b}_0\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n$ de la même manière.

Il existe un automorphisme f de la structure réduite N au langage L_{VbRe} qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$.

Supposons $\mathrm{acl}(\emptyset)$ infini. Soit $\tilde{a}_0$ une énumération de $\mathrm{iacl}(\bar{a}_0) = \mathrm{acl}(\emptyset)$ telle que $\bar{a}_0$ est un segment initial de $\tilde{a}_0$. Alors $\bar{b}_0$ est un segment initial de $\tilde{b}_0 := f(\tilde{a}_0)$, et $\tilde{a}_0$ et $\tilde{b}_0$ ont même type dans N (2.2.2). Par un automorphisme de N on peut supposer que $\tilde{a}_0$ et $\tilde{b}_0$ sont égaux et que $\tilde{a}_0\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n$ et $\tilde{a}_0\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n$ ont même type dans le langage L_{VbRe}. Vérifions qu'alors pour tout $i > 0$, $\bar{a}_i$ et $\bar{b}_i$ ont même type fort : en effet pour tout $i > 0$, les uples $\bar{a}_i$ et $\bar{b}_i$ satisfont les mêmes relations à valence bornée. De plus pour $i > 0$, si E est une relation d'équivalence sur uples bornés contenant $\bar{a}_i$ alors $\bar{a}_i$ et $\bar{b}_i$ sont dans la même E-classe car il existe $\bar{d} \in \mathrm{acl}(\emptyset)$ tel que $\bar{d}$ est dans la E-classe de $\bar{a}_i$ (2.2.13 v) et, comme $\tilde{a}_0\bar{a}_i$ et $\tilde{a}_0\bar{b}_i$ ont le même type dans L_{VbRe}, $\bar{b}_i$ et $\bar{d}$ sont dans la même E-classe.

Ainsi $\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n$ et $\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n$ ont même type fort puisque pour tout $i > 0$, $\bar{a}_i$ et $\bar{b}_i$ ont même type fort (2.2.1). Ils ont donc même type sur $\mathrm{acl}(\emptyset)$.

Supposons maintenant que $\mathrm{acl}(\emptyset) = \mathrm{dcl}(\emptyset)$. Dans ce cas nous pouvons oublier $\bar{a}_0$ et $\bar{b}_0$ qui sont nécessairement égaux. Nous faisons le même raisonnement que ci-dessus en utilisant $\bar{a}_1$ au lieu de $\bar{a}_0$: nous commençons par identifier $\mathrm{iacl}(\bar{a}_1)$ et $\mathrm{iacl}(\bar{b}_1)$. Ensuite par (2.2.13 iv) nous montrons que pour tout $i > 0$, $\bar{a}_i$ et $\bar{b}_i$ ont même type fort. Donc $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type.

Supposons enfin que $\mathrm{acl}(\emptyset) = \emptyset$. Montrons que la structure M réduite à L_{VbMin} est $\emptyset$-interdéfinissable avec la structure M réduite à L_{Vb} et a l'élimination des quantificateurs. Soit $\bar{a}$ un uple d'éléments interalgébriques. Alors le type de $\bar{a}$ est isolé par une relation à valence bornée fortement minimale dans (M, L_{Vb}) car $\mathrm{acl}(\emptyset) = \emptyset$. Donc tout type dans le langage L_{Vb} est déterminé par sa restriction à L_{VbMin}. De plus toute relation à valence bornée est une union finie de relations à valence bornée fortement minimales dans (M, L_{Vb}). Vérifions maintenant que la structure M est $\emptyset$-interdéfinissable avec sa structure réduite au langage $L_{VbReMin}$: soit R un relation à valence bornée fortement minimale dans (M, L_{Vb}). Comme $\mathrm{acl}(\emptyset) = \emptyset$, la relation R contient un unique type dans la structure M et donc contient un nombre fini de types forts. Il existe donc une relation E d'équivalence sur uples bornés e-minimale telle que $E(\bar{x}, \bar{x}) = R(\bar{x})$. Cette relation sépare les types forts de R. Pour tout uple $\bar{a}$ d'éléments interalgébriques, il existe donc R isolant le type de $\bar{a}$ et une relation E d'équivalence sur uples bornés e-minimale tel que $E(\bar{x}, \bar{x}) = R(\bar{x})$. Alors pour tout $\bar{b}$, $\bar{b}$ a même type fort que $\bar{a}$ si et seulement si $\bar{b}$ est dans la E-classe de $\bar{a}$. Nous pouvons alors remplacer L_{VbRe} par $L_{VbReMin}$ et L_{Vb} par L_{VbMin} dans le raisonnement précédent du cas $\mathrm{acl}(\emptyset) = \mathrm{dcl}(\emptyset)$. $\lhd$

La proposition 2.2.14 permet de redémontrer, sans hypothèse sur la clôture algébrique du vide, le résultat de A.A. Ivanov [Iv 93, Theorem 1.4] :

Corollaire 2.2.15. *Soit M une structure fortement minimale triviale sur un langage fini. Alors il existe un ensemble fini C de M tel que $(M, c;\ c \in C)$ est à valence bornée. De plus si $\mathrm{acl}(\emptyset)$ est infini, nous pouvons choisir $C \subset \mathrm{acl}(\emptyset)$ et si $\mathrm{acl}(\emptyset)$ est fini, nous pouvons choisir C tel que $\mathrm{acl}(\emptyset) \subseteq C \subseteq \mathrm{acl}(d)$ pour un élément d non algébrique de M.*

$\rhd$ Nous pouvons supposer que $\mathrm{acl}(\emptyset) = \mathrm{dcl}(\emptyset)$ ou que $\mathrm{acl}(\emptyset)$ est infini. En effet si $\mathrm{acl}(\emptyset)$ est fini, il suffit d'ajouter aux constantes du langage les éléments algébriques pour que $\mathrm{acl}(\emptyset) = \mathrm{dcl}(\emptyset)$.

Par (2.2.14) M est alors $\emptyset$-interdéfinissable avec sa structure réduite au langage L_{VbRe}. Comme M a un langage fini, M est $\emptyset$-interdéfinissable avec sa structure réduite à une partie finie $\tilde{L}$ de L_{VbRe}. Soit C une partie finie de M telle que toute classe d'une relation d'équivalence sur uples bornés dans $\tilde{L}$, a un représentant dans C. Par (2.2.13 iv et v) nous pouvons choisir C tel que $C \subseteq \mathrm{acl}(\emptyset)$ si $\mathrm{acl}(\emptyset)$ est infini, ou $C \subseteq \mathrm{acl}(d)$ sinon.

Nous montrons que $M' = (M, c;\ c \in C)$ est à valence bornée. Il suffit pour cela de vérifier que tout uple $\bar{a}$ d'une extension élémentaire N' de M', le type de $\bar{a}$ sur C dans N est déterminé par le type de $\bar{a}$ dans le langage à valence bornée de M'. Soit E une relation d'équivalence sur uples bornés de $\tilde{L}$. Alors il existe $\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n \in C$ représentant toutes les classes de E. Dans M', $E(\bar{x}, \bar{y}) \iff \vee_i (E(\bar{x}, \bar{c}_i) \cap E(\bar{y}, \bar{c}_i))$. De plus les formules $E(\bar{x}, \bar{c}_i)$ sont à valence bornée car $E \subset R \times R$ pour R à valence bornée, et par conséquent $E(\bar{x}, \bar{y})$ est définissable dans le langage à valence bornée de M'. Donc le type de $\bar{a}$ dans le langage à valence bornée de M' détermine celui de $\bar{a}C$ dans le langage $\tilde{L}$ et donc dans la structure M. $\lhd$

Corollaire 2.2.16. *Soit M une structure fortement minimale triviale sur un langage fini. Si $\mathrm{acl}(\emptyset) = \mathrm{dcl}(\emptyset)$ alors il existe un nombre fini de relations d'équivalence sur uples bornés tel qu'un automorphisme est fort dès qu'il fixe globalement chacune des classes de ces relations.*

$\rhd$ Par (2.2.14), il existe un nombre fini $E_1, \ldots, E_n$ de relations d'équivalence sur uples bornés tel que M est $\emptyset$-interdéfinissable avec sa structure réduite au langage

$L_{Vb} \cup \{E_1, \ldots, E_n\}$. Soit f un automorphisme de M fixant globalement chacune des classes des E_i. Soit $\bar{a}$ un uple énumérant une composante de M. Montrons que $f(\bar{a})$ a même type fort que $\bar{a}$. Par (2.2.1) ceci montre que f est un automorphisme fort.

Plaçons nous dans une extension élémentaire saturée N de M. Ou bien $\bar{a}$ et $f(\bar{a})$ énumèrent la même composante et dans ce cas posons g la bijection de N telle que $g(\bar{a}) = f(\bar{a})$ et g égale à l'identité sur $N \setminus \{\bar{a}\}$. Ou bien $\bar{a}$ et $f(\bar{a})$ énumèrent deux composantes distinctes et dans ce cas posons g la bijection de N telle que $g(\bar{a}) = f(\bar{a})$, $g(f(\bar{a})) = \bar{a}$ et g égale à l'identité sur $N \setminus \{\bar{a}, f(\bar{a})\}$. Alors g est un automorphisme de N. En effet g préserve les relations à valence bornée et comme f fixe globalement chacune des classes des E_i, g aussi.

Alors g est un automorphisme fort de N car g fixe $\mathrm{acl}(\emptyset) \cup N \setminus \{\bar{a}, f(\bar{a})\}$ qui est une sous-structure élémentaire de N. Par conséquent, $f(\bar{a})$ et $\bar{a}$ ont même type fort. $\lhd$

Enfin nous montrons une réciproque à (2.2.14) pour terminer cette section. Ce dernier lemme nous permettra d'obtenir des structures fortement minimales triviales non libres (c'est-à-dire non à valence bornée).

Lemme 2.2.17. *Soit M une structure à valence bornée. Soit M' un enrichissement de M par des relations $(E_j)_{j\in J}$ tel que pour tout $j \in J$ il existe une relation à valence bornée R_j dans M telle que $E_j \subset R_j \times R_j$ et E_j définit une relation d'équivalence sur les uples réalisant R_j. Soit G' le sous-groupe des automorphismes de M' fixant globalement chaque classe d'équivalence. Supposons que G' agit transitivement sur M'.*

Alors M' est fortement minimale triviale et toute structure N' élémentairement équivalente à M' est isomorphe à l'union de $\dim(N')$ copies disjointes d'une composante D' (où l'on recolle les classes d'équivalence : c'est-à- dire si $\bar{a}_1$ et $\bar{a}_2$ sont deux copies d'un même uple $\bar{a}$ dans D' et si $\bar{a}$ satisfait R_j alors on pose $E_j(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$).

Enfin $G' = \mathrm{Autf}(M')$ et si G' est un sous-groupe propre de $\mathrm{Aut}(M')$ alors M' n'est pas à valence bornée (c'est-à-dire non libre).

$\rhd$ Remarquons que les relations E_j sont des relations d'équivalence sur uples bornés (elles ont un nombre fini de classes car G' agit transitivement sur M') (2.2.13 i). Par ailleurs M est transitive à valence bornée, donc M est fortement minimale (2.2.11).

Soient $d \in M$ et $D = \mathrm{iacl}_M(d) = \mathrm{acl}_M(d)$ (clôture algébrique de d dans le langage à valence bornée de M). Soient D' la structure induite par M' sur D, $\bar{d}$ une énumération de D et p le type de $\bar{d}$ dans M'.

Par transitivité, la théorie de M' dit que pour toute partie finie $\tilde{p}$ de p, tout $J_0 \subset J$ fini et tout entier m : pour tout $x^0, \ldots, x^m$ il existe des uples $\tilde{x}^0, \ldots, \tilde{x}^m$ satisfaisant chacun $\tilde{p}$ tel que $x^0_0 = x^0, \ldots, x^m_0 = x^m$ et tel que pour tout $i_1, \ldots, i_l$ et $j \in J_0$, si $x^0_{i_1} \ldots x^0_{i_l}$ satisfait R_j alors pour tout $i \in \{0, \ldots, m\}$, $E_j(x^0_{i_1} \ldots x^0_{i_l}, x^i_{i_1} \ldots x^i_{i_l})$.

Soit N' une structure élémentairement équivalente à M'. Montrons que N' est une union de copies disjointes de D'. Par compacité pour toute famille d'éléments $(a^i)_{i\in I}$ de N', il existe $(\bar{a}^i)_{i\in I}$ tel que pour tout i, $a^i_0 = a^i$, $\bar{a}^i$ satisfait p et tel que pour tout $i_1, \ldots, i_l$ et $j \in J$ si $a^0_{i_1} \ldots a^0_{i_l}$ satisfait R_j alors pour tout $i \in I$, $E_j(a^0_{i_1} \ldots a^0_{i_l}, a^i_{i_1} \ldots a^i_{i_l})$.

Chaque $\bar{a}^i = \mathrm{iacl}_N(a_i)$ car $\bar{d} = \mathrm{iacl}_M(d)$ (iacl_N correspond à la clôture interalgébrique dans le langage à valence bornée de départ).

Ainsi pour obtenir un isomorphisme de N' sur l'union de copies disjointes de D', il suffit de choisir $(a_i)_{i\in I}$ dans N tel que $(\mathrm{iacl}_N(a_i))_{i\in I}$ donne un recouvrement disjoint de N et d'envoyer chaque $\bar{a}^i$ sur une copie de D'. On a alors un isomorphisme dans le langage de M car M est à valence bornée. De plus comme l'on a envoyé les classes d'équivalence de manière identique sur chaque copie de D', c'est un isomorphisme dans le langage enrichi.

Par le même type d'isomorphismes et de la même façon que dans la preuve de (2.2.11), on montre que M' est fortement minimale triviale et qu'en particulier la clôture algébrique reste inchangée car pour tout $A \subset N'$, $\mathrm{iacl}_N(A) = \mathrm{acl}_{N'}(A)$.

Soit f un automorphisme de M qui fixe globalement chacune des classes des relations E_i. Montrons que f est un automorphisme fort de M'. Il est immédiat que f est un automorphisme de M'. Soit N' une extension élémentaire de M'. Alors f s'étend en un automorphisme de N' en posant l'identité sur $N' \setminus M'$. Donc f est un automorphisme fort de N' puisque f fixe une copie D' qui est une sous-structure élémentaire de N'.

Comme $\mathrm{acl}(\emptyset) = \emptyset$ si M' est libre tout type est stationnaire et donc $\mathrm{Autf}(M') = \mathrm{Aut}(M')$ (2.2.8). Donc si M' est libre, $G' = \mathrm{Aut}(M')$. $\triangleleft$

2.2.2 Caractérisation par le groupe d'automorphismes

Nous allons montrer qu'une structure fortement minimale triviale est à valence bornée si et seulement si son groupe des automorphismes fixant globalement chacune de ses composantes est exactement le produit des groupes d'automorphismes de chacune de ses composantes (2.2.19 et 2.2.20).

Nous commençons par rappeler les définitions du produit semi-direct et du produit en couronne "généralisé" (ces notions apparaissent naturellement dans les groupes d'automorphismes d'une structure). Notre référence pour le produit en couronne est l'ouvrage [BMMN].

Définition. Soient N et H deux groupes. Soit ϕ un morphisme de H dans $\mathrm{Aut}N$ ($\mathrm{Aut}N$ est le groupe des automorphismes du groupe N). Le **produit semi-direct** $N \rtimes_\phi H$ est l'ensemble $N \times H$ muni de la loi de groupe suivante :

$$(n, h) \cdot (n', h') = (n \cdot (\phi(h)(n')), h \cdot h').$$

Remarque. Un groupe G se décompose en produit semi-direct $N \rtimes H$ si on a une suite exacte qui possède une section :

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \xrightarrow{p} H \longrightarrow 1$$

telle qu'il existe un homomorphisme $s : H \to G$ vérifiant $p \circ s = id_H$.

Dans ce cas G est isomorphe à $N \rtimes_\phi H$ où $\phi(h)(n) = s(h)ns(h)^{-1}$.

Définition. Soient G un groupe et H un groupe agissant sur un ensemble I. Soit $K = G^I$. Le **produit en couronne** de G par H est le produit semi-direct $K \rtimes_\phi H$

de K par H où $\phi(h)((g_i)_{i\in I}) = (g_{h(i)})_{i\in I}$. On note en général ce produit en couronne simplement $G^I \rtimes H$.

Pour une structure stable M, les groupes $\mathrm{Autf}(M)$ et $\mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M)$ sont des sous-groupes normaux fermés de $\mathrm{Aut}(M)$. Voici un autre sous-groupe normal fermé particulier de $\mathrm{Aut}(M)$: le groupe fixant les composantes de M. Soit $(C_i)_{i\in I}$ les composantes non algébriques de M (M est l'union disjointe de $\mathrm{acl}(\emptyset)$ et des C_i).

Notons $\mathrm{FixComp}(M)$ le sous-groupe des automorphismes de M fixant globalement chaque composante. C'est un sous-groupe normal fermé.

Le groupe $\mathrm{Aut}(M)$ agit sur I par permutation des composantes non algébriques (un automorphisme fixe toujours globalement $\mathrm{acl}(\emptyset)$). Il existe donc un sous-groupe H du groupe des permutations S_I tel que

$$1 \longrightarrow \mathrm{FixComp}(M) \longrightarrow \mathrm{Aut}(M) \longrightarrow H \longrightarrow 1.$$

Le groupe $\mathrm{FixComp}(M)$ peut se voir comme un sous-groupe de

$$\prod_{i\in I} \mathrm{Aut}(C_i) \times \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset)).$$

Soit $\mathrm{FixComp}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M) = \mathrm{FixComp}(M) \cap \mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M)$. Il existe un sous-groupe H' de H tel que

$$1 \longrightarrow \mathrm{FixComp}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M) \longrightarrow H' \longrightarrow 1.$$

Le groupe $\mathrm{FixComp}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M)$ est lui un sous-groupe de $\prod_{i\in I} \mathrm{Aut}(C_i)$.

Remarque. Les composantes non algébriques d'une structure fortement minimale sont toutes isomorphes, donc les groupes $\mathrm{Aut}(C_i)$ sont égaux.

Lemme 2.2.18. *Soit M une structure fortement minimale triviale de dimension κ. Soit S_κ le groupe des permutations de κ.*

Nous avons les suites exactes suivantes qui sont de plus scindées (c'est-à-dire elles ont des sections) :

$$1 \longrightarrow \mathrm{FixComp}(M) \longrightarrow \mathrm{Aut}(M) \longrightarrow S_\kappa \longrightarrow 1$$

et

$$1 \longrightarrow \mathrm{FixComp}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M) \longrightarrow S_\kappa \longrightarrow 1.$$

▷ Soient $(C_i)_{i\in\kappa}$ les composantes non algébriques de M. Soit p la projection de $\mathrm{Aut}(M)$ dans S_κ définie par l'action de $\mathrm{Aut}(M)$ sur les composantes.

Soit pour chaque composante C_i un représentant c_i.

Montrons que $p(\mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M)) = S_\kappa$. Comme M est fortement minimale triviale, pour tout $\sigma \in S_\kappa$, $(c_i)_{i\in\kappa}$ et $(c_{\sigma(i)})_{i\in\kappa}$ ont même type fort. Donc il existe un automorphisme de M fixant $\mathrm{acl}(\emptyset)$ et envoyant $(c_i)_{i\in\kappa}$ sur $(c_{\sigma(i)})_{i\in\kappa}$.

Montrons qu'il existe une section s de S_κ dans $\mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M)$.

Pour tout i il existe un automorphisme fort ϕ_i qui envoie c_0c_i sur c_ic_0 car c_0c_i et c_ic_0 ont même type fort. Pour $\sigma \in S_\kappa$ on définit $s(\sigma)(x) = \phi_{\sigma(i)} \circ \phi_i^{-1}(x)$ si $x \in C_i$ et $s(\sigma)(x) = x$ si $x \in acl(\emptyset)$.

Alors s définit un morphisme de S_κ dans le groupe des permutations de M . Il faut vérifier que pour tout $\sigma \in S_\kappa$, la permutation $s(\sigma)$ est un automorphisme de M. Pour cela il suffit de vérifier que pour tout $\bar{a} \in M$, $s(\sigma)(\bar{a})$ et $\bar{a}$ ont même type. Soit $\bar{a} = \bar{a}_{i_1}..\bar{a}_{i_n}$ où $\bar{a}_{i_j} \in C_{i_j}$. Alors pour tout j, $\bar{a}_{i_j}$ et $s(\sigma)(\bar{a}_{i_j})$ ont même type fort, et donc $\bar{a}$ et $s(\sigma)(\bar{a}_{i_1})\dots s(\sigma)(\bar{a}_{i_n})$ ont même type fort (2.2.1). ◁

Remarque. Soient M une structure fortement minimale triviale et D une composante non algébrique de M. Si M a plus de trois composantes non algébriques alors $\mathrm{Aut}(M)$ n'est pas commutatif.

Si $\mathrm{Aut}(D)$ est commutatif alors pour tout $A \subset M$, $\mathrm{acl}(A) = \mathrm{dcl}(A) \cup \mathrm{acl}(\emptyset)$.

▷ Si M a plus de trois composantes alors S_κ n'est pas commutatif.

S'il existe A tel que $\mathrm{acl}(A) \neq \mathrm{dcl}(A) \cup \mathrm{acl}(\emptyset)$ alors il existe a et b dans une même composante non algébrique tels que $b \notin \mathrm{dcl}(a)$. Il existe donc un automorphisme g_1 dans $\mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}(a))$ qui fixe a et ne fixe pas b. Par ailleurs il existe un automorphisme g_2 dans $\mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}(a))$ qui envoie a sur b. On a $g_1 \circ g_2(a) \neq b = g_2 \circ g_1(a)$. ◁

Proposition 2.2.19. *Soit M une structure fortement minimale à valence bornée de dimension κ. Soit G le groupe d'automorphismes d'une composante non algébrique de M. Alors :*

i) $\mathrm{FixComp}(M) = G^\kappa \times \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$.

ii) $\mathrm{Aut}(M) = \mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M) \times \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset)) = \mathrm{Aut}(M \setminus \mathrm{acl}(\emptyset)) \times \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$.

iii) $\mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M) = G^\kappa \rtimes S_\kappa$.

iv) Pour tout élément $d \in M$ non algébrique, $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(d)) = G \times \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$.

v) $\mathrm{Autf}(M) = \mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M)$ *et donc* $\mathrm{Gal}(M) = \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$. *De même, pour une partie A de M,* $\mathrm{Autf}_A(M) = \mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(A)}(M)$ *et* $\mathrm{Gal}_A(M) = \mathrm{Aut}_A(\mathrm{acl}(A))$.

▷ La structure M est libre (2.2.6). Soient $(C_i)_{i\in\kappa}$ les composantes non algébriques de M.

i) Soit pour tout i, un automorphisme g_i de $C_i = \bar{c}_i$ et soit h un automorphisme de $\mathrm{acl}(\emptyset) = \bar{a}$. Comme M est libre, $((\bar{c}_i)_{i\in\kappa}, \bar{a})$ et $((g_i(\bar{c}_i))_{i\in\kappa}, h(\bar{a}))$ ont même type. Donc $((g_i)_{i\in\kappa}, h) \in \mathrm{FixComp}(M)$. En fait sans l'hypothèse de minimalité, on obtient : $\mathrm{FixComp}(M) = \prod \mathrm{Aut}(C_i) \times \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$.

ii) et iv) se montrent de la même manière en utilisant la définition d'une structure libre.

iii) Par (2.2.18), nous avons la suite exacte suivante :

$$1 \longrightarrow \mathrm{FixComp}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M) \longrightarrow S_\kappa \longrightarrow 1.$$

Pour tout $i \in \kappa$, soit $\bar{c}_i = C_i$ tel que toutes les énumérations $\bar{c}_i$ ont même type. Comme M est libre l'application s qui à $\sigma \in S_\kappa$ associe la permutation de M qui fixe $\mathrm{acl}(\emptyset)$ et envoie pour chaque i, $\bar{c}_i$ sur $\bar{c}_{\sigma(i)}$ est une section. Donc $\mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M)$ est le produit en couronne de G par S_κ.

v) $\mathrm{Autf}(M) = \mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M)$ puisque tout type d'uple ne contenant pas d'éléments algébriques est stationnaire (2.2.8). Soit A une partie de M. Alors $(M, a;\ a \in A)$ est encore libre. $\lhd$

Réciproquement :

Proposition 2.2.20. *Soit M une structure fortement minimale triviale saturée de dimension κ. Soit G le groupe d'automorphismes d'une composante non algébrique de M.*

Si $\mathrm{FixComp}(M) = G^\kappa \times \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ *alors M est à valence bornée.*

$\rhd$ Montrons que pour $\bar{a}$ dans une composante non algébrique, le type de $\bar{a}$ est stationnaire ce qui montre que M est libre et donc est à valence bornée (2.2.8 et 2.2.3). Soit $\bar{b}$ de même type que $\bar{a}$. Soit M' l'union des composantes ne contenant ni $\bar{a}$, ni $\bar{b}$. Alors M' est infini car M est saturée et M' est algébriquement clos donc c'est une sous-structure élémentaire de M. Soit $\bar{m}$ une énumération de M' et ϕ un automorphisme qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$. Il existe un automorphisme ψ qui fixe $\bar{b}$ et qui envoie $\phi(C_i)$ sur C_i pour toute composante C_i ne contenant ni $\bar{a}$, ni $\bar{b}$: il suffit pour cela de considérer la permutation σ de κ qui fixe i_0 tel que $C_{i_0} = \mathrm{iacl}(\bar{b})$, qui envoie j sur i pour $C_j = \phi(C_i)$ et qui envoie j_1 sur i_1, tel que $C_{j_1} = \phi(\mathrm{iacl}(\bar{b}))$ et $C_{i_1} = \mathrm{iacl}(\bar{a})$, et d'utiliser la section définie dans la preuve de (2.2.18). Alors $\psi \circ \phi(M') = M'$. Comme $\mathrm{FixComp}(M) = G^\kappa \times \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$, il existe un automorphisme θ qui fixe toujours $\bar{b}$ et qui envoie $\psi \circ \phi(\bar{m})$ sur $\bar{m}$. On a ainsi montré que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type au-dessus de M' et donc que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type fort. $\lhd$

Remarque. Dans le cas non $\aleph_0$-catégorique, les composantes non algébriques étant infinies il suffit de supposer que M contient deux composantes : en effet par un automorphisme fort on peut commencer par supposer que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont dans la même composante. Ensuite M' reste infini. Nous verrons par la suite que deux composantes sont en général nécessaires.

Dans la cas où $\mathrm{acl}(\emptyset)$ est infini, une seule composante suffit. On prend $M' = \mathrm{acl}(\emptyset)$.

D'autre part si $\mathrm{acl}(\emptyset)$ est infini, $(M, c;\ c \in \mathrm{acl}(\emptyset))$ est à valence bornée donc, $\mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M) = \mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(D)^\kappa \rtimes S_\kappa$ où D est une composante non algébrique de M.

2.3 Exemples non libres

Dans cette section nous présentons trois exemples de structures fortement minimales triviales non libres dans les trois cas suivants : $\aleph_0$-catégorique, non $\aleph_0$-catégorique unimodulaire et non unimodulaire (voir définition au paragraphe 2.4.3).

Ces exemples sont construits comme couverture finie (en fait double) de structures simples, dans le sens suivant :

Définition. Soient C et W deux structures telles que W est une partie $\emptyset$-définissable de C^{eq}. Alors C est une couverture finie de W si il existe une relation d'équivalence E $\emptyset$-définissable de C avec des classes finies, et une bijection $\emptyset$-définissable dans C^{eq}

de l'ensemble des E-classes de C sur W, telles que toute relation de W^n qui, est $\emptyset$-définissable dans la structure à deux sortes (C, W), est déjà $\emptyset$-définissable dans W. Si de plus toutes les classes sont de cardinal 2, C est une couverture double de W.

Nous commençons par donner un exemple non libre $\aleph_0$-catégorique :

Exemple 2.3.1. Les structures M_1 et M_2 qui suivent sont des couvertures doubles de l'ensemble infini muni d'une relation d'équivalence dont toutes les classes sont de cardinal 2.

Nous définissons en premier lieu une structure libre M_1. Soit I un ensemble infini et $M_1 = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times I, R)$ où R est la relation binaire à valence bornée définie par

$$R = \{((2m + \varepsilon, i), (2m + 2 + \varepsilon', i));\ i \in I,\ m, \varepsilon, \varepsilon' \in \{0, 1\}\}.$$

C'est à dire si D est une composante $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \{i\}$ et que l'on oublie i, R est définie sur D par l'ensemble

$$\{(0, 2), (2, 0), (0, 3), (3, 0), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}.$$

$$\text{Structure } M_1 \quad \begin{tikzcd} 0 & & 1 & 0 & & 1 & 0 & & 1 \\ R \arrow[u] \arrow[d] & R \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & R \arrow[u] \arrow[d] & R \arrow[u] \arrow[d] & R \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & R \arrow[u] \arrow[d] & R \arrow[u] \arrow[d] & R \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & R \arrow[u] \arrow[d] \cdots\cdots \\ 2 & & 3 & 2 & & 3 & 2 & & 3 \end{tikzcd}$$

La structure M_1 est transitive. Il suffit de considérer pour cela les automorphismes α et β sur D définis par $\alpha(0123) = (1032)$ et $\beta(0123) = (2301)$.

Par (2.2.11) la structure M_1 est fortement minimale triviale.

Il est facile de voir que $\mathrm{Aut}(D)$ est le produit en couronne de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par S_2 :

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes S_2.$$

Par (2.2.19), le groupe d'automorphismes de M_1 est $\mathrm{Aut}(D)^I \rtimes S_I$.

Nous enrichissons cet exemple pour obtenir un exemple non libre. Soit M_2 la structure M_1 enrichie par une relation E tel que $E \subset R \times R$ et E définit une relation d'équivalence à deux classes sur R. On définit E de manière uniforme sur les copies de D de telle façon que sur D, E définit les deux classes suivantes : $C_0 := \{(0, 2), (2, 0), (1, 3), (3, 1)\}$ et $C_1 := \{(0, 3), (3, 0), (1, 2), (2, 1)\}$.

$$\text{Structure } M_2 \quad \begin{tikzcd} 0 & & 1 & 0 & & 1 & 0 & & 1 \\ C_0 \arrow[u] \arrow[d] & C_1 \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & C_0 \arrow[u] \arrow[d] & C_0 \arrow[u] \arrow[d] & C_1 \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & C_0 \arrow[u] \arrow[d] & C_0 \arrow[u] \arrow[d] & C_1 \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & C_0 \arrow[u] \arrow[d] \cdots\cdots \\ 2 & & 3 & 2 & & 3 & 2 & & 3 \end{tikzcd}$$

Les automorphismes α et β sur D fixent globalement les classes d'équivalence. Donc l'action des automorphismes de M_2 fixant globalement chaque classe est transitive. Par (2.2.17) M_2 est fortement minimale triviale et non libre car l'automorphisme de D qui envoie 0123 sur 0132 échange les deux classes.

Il est simple de voir que $\mathrm{Aut}(D)$ dans M_2 est identique à celui de M_1.

Par contre $\mathrm{Aut}(M_2) \neq \mathrm{Aut}(M_1)$. Par (2.2.18) pour décrire ce groupe, il suffit de considérer $\mathrm{FixComp}(M_2)$ le sous-groupe des automorphismes de M_2 fixant globalement chaque composante. Associons à tout automorphisme dans $\mathrm{FixComp}(M_2)$, l'élément $0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ s'il fixe les classes, l'élément 1 sinon. $\mathrm{FixComp}(M_2)$ est alors le produit semi-direct

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I \rtimes_\psi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

où ψ est le morphisme de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans $(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))^I$ défini par

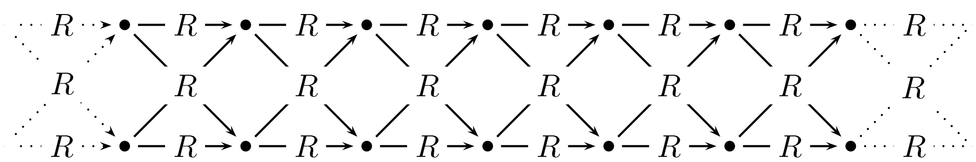
$$\psi(\varepsilon)((\theta_0^i, \theta_1^i)_{i\in I}) = (\theta_0^i + \varepsilon\theta_1^i, \theta_1^i)_{i\in I}.$$

Nous donnons maintenant un exemple non $\aleph_0$-catégorique qui est un cas particulier d'une construction que nous ferons ensuite (2.5.10).

Le premier exemple de structure fortement minimale non $\aleph_0$-catégorique est $\mathbb{Z}$ muni de la fonction successeur, S. Les structures suivantes M_3, M_4 et M_5 sont des couvertures doubles de $(\mathbb{Z}, S)$:

Exemple 2.3.2. Soit $M_3 = (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, R)$ où R est la relation binaire à valence bornée définie par

$$R := \{((m, \varepsilon), (m+1, \varepsilon'));\ m \in \mathbb{Z},\ \varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}.$$



Structure M_3

La structure M_3 est transitive car pour tout (n, ε) l'application qui à (m, ε') associe $(m+n, \varepsilon'+\varepsilon)$ est un automorphisme de M_3.

Donc M_3 est une structure fortement minimale triviale (2.2.11). En fait ici M_3 est réduite à une composante. Si l'on veut une structure ω-saturée il suffit de prendre ω copies de M_3.

On peut projeter tout automorphisme de M_3 sur $\mathbb{Z}$. Ainsi $\mathrm{Aut}(M_3)$ est isomorphe au produit en couronne $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}} \rtimes \mathbb{Z}$.

Nous enrichissons M_3 par une bijection afin de réduire le groupe d'automorphismes :

Soit M_4 la structure M_3 enrichie par une relation binaire S qui définit la bijection suivante :

$$S(m, \varepsilon) = (m+2, \varepsilon).$$

Alors M_4 est toujours transitive et à valence bornée donc M_4 est fortement minimale triviale (2.2.11).

On obtient ici :

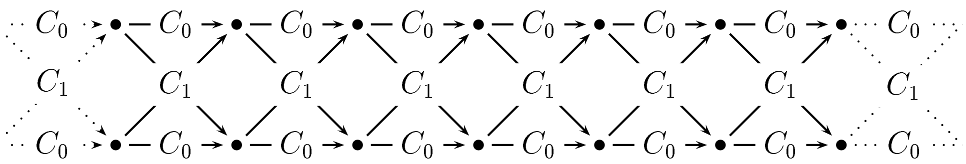
$$\mathrm{Aut}(M_4) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes_\psi \mathbb{Z}$$

tel que $\psi(2m) = id$ et $\psi(2m+1)(\theta_0, \theta_1) = (\theta_1, \theta_0)$.

Nous donnons enfin un enrichissement de M_4 non libre mais conservant le même groupe d'automorphismes (sur une composante).

Soit M_5 la structure M_3 enrichie par une relation E telle que $E \subset R \times R$ et E définit une relation d'équivalence à deux classes C_0 et C_1 sur R (non définies sur $\emptyset$) :

$$C_0 := \{((m,\varepsilon),(m+1,\varepsilon))\} \text{ et } C_1 := \{((m,\varepsilon),(m+1,\varepsilon+1))\}.$$



Structure M_5

La relation précédente S est en fait définissable dans M_5 donc M_5 est un enrichissement de M_4.

Les automorphismes utilisés pour montrer la transitivité de M_3 sont des automorphismes de M_5 qui fixent globalement C_0 et C_1. Donc M_5 est fortement minimale triviale et n'est pas libre car l'automorphisme qui fixe les éléments $(2m, \varepsilon)$ et qui échange les éléments $(2m+1, 0)$ et $(2m+1, 1)$, échange C_0 et C_1 (2.2.17).

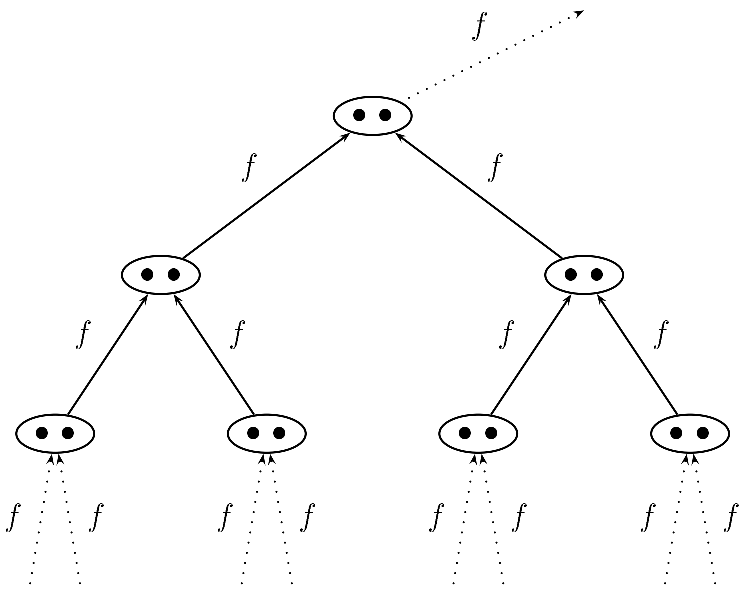
Par contre il est facile de voir que tout automorphisme de M_4 est un automorphisme de M_5. Cela ne reste évidemment plus vrai si l'on passe à des structures possédant au moins deux composantes.

Les exemples précédents sont tous unimodulaires (c'est-à-dire si a et b sont interalgébriques alors $\mathrm{mult}(a/b) = \mathrm{mult}(b/a)$ (voir définition paragraphe 2.4.3)). Nous donnons maintenant un exemple non unimodulaire et non libre.

Le premier exemple de structure fortement minimale triviale non unimodulaire est l'arbre binaire sans racine Γ : c'est-à-dire une structure munie d'une fonction f surjective telle que tout élément a exactement deux antécédents et est sans cycle. L'arbre Γ est alors la structure réduite à une composante. Nous construisons des couvertures doubles de Γ :

Exemple 2.3.3. Nous commençons par prendre la couverture double de Γ la moins riche. Soit $M_6 = (\Gamma \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, R)$ où R est la relation binaire à valence bornée définie par

$$\{((x,\varepsilon),(f(x),\varepsilon'));\ x \in \Gamma,\ \varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}.$$



Structure M_6

Alors R est à valence bornée et M_6 est transitive donc M_6 est fortement minimale triviale (2.2.11).

Son groupe d'automorphismes est le produit en couronne de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par $\mathrm{Aut}(\Gamma)$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\Gamma \rtimes \mathrm{Aut}(\Gamma)$.

Nous enrichissons M_6 de manière à réduire le groupe d'automorphismes : soit M_7 l'enrichissement de M_6 par une fonction surjective S définie par $S((x,\varepsilon)) = (f^2(x), \varepsilon)$. Alors S est une relation à valence bornée et M_7 est toujours transitive : il suffit de considérer pour tout $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ et tout $\varepsilon' \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, l'automorphisme qui à (x,ε) associe $(\gamma(x), \varepsilon+\varepsilon')$. Donc M_7 est fortement minimale triviale (2.2.11).

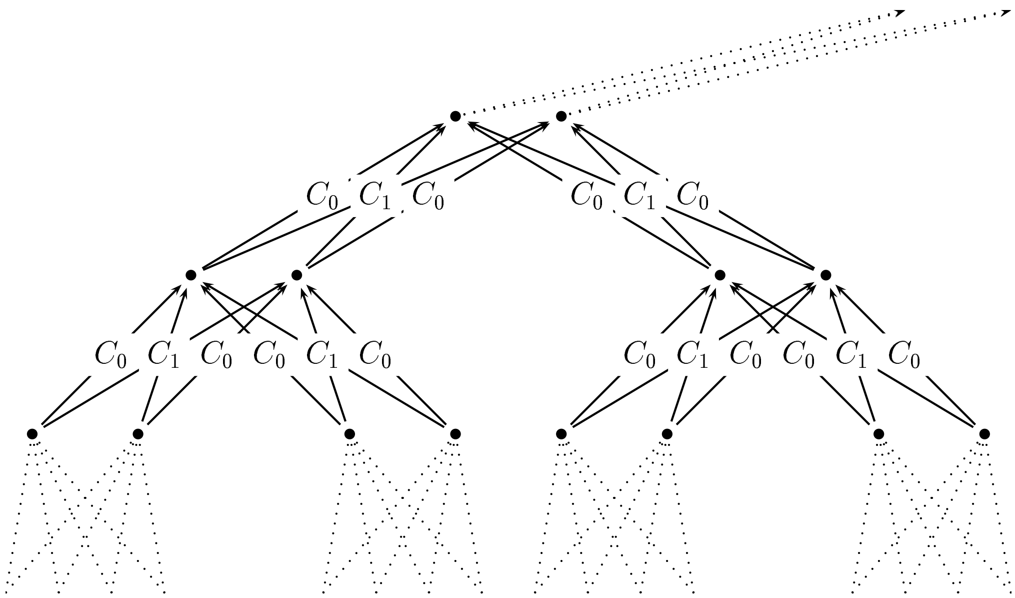
Pour décrire le groupe d'automorphismes de M_7 il suffit de faire la remarque suivante : pour tout $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$, ou bien pour tout $x \in \Gamma$, $\gamma(x)$ est à une distance paire de x, ou bien pour tout $x \in \Gamma$, $\gamma(x)$ est à une distance impaire de x. On dira que γ est pair ou impair. On vérifie alors simplement que :

$$\mathrm{Aut}(M_7) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes_\psi \mathrm{Aut}(\Gamma)$$

où $\psi(\gamma)$ est l'identité si γ est pair et $\psi(\gamma)$ échange les coordonnées si γ est impair.

Enfin voici l'enrichissement qui donne un exemple non libre non unimodulaire : soit M_8 l'enrichissement de M_6 par une relation E telle que $E \subset R\times R$ et E est une relation d'équivalence sur R ayant les deux classes suivantes :

$$C_0 := \{((x,\varepsilon),(f(x),\varepsilon))\} \text{ et } C_1 := \{((x,\varepsilon),(f(x),\varepsilon+1))\}.$$



Structure M_8

Alors S est définissable dans M_8. Donc M_8 est un enrichissement de M_7. Pour tout $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ et $\varepsilon' \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, l'application qui à (x, ε) associe $(\gamma(x), \varepsilon + \varepsilon')$ est un automorphisme de M_8 qui fixe globalement les deux classes. Par conséquent M_8 est fortement minimale triviale (2.2.17). Soit $a \in \Gamma$. Soit l'automorphisme de M_8 qui à (x, ε) associe (x, ε) si la distance de x à a est paire, et sinon associe $(x, \varepsilon + 1)$. Cet automorphisme échange C_0 et C_1, donc M_8 n'est pas libre (2.2.17).

On peut vérifier par ailleurs que $\mathrm{Aut}(M_8) = \mathrm{Aut}(M_7)$.

2.4 Groupe d'automorphismes d'une composante

Par (2.2.19) l'étude du groupe d'automorphismes d'une structure fortement minimale à valence bornée (ou libre) se ramène à l'étude du groupe K des automorphismes de la composante algébrique et du groupe G des automorphismes d'une composante non algébrique.

De plus par (2.2.8) une structure fortement minimale triviale est à valence bornée si et seulement si le sous-groupe G' des automorphismes forts d'une composante non algébrique est égal au groupe des automorphismes de cette même composante. Enfin l'étude du sous-groupe H de G constitué des automorphismes fixant un point de la composante est motivé par les travaux de A. Ivanov sur la conjecture A. Nous montrerons dans la section suivante que pour tout groupe profini il existe une structure fortement minimale triviale telle que ce groupe profini est isomorphe à H.

Dans cette section nous étudions les groupes K, G ,G' et H.

Tout d'abord, pour tout groupe profini K il existe une structure fortement minimale triviale telle que $K = \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ (2.4.2).

Nous donnons ensuite une condition nécessaire et suffisante pour que le triplet

(G, G', H) corresponde à une structure fortement minimale triviale : soient G un groupe topologique, G' et H deux sous-groupes de G, alors il existe une structure fortement minimale triviale M telle que $G = \mathrm{Aut}(D)$, $G' = \mathrm{Autf}(D)$ et $H = \mathrm{Aut}_d(D)$ pour $D = \mathrm{iacl}(d)$ une composante non algébrique de M si et seulement si H est un sous-groupe ouvert et profini de G tel que l'ensemble des intersections finies de conjugués de H forme un système de voisinages ouverts de 1, et G' est un sous-groupe normal fermé de G tel que $G = G'H$ (2.4.3,2.4.4 et 2.4.5).

Nous montrons de plus qu'une structure fortement minimale triviale qui a une clôture algébrique du vide triviale, peut être reconstruite à partir de son triplet (G, G', H) (2.4.6).

Nous remarquons ensuite que l'unimodularité d'une structure fortement minimale triviale est donnée par l'unimodularité du groupe G (2.4.9).

Enfin nous montrons que la propriété du petit indice pour les structures fortement minimales, à valence bornée ou sur un langage fini, est équivalente à la propriété du petit indice pour le groupe des automorphismes de la clôture algébrique d'un point non algébrique (2.4.13 et 2.4.14).

Pour cette section, notre référence pour les définitions des groupes profinis, des groupes localement compacts et des groupes localement compacts unimodulaires est [Hi 74].

2.4.1 Groupes profinis - Groupes localement compacts

Nous rappelons rapidement les définitions équivalentes d'un groupe profini :

Définition. Un groupe topologique G est profini s'il vérifie les propriétés équivalentes suivantes :

i) G est compact et totalement discontinu.

ii) L'ensemble des sous-groupes normaux ouverts d'indice fini de G forme un système de voisinages de l'unité et est d'intersection triviale.

iii) Si $(N_i)_{i\in I}$ est la famille des sous-groupes normaux ouverts d'indice fini de G alors

$$G = \varprojlim G/N_i.$$

Remarque. Soit G un groupe profini. Alors G est séparable s'il vérifie l'une des propositions équivalentes suivantes :

i) Une partie dénombrable de G est dense.

ii) G a une base dénombrable d'ouverts.

iii) L'ensemble des sous-groupes normaux ouverts de G est dénombrable.

iv) L'ensemble des sous-groupes ouverts de G est dénombrable.

Nous démontrons les faits bien connus suivants :

Fait 2.4.1. *Soit M une structure.*

i) $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ *est un groupe profini.*

ii) Si $X = \mathrm{acl}(\bar{x})$ *(ou* $X = \mathrm{iacl}(\bar{x})$*) pour* $\bar{x}$ *un uple fini alors* $\mathrm{Aut}(X)$ *est localement compact car* $\mathrm{Fix}(\bar{x}) = \mathrm{Aut}_{\bar{x}}(X)$ *est un sous-groupe ouvert profini.*

iii) Si $\mathrm{acl}(\emptyset)$ *(resp. X) est dénombrable alors* $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ *(resp.* $\mathrm{Fix}(\bar{x})$*) est séparable.*

$\triangleright$ i) Vérifions que $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ est profini.

Un système de voisinages de 1 dans $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ est l'ensemble des $\mathrm{Fix}(A)$, pour A parcourant les parties finies de $\mathrm{acl}(\emptyset)$. Soit A une partie finie de $\mathrm{acl}(\emptyset)$. Si l'on considère l'ensemble A' des conjugués des éléments de A alors $\mathrm{Fix}(A')$ est normal dans $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ et A' fini. D'où $\mathrm{Fix}(A')$ est d'indice fini dans $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ (car $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))/\mathrm{Fix}(A') = \mathrm{Aut}(A')$). Par ailleurs l'intersection des $\mathrm{Fix}(A)$ pour A fini est triviale. On en déduit que l'ensemble des sous-groupes normaux ouverts d'indice fini forme un système de voisinages de 1 d'intersection triviale. De plus si $\mathrm{acl}(\emptyset)$ est dénombrable alors ce système est dénombrable car il n'y a alors qu'un nombre dénombrable de parties finies de $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$.

ii) Par définition de la topologie sur $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\bar{x}))$, $\mathrm{Fix}(\bar{x})$ est un sous- groupe ouvert de $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\bar{x}))$.

Si $X = \mathrm{acl}(\bar{x})$, $\mathrm{Fix}(\bar{x})$ se voit comme $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ en ajoutant $\bar{x}$ aux constantes du langage. Donc $\mathrm{Fix}(\bar{x})$ est profini et on conclut de même pour iii)

Pour $X = \mathrm{iacl}(\bar{x})$, il suffit de remarquer que la projection qui à un automorphisme de $\mathrm{acl}(\bar{x})$ associe sa restriction à $\mathrm{iacl}(\bar{x})$ est un morphisme continu qui envoie $\mathrm{Aut}_{\bar{x}}(\mathrm{acl}(\bar{x}))$ sur $\mathrm{Aut}_{\bar{x}}(\mathrm{iacl}(\bar{x}))$. D'autre part si $\mathrm{iacl}(\bar{x})$ est dénombrable alors $\mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}(\bar{x}))$ a une base dénombrable d'ouverts. $\triangleleft$

Réciproquement nous montrons que tout groupe profini est $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ pour une structure fortement minimale triviale :

Proposition 2.4.2. *Soit G un groupe profini. Il existe une structure M fortement minimale triviale (saturée) à valence bornée telle que pour toute partie A de M,* $\mathrm{acl}(A) = A \cup \mathrm{acl}(\emptyset)$ *et telle que* $G = \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset)) = \mathrm{Gal}(M)$.

$\triangleright$ Soit G un groupe profini et $(N_i)_{i\in I}$ ses sous-groupes normaux ouverts formant un système de voisinages de l'unité. Donc G est la limite projective de G/N_i muni des projections $p_{i,j} : G/N_j \to G/N_i$ pour $N_i \supseteq N_j$.

Soit $L = \{U_i(x),\ \sigma_i(x_1, .., x_{m_i})\ (m_i =\mid G/N_i \mid),\ P_{i,j}(x,y)\ (i \le j)\}$, $D = \{gN_i;\ g \in G; i \in I\}$ et (D, L) la L-structure définie par :

$$\begin{array}{rcl} U_i(D) & = & \{gN_i;\ g \in G\} \\ \sigma_i(D^{m_i}) & = & \{(gN_i, gg_2N_i, .., gg_{m_i}N_i);\ g \in G\} \\ & & \text{où les } 1, g_2N_i, .., g_{m_i}N_i \text{ représentent les classes modulo } N_i \\ P_{i,j}(D^2) & = & \{(gN_i, g'N_j);\ g'N_i = gN_i\ g, g' \in G\}. \end{array}$$

Soit M la sur-structure de D obtenue en lui ajoutant une infinité de points de cardinal plus grand que celui de I (sans aucune structure sur ces nouveaux points).

On a $D = \mathrm{acl}(\emptyset)$. Soit $H = \mathrm{Aut}(D) = \mathrm{Aut}(acl(\emptyset))$. Nous allons montrer que $H = G$:

Soit f_i l'application qui à $h \in H$ associe $h(N_i)$ dans G/N_i. Alors f_i est un morphisme de groupe. Soit $h, h' \in H$. On a $h(N_i) = g_l N_i$ et $h'(N_i) = g_{l'} N_i$. Alors :

$$\sigma_i(N_i, .., {g_{l'}}^{-1} N_i, ..) \xrightarrow{h'} \sigma_i(g_{l'} N_i, .., N_i, ..) \xrightarrow{h} \sigma_i(g_l . g_{l'} N_i, .., g_l N_i, ..).$$

Donc $h \circ h'(N_i) = g_l g_{l'} N_i$.

Soit $f : h \mapsto (f_i(h))_{i \in I}$. Par les $P_{i,j}$, f est à valeurs dans G. Donc f est un homomorphisme de H dans G. De plus f est injectif : si pour tout i, $f_i(h) = N_i$ alors pour tout i, $h(N_i) = N_i$ et donc $h = id$. Et f est surjectif : soit $g \in G$, soit $h : g_l N_i \mapsto g . g_l N_i$, alors h est un automorphisme tel que $f(h) = g$.

On vérifie que f est un homéomorphisme : $f^{-1}(N_i) = \{h \in H;\ h(N_i) = N_i\}$ et $f(\{h \in H;\ h(gN_i) = gN_i\}) = N_i$.

M est fortement minimale triviale car sa théorie dit que les U_i, σ_i, $P_{i,j}$ ne sont satisfaits que par des éléments algébriques. Il n'y a donc qu'un seul type non algébrique et les éléments non algébriques sur vide sont nécessairement indépendants. $\lhd$

Nous passons à l'étude du groupe d'automorphismes d'une composante non algébrique.

2.4.2 Groupe d'automorphismes d'une composante non algébrique

Nous rappelons que la classe de conjugaison H^g est $g^{-1} H g$.

Proposition 2.4.3. *Soit M une structure fortement minimale triviale et $d \in M \setminus \mathrm{acl}(\emptyset)$. Soient $D = \mathrm{iacl}(d)$, $G = \mathrm{Aut}(D)$, $G' = \mathrm{Autf}(D)$ et $H = \mathrm{Fix}(d)$. Alors G est un groupe localement compact, H un sous-groupe profini ouvert de G tel que l'ensemble des conjugués de H par G a une intersection triviale et tel que l'ensemble des intersections finies de ces conjugués forme un système de voisinages ouverts de 1, et G' est un sous-groupe normal fermé de G tel que $G = G'H$.*

$\rhd$ On a vu précédemment que H est un sous-groupe ouvert profini de G.

Pour tout $g \in G$, $\mathrm{Fix}(g^{-1}(d)) = H^g$. Donc par homogénéité de D, $\bigcap_{g \in G} H^g = \mathrm{Fix}(D) = \{1\}$.

De plus $\mathrm{Fix}(g_1^{-1}(d), \ldots, g_n^{-1}(d)) = H^{g_1} \cap \ldots \cap H^{g_n}$ et donc par définition l'ensemble des intersections finies de conjugués de H forme un système de voisinages ouverts de 1.

Le sous-groupe G' est normal fermé comme tout sous-groupe d'automorphismes forts. Montrons que $G = G'H$. Soit $g \in G$. Alors $g(d)$ a même type fort que d car M est fortement minimale. Donc il existe $g' \in G'$ tel que $g(d) = g'(d)$. D'où $g \in g'H$. $\lhd$

Réciproquement pour le cas non $\aleph_0$-catégorique :

Proposition 2.4.4. *Soient G un groupe topologique infini, G' un sous-groupe normal fermé de G et H un sous-groupe ouvert de G profini tels que l'ensemble des intersections* *finies de conjugués de H forme un système de voisinages ouverts de 1 et tels que $G = G'H$.*

Alors il existe une structure D fortement minimale triviale à valence bornée et réduite à une composante telle que D a pour ensemble de base G/H (ensemble des classes à gauche de G) et $G = \mathrm{Aut}(D)$, $H = \mathrm{Fix}(H)$.

De plus il existe un enrichissement D' de D fortement minimal trivial réduit à une composante tel que $G = \mathrm{Aut}(D')$, $G' = \mathrm{Autf}(D')$ et $H = \mathrm{Fix}(H)$.

$\triangleright$ Le groupe H est profini donc pour tout $g \in G$, le sous-groupe $H \cap H^g$ est d'indice fini dans H car ouvert, et l'intersection $\cap_{g\in G} H^g = \{1\}$. Donc G/H est infini : en effet, ou bien H est fini et comme G infini, G/H est infini, ou bien H est infini et il y a donc une infinité de conjugués de H.

Soit D la structure d'ensemble de base G/H munie pour chaque entier n et pour chaque orbite d'un n-uple de G/H par l'action de G , d'un prédicat n-aire interprété par cette orbite.

Montrons que $G = \mathrm{Aut}(D)$ et que $H = \mathrm{Fix}(H)$:

Tout élément de G induit un automorphisme sur D par son action.

Cette action est transitive donc D est transitive. Cette action est en fait régulière : soit $k \in G$ tel que pour tout $g \in G$, $kgH = gH$. Alors pour tout $g \in G$, $g^{-1}kg \in H$ et donc $k \in H^{g^{-1}}$. Comme l'ensemble des H^g a une intersection triviale, $k = 1$.

De plus $\mathrm{Fix}(gH) \cap G = H^{g^{-1}}$. Par conséquent G est un sous-groupe topologique de $\mathrm{Aut}(D)$.

Comme H est profini, donc en particulier compact, H est fermé.

Soit ϕ est un automorphisme de D fixant H. Soit O un ouvert contenant ϕ. Il existe $g_1, \ldots, g_n$ et $g'_1, \ldots, g'_n$ tels que $\phi(g_iH) = g'_iH$ et tels que O contient l'ouvert de base constitué des automorphismes qui envoient $H, g_1H, \ldots, g_nH$ sur $H, g'_1H, \ldots, g'_nH$. Comme ϕ est un automorphisme, $H, g_1H, \ldots, g_nH$ et $H, g'_1H, \ldots, g'_nH$ sont dans la même orbite par l'action de G et O contient un élément de H.

Donc ϕ est adhérent à H qui est fermé, et $H = \mathrm{Fix}(H)$.

Soit ψ un automorphisme. Alors $\psi(H)$ est un conjugué de H par l'action de G. Il existe donc $g \in G$ tel que $\psi(H) = gH$. Alors $g^{-1}\psi \in H$ et $\psi \in G$.

Montrons maintenant que D est à valence bornée. En effet le nombre de conjugués de gH par $\mathrm{Fix}(H)$ est égal à $[\mathrm{Fix}(H) : \mathrm{Fix}(gH) \cap \mathrm{Fix}(H)] = [H : H \cap H^{g^{-1}}]$. Ce nombre est donc fini. Par conséquent les prédicats d'orbites sont à valence borné. Par (2.2.12) D est fortement minimale triviale à valence bornée et de plus est réduite à une composante car tout gH est algébrique sur H.

Enrichissons D de la manière suivante : pour chaque entier n et chaque relation R à valence bornée de D correspondant à une orbite par G d'un n-uple de D, nous enrichissons D par une relation $E \subseteq R \times R$ qui définit une relation d'équivalence telle que les classes de E correspondent aux orbites par l'action de G' sur les réalisations de R. Comme $G'H = G$, le groupe G' agit transitivement sur D' en fixant globalement chacune des classes d'équivalence. Par (2.2.17) D' est fortement minimale triviale. Le groupe G est inclus dans $\mathrm{Aut}(D')$ puisque G' est normal dans G : soient $g \in G$,

$\bar{a} \in D'$, $\bar{b} \in D'$ et E une relation d'équivalence tels que $E(\bar{a}, \bar{b})$ et montrons qu'alors $E(g(\bar{a}), g(\bar{b}))$. Il existe $g' \in G'$ tel que $\bar{b} = g'(\bar{a})$ et donc $g'' \in G'$ tel que $g(\bar{b}) = (g''g)(\bar{a})$.

Donc $G = \mathrm{Aut}(D')$ car $G \subseteq \mathrm{Aut}(D') \subseteq \mathrm{Aut}(D) = G$. On a alors $H = \mathrm{Aut}_H(D')$.

Toujours par (2.2.17), $G' \subseteq \mathrm{Autf}(D')$. Soient $g \in \mathrm{Autf}(D')$, $\bar{a} \in D$ et E la relation d'équivalence correspondant à $\bar{a}$. On a nécessairement $E(\bar{a}, g(\bar{a}))$, donc il existe $g' \in G'$, tel que $g'(\bar{a}) = g(\bar{a})$. Alors g est dans l'adhérence de G' qui est fermé dans G et donc $G' = \mathrm{Autf}(D')$. ◁

Dans le cas $\aleph_0$-catégorique (c'est-à-dire G fini) :

Proposition 2.4.5. *Soient G un groupe fini muni de la topologie discrète, G' un sous-groupe normal de G et H un sous-groupe de G tels que l'ensemble des conjugués de H a une intersection triviale et tels que $G = G'H$.*

Alors il existe une structure M fortement minimale triviale à valence bornée $\aleph_0$-catégorique telle que $\mathrm{acl}(\emptyset) = \emptyset$ *et telle que $G = \mathrm{Aut}(D)$, $H = \mathrm{Fix}(d)$ pour $D = \mathrm{iacl}(d)$ une composante non algébrique de M.*

De plus il existe un enrichissement M' de M fortement minimal trivial tel que $G = \mathrm{Aut}(D')$, $G' = \mathrm{Autf}(D')$, $H = \mathrm{Aut}_d(D')$ où $D' = \mathrm{acl}_{M'}(d) = \mathrm{iacl}_M(d) = D$.

▷ Soit $\bar{d}$ une énumération de G/H. Soit P l'orbite de $\bar{d}$ par l'action de G. Soit D la structure finie $(G/H, P)$ et M l'union d'une infinité de copies disjointes de D. Alors D est une composante de M. Comme l'ensemble des conjugués de H a une intersection triviale, G agit régulièrement sur D. En fait comme D est finie, on voit immédiatement que $G = \mathrm{Aut}(D)$ et $H = \mathrm{Fix}(H)$. Par (2.2.11) M est fortement minimale triviale puisque M est transitive à valence bornée.

Soit M' l'enrichissement de M par la relation $E \subseteq P \times P$ suivante : $E(\bar{a}, \bar{b})$ si et seulement si il existe $\bar{d}_1$ et $\bar{d}_2$ deux copies de $\bar{d}$ dans M, $g \in G$ et $g' \in G'$ tels que $\bar{a} = g(\bar{d}_1)$ et $\bar{b} = g'g(\bar{d}_2)$. Alors M' vérifie les hypothèses du lemme 2.2.11 donc M' est fortement minimale triviale. On a encore de manière évidente, $G = \mathrm{Aut}(D')$, $H = \mathrm{Aut}_H(D')$ et $G' = \mathrm{Autf}(D)$. ◁

Dans le cas particulier où la clôture algébrique du vide est vide, nous pouvons donc reconstruire la structure à partir du triplet (G, G', H) :

Corollaire 2.4.6. *Soit M une structure fortement minimale triviale de dimension κ telle que* $\mathrm{acl}(\emptyset) = \emptyset$. *Soient $C = \mathrm{iacl}(c)$ une composante non algébrique de M, $G = \mathrm{Aut}(C)$, $G' = \mathrm{Autf}(C)$ et $H = \mathrm{Aut}_c(C)$. Soit D la structure (éventuellement finie si G est fini) obtenue à partir de G et H. Soit D' l'enrichissement de D obtenue à partir de G' (2.4.4) ou (2.4.5). Alors la structure réduite de M à L_{Vb} est $\emptyset$-interdéfinissable avec l'union de κ copies disjointes de D et la structure M est $\emptyset$-interdéfinissable avec l'union de κ copies disjointes de D' (où l'on recolle les classes d'équivalence : c'est-à-dire si $\bar{a}_1$ et $\bar{a}_2$ sont deux copies d'un même uple $\bar{a}$ dans D' et si E est une relation sur uples bornés contenant $\bar{a}$ du langage de D' alors on pose $E(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$).*

▷ La composante C est en bijection avec D par l'application ϕ qui à $g(c)$ associe gH. Modulo cette bijection ϕ, un prédicat d'orbite de D est une relation à valence bornée fortement minimale de C. Donc ϕ définit un isomorphisme de la structure réduite de

C au langage L_{VbMin} dans la structure D. Par (2.2.11) et (2.2.14), la structure réduite de M au langage à valence bornée (car $\mathrm{acl}(\emptyset) = \emptyset$) est isomorphe à l'union de κ copies disjointes de la structure réduite de C au langage L_{VbMin}.

Montrons maintenant que M est $\emptyset$-interdéfinissable avec l'union de κ copies disjointes de D'. Toujours modulo ϕ, les relations définies de D' par G' sont des relations d'équivalence sur uples bornés e-minimales de C. Nous concluons avec (2.2.14) et (2.2.17). $\triangleleft$

Remarque. - Une structure fortement minimale triviale telle que $\mathrm{dcl} = \mathrm{acl}$ et $\mathrm{acl}(\emptyset) = \emptyset$ est donc une union de copies disjointes d'un graphe de Cayley d'un groupe.

- Sur l'exemple 2.3.2, en partant de $M = M_5$ alors D est $\emptyset$-interdéfinissable avec M_4.

2.4.3 Unimodularité

Nous remarquons dans cette partie que l'unimodularité dans une structure fortement minimale triviale est équivalente à l'unimodularité du groupe d'automorphismes d'une composante non algébrique. Nous nous servirons de cette remarque dans les sections 2.5 et 2.6. Nous commençons par rappeler les définitions :

E. Hrushovski dans [Hr 92b] introduit la définition d'une structure fortement minimale M unimodulaire en rapport avec l'unimodularité des groupes topologiques localement compacts (voir [Hi 74]) :

Définition - Proposition 2.4.7.

i) Un groupe G localement compact est muni de mesures de Haar (invariantes) à droite et de mesures de Haar (invariantes) à gauche. Deux mesures de Haar à droite (ou à gauche) sont proportionnelles. A partir d'une mesure μ de Haar à droite (resp. à gauche), on obtient une mesure ν de Haar à gauche (resp. à droite) de la manière suivante : on pose $\nu(Y) = \mu(Y^{-1})$ pour tout borel Y de G.

ii) Un groupe G localement compact est **unimodulaire** si toute mesure de Haar à droite est une mesure de Haar à gauche.
A un groupe G localement compact est associé sa **fonction modulaire** : l'homomorphisme α de G dans $(\mathbb{R}^+, .)$ défini par $\mu(gY) = \alpha(g)\mu(Y)$ pour tout borel Y de G et toute mesure de Haar à droite μ.
G est donc unimodulaire si et seulement si $\alpha = 1$.

iii) Soit M une structure fortement minimale saturée.
Pour un uple fini $\bar{d} \in M$ libre, la fonction modulaire associée au groupe localement compact $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\bar{d}))$ (ou au groupe $\mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}(\bar{d}))$) vérifie l'équation :

$$\begin{aligned} \alpha(g) &= \mathrm{mult}(\bar{d}/g(\bar{d}))/\mathrm{mult}(g(\bar{d})/\bar{d}) \\ &= [\mathrm{Fix}(g(\bar{d})) : \mathrm{Fix}(\bar{d}) \cap \mathrm{Fix}(g(\bar{d}))]/[\mathrm{Fix}(\bar{d}) : \mathrm{Fix}(\bar{d}) \cap \mathrm{Fix}(g(\bar{d}))]. \end{aligned}$$

iv) M est **unimodulaire** si pour tous uples finis libres $\bar{d}$ et $\bar{d}'$ interalgébriques, $\mathrm{mult}(\bar{d}/\bar{d}') = \mathrm{mult}(\bar{d}'/\bar{d})$ (c'est-à-dire si $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\bar{d}))$ est unimodulaire ou de manière équivalente si $\mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}(\bar{d}))$ est unimodulaire).

v) Si pour tout entier n il existe m_n tel que pour tous uples finis libres de longueur n, $\bar{d}$ et $\bar{d}'$ interalgébriques, $\mathrm{mult}(\bar{d}/\bar{d}') \leq m_n$ alors M est unimodulaire.

Dans le cas trivial il suffit de vérifier l'unimodularité sur les uples réduit à un élément :

Lemme 2.4.8. *Soit M une structure fortement minimale triviale. Alors M est unimodulaire si et seulement si pour tout a libre et b libre tels que a et b sont interalgébriques alors* $\mathrm{mult}(a/b) = \mathrm{mult}(b/a)$.

▷ Soit $\bar{a} = a_1 \ldots a_n$ libre et $\bar{b} = b_1 \ldots b_n$ libre tels que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont interalgébriques. On suppose donc que pour tout i, a_i et b_i sont interalgébriques et que $\mathrm{mult}(a_i/b_i) = \mathrm{mult}(b_i/a_i)$. Il faut montrer que $\mathrm{mult}(\bar{a}/\bar{b}) = \mathrm{mult}(\bar{b}/\bar{a})$.

Nous montrons que $\mathrm{mult}(\bar{a}/\bar{b}) = \mathrm{mult}(a_1 \ldots a_{n-1} b_n / b_1 \ldots b_{n-1} a_n)$.
Nous utilisons dans les équations suivantes, le fait que dans une théorie stable, si $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont indépendants au-dessus de A alors $\mathrm{mult}(\bar{x}\bar{y}/A) = \mathrm{mult}(\bar{x}/A\bar{y}) \cdot \mathrm{mult}(\bar{y}/A)$.
$\mathrm{mult}(a_n b_1 \ldots b_{n-1}/b_n) = \mathrm{mult}(a_n/\bar{b}) \cdot \mathrm{mult}(b_1 \ldots b_{n-1}/b_n) = \mathrm{mult}(a_n/\bar{b})$ et
$\mathrm{mult}(a_n b_1 \ldots b_{n-1}/b_n) = \mathrm{mult}(b_1 \ldots b_{n-1}/a_n b_n) \cdot \mathrm{mult}(a_n/b_n) = \mathrm{mult}(a_n/b_n)$.
D'où $\mathrm{mult}(a_n/\bar{b}) = \mathrm{mult}(a_n/b_n) = \mathrm{mult}(b_n/a_n) = \mathrm{mult}(b_n/a_n b_1 \ldots b_{n-1})$.
On en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathrm{mult}(\bar{a}/\bar{b}) &= \mathrm{mult}(a_n/\bar{b}) \cdot \mathrm{mult}(a_1 \ldots a_{n-1}/a_n \bar{b}) \\ &= \mathrm{mult}(b_n/a_n b_1 \ldots b_{n-1}) \cdot \mathrm{mult}(a_1 \ldots a_{n-1}/a_n b_1 \ldots b_{n-1} b_n) \\ &= \mathrm{mult}(a_1 \ldots a_{n-1} b_n / b_1 \ldots b_{n-1} a_n). \end{aligned}$$ ◁

Corollaire 2.4.9. *Soit M une structure fortement minimale triviale. Soit $D = \mathrm{iacl}(d)$ une composante non algébrique de M. Soit $G = \mathrm{Aut}(D)$ et $H = \mathrm{Aut}_d(D)$.*

Alors M est unimodulaire si et seulement si G est unimodulaire si et seulement si pour tout $g \in G$, $[H : H \cap H^g] = [H^g : H \cap H^g]$.

2.4.4 Propriété du petit indice

Il est connu que si une structure $\aleph_0$-catégorique a la propriété du petit indice alors ses groupes de Galois (relativement à des ensembles de paramètres finis) ont aussi la propriété du petit indice. (Rappelons que $\mathrm{Gal}_A(M) = \mathrm{Aut}_A(M)/\mathrm{Autf}_A(M)$.)

Nous démontrons dans cette partie que les structures fortement minimales dénombrables, à valence bornée, ou sur un langage fini, ont la propriété du petit indice si et seulement si leurs groupes de Galois ont la propriété du petit indice (2.4.13 et 2.4.14). Ceci permet de retrouver que toutes les structures fortement minimales à valence bornée $\aleph_0$-catégoriques ont la propriété du petite indice (qui est un cas particulier du même résultat pour l'ensemble des structures ω-stables $\aleph_0$-catégoriques).

Définition. Soit G un groupe topologique (dont tous les sous-groupes ouverts sont d'indice dénombrable). On dit que G a la **propriété du petit indice** si tout sous-groupe de G d'indice dénombrable est ouvert.

Soit M une structure dénombrable. On dit que M a la **propriété du petit indice** si le groupe $\mathrm{Aut}(M)$ a la propriété du petit indice.

Remarque 2.4.10. Soient G_1 et G_2 deux groupes topologiques et soit H un sous-groupe ouvert de G_1 d'indice dénombrable. Alors :

i) Le groupe $G_1 \times G_2$ a la propriété du petit indice si et seulement si les groupes G_1 et G_2 ont la propriété du petit indice.

ii) Le groupe G_1 a la propriété du petit indice si et seulement si le sous-groupe H a la propriété du petit indice.

Proposition 2.4.11. *Soit M une structure fortement minimale triviale dénombrable à valence bornée qui a la propriété du petit indice. Soit $\bar{a}$ un uple fini de M. Alors les groupes* $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ *(*$= \mathrm{Gal}(M)$*),* $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\bar{a}))$*,* $\mathrm{Aut}_{\bar{a}}(\mathrm{acl}(\bar{a}))$ *(*$= \mathrm{Gal}_{\bar{a}}(M)$*),* $\mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}(\bar{a}))$ *et* $\mathrm{Aut}_{\bar{a}}(\mathrm{iacl}(\bar{a}))$ *ont la propriété du petit indice.*

$\triangleright$ Soit $(C_i)_{i\in I}$ les composantes non algébriques de M. Soient $d \in M$ non algébrique et $G = \mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}(d))$.

Commençons par montrer que le groupe $\mathrm{Aut}_d(\mathrm{acl}(d))$ a la propriété du petit indice.

Soient O un sous-groupe d'indice dénombrable de $\mathrm{Aut}_d(\mathrm{acl}(d))$ et $O' = \{g \in \mathrm{Aut}_d(M);\ g_{|\mathrm{acl}(d)} \in O\}$. On a $[\mathrm{Aut}_d(M) : O'] = [\mathrm{Aut}_d(\mathrm{acl}(d)) : O]$ car $\mathrm{Aut}_d(M)$ fixe globalement $\mathrm{acl}(d)$.

Donc O' est d'indice dénombrable dans $\mathrm{Aut}_d(M)$. Comme $\mathrm{Aut}_d(M)$ est d'indice dénombrable dans $\mathrm{Aut}(M)$, le groupe O' est ouvert et contient donc le fixateur d'un uple fini $\bar{b}$. Puisque M est à valence bornée $\mathrm{Aut}_d(M) = \mathrm{Aut}_d(\mathrm{acl}(d)) \times \mathrm{Aut}(M \setminus \mathrm{acl}(d))$ (2.2.19) et le groupe O contient donc l'ouvert $\mathrm{Aut}_{\bar{b}\cap\mathrm{acl}(d)}(\mathrm{acl}(d))$ de $\mathrm{Aut}_d(\mathrm{acl}(d))$.

Le groupe $\mathrm{Aut}_d(\mathrm{acl}(d))$ a la propriété du petit indice et nous en déduisons maintenant que les autres groupes ont la propriété du petit indice.

Comme M est à valence bornée, par (2.2.19),

$$\mathrm{Aut}_d(\mathrm{acl}(d)) = \mathrm{Aut}_d(\mathrm{iacl}(d)) \times \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset)).$$

Donc part (2.4.10), $\mathrm{Aut}_d(\mathrm{iacl}(d))$ et $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ ont la propriété du petit indice. De plus comme $\mathrm{Aut}_d(\mathrm{iacl}(d))$ est un sous-groupe ouvert d'indice dénombrable de G, le groupe G a la propriété du petit indice (2.4.10).

On peut supposer que $\bar{a} = \bar{a}_1 \dots \bar{a}_n$ tel que les $\bar{a}_j$ sont dans des composantes distinctes. Soit I_0 l'ensemble des $i \in I$ tel que pour un j, $\bar{a}_j \in C_i$.

Comme M est à valence bornée, par (2.2.19),

$$\mathrm{Aut}_{\bar{a}}(\mathrm{acl}(\bar{a})) \subseteq G^{I_0} \times \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset)) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\bar{a}))$$

et si $\bar{a} \cap \mathrm{acl}(\emptyset) = \emptyset$,

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\bar{a})) = \mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}(\bar{a})) \times \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset)).$$

De plus $\mathrm{Aut}_{\bar{a}}(\mathrm{acl}(\bar{a}))$ est un sous-groupe ouvert d'indice dénombrable de $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\bar{a}))$. Donc comme G et $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ ont la propriété du petit indice, par (2.4.10), $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\bar{a}))$, $\mathrm{Aut}_{\bar{a}}(\mathrm{acl}(\bar{a}))$ $(= \mathrm{Gal}_{\bar{a}}(M))$, $\mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}(\bar{a}))$ et $\mathrm{Aut}_{\bar{a}}(\mathrm{iacl}(\bar{a}))$ ont la propriété du petit indice. $\triangleleft$

Remarque. La structure M_3 (2.3.2) n'a pas la propriété du petit indice puisque le groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\omega$ ne l'a pas : en effet ce groupe à $2^{2^{\aleph_0}}$ sous-groupes d'indice 2, donc des groupes d'indice 2 non ouverts.

En fait un groupe profini séparable qui, pour un entier n possède une infinité de sous-groupes ouverts d'indice dénombrable, contient $2^{2^{\aleph_0}}$ sous-groupes d'indice n [Po 73]. Nous pouvons donc obtenir de nombreuses structures fortement minimales triviales n'ayant pas la propriété du petit indice en utilisant (2.4.2) ou, par la suite, (2.5.6) et (2.5.7).

Nous montrons la réciproque de (2.4.11). Pour cela nous utilisons le résultat démontré par J.D. Dixon, P.M. Neumann et S. Thomas [DNT 86] : le groupe S_ω des permutations de ω a la propriété du petit indice (c'est-à-dire l'ensemble infini dénombrable sans structure à la propriété du petit indice).

Proposition 2.4.12. *Soit M une structure fortement minimale triviale dénombrable à valence bornée non réduite à $\mathrm{acl}(\emptyset)$. Soit $d \in M$ non algébrique. Si $\mathrm{Gal}_d(M)$ (= $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset)) \times \mathrm{Aut}_d(\mathrm{iacl}(d))$) a la propriété du petit indice alors M a la propriété du petit indice.*

$\triangleright$ Soit $G = \mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}(d))$. Par (2.4.10), les groupes G et $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ ont la propriété du petit indice. Par (2.2.19),

$$\mathrm{Aut}(M) = \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset)) \times (G^{\dim(M)} \rtimes S_{\dim(M)}).$$

Toujours par (2.4.10), si $\dim(M)$ est fini alors $\mathrm{Aut}(M)$ a la propriété du petit indice.

Supposons donc M saturée. Soit $(C_i)_{i\in\omega}$ les composantes non algébriques de M. Par hypothèse le groupe $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(\emptyset))$ a la propriété du petit indice : il suffit donc de montrer que $\mathrm{Aut}(M \setminus \mathrm{acl}(\emptyset))$ (= $\mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M) = G^\omega \rtimes S_\omega$) a la propriété du petit indice (2.4.10). Soit H un sous-groupe d'indice dénombrable de ce groupe. Montrons que H est ouvert. Pour toute partie I de ω, notons $S_{\omega\setminus I}$ le sous-groupe des permutations de ω fixant point par point I. Il existe une partie I finie tel que $1 \rtimes S_{\omega\setminus I} \subseteq H$ car $H \cap (1 \rtimes S_\omega)$ est d'indice dénombrable dans $1 \rtimes S_\omega$ qui a la propriété du petit indice [DNT 86].

Plaçons-nous dans le sous-groupe $(G^I \rtimes S_I) \times (G^{\omega\setminus I} \rtimes S_{\omega\setminus I})$ de $\mathrm{Aut}(M \setminus \mathrm{acl}(\emptyset))$. Soient $H_1 = H \cap \big((G^I \rtimes 1) \times 1\big)$ et $H_2 = H \cap \big(1 \times (G^{\omega\setminus I} \rtimes S_{\omega\setminus I})\big)$.

Soient K_1 la projection de H_1 sur G^I et K_2 la projection de H_2 sur $G^{\omega\setminus I} \rtimes S_{\omega\setminus I}$. Par ce qui précède nous savons que K_2 contient $1 \rtimes S_{\omega\setminus I}$. Donc la projection de K_2 sur $G^{\omega\setminus I}$ est stable par toute permutation d'indice. Le lemme qui suit montre que cette projection est nécessairement égale à $G^{\omega\setminus I}$. Donc $K_2 = G^{\omega\setminus I} \rtimes S_{\omega\setminus I}$.

Le groupe G à la propriété du petit indice, donc G^I aussi (2.4.10). Par conséquent il existe un uple fini non vide $\bar{a} \in \cup_{i\in I} C_i$ tel que $\mathrm{Aut}_{\bar{a}}(\mathrm{iacl}(\bar{a})) \subseteq K_1$.

Toujours par (2.2.19)

$$\mathrm{Aut}_{\bar{a}}(M \setminus \mathrm{acl}(\emptyset)) = \mathrm{Aut}_{\bar{a}}(\mathrm{iacl}(\bar{a})) \times (G^{\omega\setminus I} \rtimes S_{\omega\setminus I}).$$

Donc H contient $\mathrm{Aut}_{\bar{a}}(M \setminus \mathrm{acl}(\emptyset))$ puisque

$$K_1 \supseteq \mathrm{Aut}_{\bar{a}}(\mathrm{iacl}(\bar{a})) \text{ et } K_2 = G^{\omega\setminus I} \rtimes S_{\omega\setminus I}.$$

Le groupe H est donc ouvert.

Montrons maintenant le lemme qui permet de vérifier que $K_2 = G^{\omega\setminus I} \rtimes S_{\omega\setminus I}$:

Lemme. *Soient G un groupe et H un sous-groupe de G^ω d'indice dénombrable. Si H est stable par permutation des indices alors $H = G^\omega$.*

Preuve : soit pour toute partie I de ω, p_I la projection de G^ω sur G^I.

Montrons pour toute partie I infinie et coinfinie de ω que $p_I(H) = G^I$. Comme H est stable par permutation des indices il suffit de le démontrer pour une seule partie. Choisissons une partition infinie de ω par des parties infinies $(I_i)_{i\in\omega}$. Pour tout $i \in \omega$, $p_{I_i}(H) = p_{I_0}(H)$. Donc $H \subseteq p_{I_0}(H)^\omega$. Comme H est d'indice dénombrable, nécessairement $p_{I_0}(H) = G^{I_0}$.

Soit $g \in G^\omega$. Nous allons montrer en deux étapes que $g \in H$.

Soit l'élément $h \in G^\omega$ défini par $h(4n) = h(4n+1)^{-1} = g(n)$ et $h(4n+2) = h(4n+3) = 1$ pour tout $n \in \omega$. Montrons que $h \in H$. Par ce qui précède il existe $h_1 \in H$ tel que pour tout $n \in \omega$, $h_1(4n) = g_n$ et $h_1(4n+1) = 1$. Par permutation des indices, il existe $h_2 \in H$ tel que pour tout $n \in \omega$, $h_2(4n) = h_1(4n+1)$, $h_2(4n+1) = h_1(4n)$, $h_2(4n+2) = h_1(4n+2)$ et $h_2(4n+3) = h_1(4n+3)$. Alors $h = h_2^{-1}h_1 \in H$.

Soit l'élément $g_1 \in G^\omega$ défini par $g_1(4n) = g(4n)$, $g_1(4n+1) = g(4n+1)$ et $g_1(4n+2) = g_1(4n+3) = 1$ pour tout $n \in \omega$. Montrons que $g_1 \in H$. Nous définissons pour cela par induction sur n, deux éléments de G^ω, h_3 et h_4 tels que $h_3(0) = g(0)$, $h_4(0) = 1$, $h_3(1) = h_3(0)^{-1}$, $h_4(1) = g(1)h_3(0)$, $h_3(2) = h_3(3) = h_4(2) = h_4(3) = 1$ et pour tout $n > 0$, $h_4(4n) = h_4(4(n-1)+1)^{-1}$, $h_3(4n) = h_4(4n)^{-1}g(4n)$, $h_3(4n+1) = h_3(4n)^{-1}$, $h_4(4n+1) = g(4n+1)h_3(4n)$ et $h_3(4n+2) = h_3(4n+3) = h_4(4n+2) = h_4(4n+3) = 1$. Ainsi, $g_1 = h_4h_3$. Par ce qui précède $h_3 \in H$. Par une permutation des indices, h_4 est du même type que h_3, donc $h_4 \in H$. Donc $g_1 = h_4h_3 \in H$. Encore par permutation des indices, $g_2 = g_1^{-1}g$, est du même type que g_1. Donc $g_2 \in H$ et $g \in H$. ◁

Corollaire 2.4.13. *Soit M une structure dénombrable fortement minimale triviale à valence bornée non réduite à* $\mathrm{acl}(\emptyset)$. *Soit d un élément non algébrique de M. Alors M a la propriété du petit indice si et seulement si* $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(d))$ *a la propriété du petit indice, si et seulement si* $\mathrm{Gal}_d(M)$ *(*$= \mathrm{Aut}_d(\mathrm{acl}(d))$*) a la propriété du petit indice.*

Corollaire 2.4.14. *Soit M une structure dénombrable non réduite à* $\mathrm{acl}(\emptyset)$ *et fortement minimale triviale sur un langage fini. Soit d un élément non algébrique de M. Alors M a la propriété du petit indice si et seulement si* $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(d))$ *a la propriété du petit indice.*

▷ Par (2.2.15) il existe une partie finie C de M telle que $M' = (M, c;\ c \in C)$ est à valence bornée. Alors $\mathrm{Aut}(M') = \mathrm{Aut}_C(M)$. Donc $\mathrm{Aut}(M')$ est un sous-groupe ouvert d'indice dénombrable dans $\mathrm{Aut}(M)$. Par (2.4.10), ou bien les structures M et M' ont toutes deux la propriété du petit indice, ou bien aucune des deux ne l'a.

Nous décomposons la preuve dans les deux cas suivants : si $\mathrm{acl}_M(\emptyset)$ est infini alors nous pouvons supposer $C \subset \mathrm{acl}_M(\emptyset)$ (2.2.15). Dans ce cas d est encore un élément non algébrique de M'. Alors $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_{M'}(d)) = \mathrm{Aut}_C(\mathrm{acl}_M(d))$ est un sous-groupe ouvert d'indice dénombrable dans $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_M(d)$. Donc $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_{M'}(d))$ a la propriété du petit indice si et seulement si $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_M(d)$ l'a. Par (2.4.13), M a la propriété du petit indice si et seulement si M' a la propriété du petit indice, si et seulement si $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_{M'}(d))$ l'a, si et seulement si $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_M(d))$ l'a.

Dans le second cas $\mathrm{acl}_M(\emptyset)$ est fini. Par (2.2.15) supposons que $\mathrm{acl}_M(\emptyset) \subset C \subseteq \mathrm{acl}_M(d)$. Nous pouvons alors supposer que $\mathrm{acl}_M(\emptyset) = \mathrm{dcl}_M(\emptyset)$. Il suffit pour cela de considérer la structure $(M, a;\ a \in \mathrm{acl}(\emptyset))$ et de remarquer comme ci-dessus que $\mathrm{Aut}(M)$ a la propriété du petit indice si et seulement si $\mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(M)$ l'a et que $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(d))$ a cette propriété si et seulement si $\mathrm{Aut}_{\mathrm{acl}(\emptyset)}(\mathrm{acl}(d))$ l'a.

Supposons donc que $\mathrm{acl}_M(\emptyset) = \mathrm{dcl}_M(\emptyset)$ et que C est une partie non vide de $\mathrm{iacl}_M(d)$. Soit d' un élément non algébrique dans M'. (S'il n'existe pas de tel élément cela signifie que $M = \mathrm{acl}_M(d)$ et dans ce cas il n'y a rien à démontrer.) Montrons que $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_{M'}(d'))$ a la propriété du petit indice si et seulement si $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_M(d))$ l'a. Il suffit de montrer que $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_{M'}(\emptyset))$ et $\mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}_{M'}(d'))$ ont la propriété du petit indice si et seulement si $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_M(d))$ l'a, car $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_{M'}(d')) = \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_{M'}(\emptyset)) \times \mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}_{M'}(d'))$, puisque M' est à valence bornée.

De plus $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_{M'}(\emptyset)) = \mathrm{Aut}_C(\mathrm{acl}_M(d))$. Donc $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_{M'}(\emptyset))$ a la propriété du petit indice si et seulement si $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_M(d))$ l'a (2.4.10).

D'autre part

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}_M(d')) = \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_M(d')) \simeq \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_M(d))$$

car $\mathrm{acl}_M(\emptyset) = \mathrm{dcl}_M(\emptyset)$. Par (2.2.16), il existe une partie C' finie de $\mathrm{iacl}_M(d')$ tel que $\mathrm{Aut}_{C'}(M) \subseteq \mathrm{Autf}(M)$. Si f est un automorphisme fort de M alors $f_{|\mathrm{iacl}_M(d')} \in \mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}_{M'}(d'))$ car cet isomorphisme partiel de M peut se prolonger par l'identité en dehors de $\mathrm{iacl}_M(d)$. Donc $\mathrm{Aut}_{C'}(\mathrm{iacl}_M(d')) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}_{M'}(d')) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}_M(d))$.

Par conséquent $\mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}_{M'}(d'))$ est un sous-groupe ouvert d'indice dénombrable de $\mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}_M(d))$. Par (2.4.10), $\mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}_{M'}(d'))$ a la propriété du petit indice si et seulement si $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}_M(d))$ l'a.

Nous concluons de la même manière que dans le cas $\mathrm{acl}(\emptyset)$ infini en utilisant (2.4.13).
$\triangleleft$

2.5 Groupe des automorphismes d'une composante fixant un point

Dans cette section nous étudions le fixateur d'un point dans une composante non algébrique. Nous avons remarqué que ce fixateur est toujours un groupe profini (2.4.1)

A l'aide des extensions HNN et de la proposition 2.4.4, nous montrons que tout groupe profini est fixateur d'un point d'une structure fortement minimale unimodulaire à valence bornée et réduite à une composante (2.5.6). De plus si ce groupe profini est séparable, nous pouvons choisir une structure dénombrable. Dans le cas non unimodulaire, nous montrons qu'il est nécessaire et suffisant que le groupe profini contienne deux sous-groupes ouverts homéomorphes et d'indices distincts (2.5.7). Par (2.4.13), ces structures obtenues à partir d'un groupe profini ont la propriété du petit indice si et seulement si ce groupe profini a la propriété du petit indice.

Toujours par des constructions HNN, nous montrons qu'il existe deux structures fortement minimales à valence bornée, l'une unimodulaire, l'autre non, telles que tout groupe profini séparable est homéomorphe au fixateur d'une partie de chacune de ces structures (2.5.8).

Enfin pour tout groupe profini H séparable commutatif et non trivial, nous donnons une construction modèle théorique d'une structure fortement minimale triviale non libre telle que le fixateur d'un point est homéomorphe à H (2.5.10).

2.5.1 Extensions HNN

Nous commençons par rappeler la définition d'une extension HNN, le théorème de forme normale d'une telle extension et le lemme de Britton. Pour plus de détails sur ce sujet consulter par exemple [Co 89].

Définition. Soient H un groupe et $(A_i, A_{-i})_{i\in I}$ une famille de paires de sous-groupes isomorphes de H munie d'isomorphismes α_i entre A_i et A_{-i}. Soient $(p_i)_{i\in I}$ une famille de lettres distinctes et P le groupe libre sur $(p_i)_{i\in I}$. Soit N le sous-groupe normal du produit libre $H * P$ engendré par l'ensemble des $p_i^{-1}a_ip_i(\alpha_i(a_i))^{-1}$ pour $i \in I,\ a_i \in A_i$. Alors $G = (H*P)/N$ est appelé **l'extension HNN** de base H munie des lettres stables (p_i) et des paires de sous-groupes A_i et $A_{-i} = j_i(A_i)$ et est noté $< H, p_i; p_i^{-1}A_ip_i = A_{-i},\ i \in I >$.

Théorème 2.5.1. *(Forme normale)*

Soit l'extension HNN de H, $G =< H, p_i; p_i^{-1}A_ip_i = A_{-i},\ i \in I >$. Soit pour tout $i \in I$, S_i (resp. S_{-i}) un ensemble de représentants des translatés à gauche par H de A_i (resp. A_{-i}) contenant 1.

L'homomorphisme canonique de H dans G est injectif et tout élément g de G s'écrit de manière unique sous la forme :

$$g = h_0p_{i_0}^{\varepsilon_0}h_1 \dots h_{n-1}p_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}}h_n$$

où $n \geq 0,\ \varepsilon_j = \pm 1,\ h_n \in H,\ h_j \in S_{\varepsilon_j i_j}$ pour $j < n$ et si $i_{j-1} = i_j$ et $\varepsilon_{j-1} = -\varepsilon_j$ alors $h_j \neq 1$.
($n = 0$ signifie que $g \in H$).

Remarque 2.5.2. L'existence de la forme normale s'obtient par réduction : si g s'écrit

$$h_0p_{i_0}^{\varepsilon_0}h_1 \dots h_{n-1}p_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}}h_n$$

avec $n \geq 0,\ \varepsilon_j = \pm 1,\ h_j \in H$ alors il existe $k \leq n$, $0 \leq j_0 < \dots < j_k \leq n$ et pour $0 \leq l < k$, $h'_l \in S_{\varepsilon_{j_l} i_{j_l}}$ et $h'_k \in H$ tel que g s'écrit sous la forme normale suivante :

$$g = h'_0p_{i_{j_0}}^{\varepsilon_{j_0}}h'_1 \dots h'_{k-1}p_{i_{j_{k-1}}}^{\varepsilon_{j_{k-1}}}h'_k.$$

Pour la suite on note la longueur de g, $l(g) := k$ (c'est-à-dire le nombre de p dans l'écriture normale de g).

Définition. Un élément $h_0 p_{i_0}^{\varepsilon_0} h_1 \dots h_{n-1} p_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}} h_n$ de $H*P$ avec $n \geq 0$, $\varepsilon_j = \pm 1$, $h_j \in H$ a un **pinch** si il existe r tel que $i_r = i_{r-1}$, $\varepsilon_r = -\varepsilon_{r-1}$ et $h_r \in A_{\varepsilon_r i_r}$.

Théorème 2.5.3 (Lemme de Britton). *i) Tout élément de G peut s'écrire par un mot dans $H * P$ sans pinch.*

ii) Si un élément peut être écrit par deux mots sans pinch :

$$h_0 p_{i_0}^{\varepsilon_0} h_1 \dots h_{n-1} p_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}} h_n$$

et

$$h'_0 p_{i'_0}^{\varepsilon'_0} h'_1 \dots h'_{n'-1} p_{i'_{n'-1}}^{\varepsilon'_{n'-1}} h_n$$

alors $n = n'$, $i_j = i'_j$ et $\varepsilon_j = \varepsilon'_j$.

iii) Si $g \in H$ s'écrit par un mot de $H * P$ tel que $n > 0$ alors ce mot à un pinch.

Il est simple de déduire de ces théorèmes le lemme suivant :

Lemme 2.5.4. *Soit $g \in G$ tel que g s'écrit sous forme normale*

$$h_0 p_{i_0}^{\varepsilon_0} h_1 \dots h_{n-1} p_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}} h_n.$$

i) Supposons $n > 0$ et $g' \in G$ tel que $l(g') < n$ alors $gg' \notin H$.

ii) g^{-1} s'écrit sous forme normale :

$$h'_n p_{i_{n-1}}^{-\varepsilon_{n-1}} \dots h'_1 p_{i_0}^{-\varepsilon_0} h'_0.$$

iii) Si $g' = h'_0 p_{i'_0}^{\varepsilon'_0} h'_1 \dots h'_{n-1} p_{i'_{n-1}}^{\varepsilon'_{n-1}} h'_n$ (non nécessairement sous forme normale) et $gg' \in H$ alors $h_n h'_0 \in A_{\varepsilon'_0 i'_0}$.

Voici enfin un lemme technique que nous utiliserons par la suite plusieurs fois et que nous redémontrons :

Lemme 2.5.5. *Soit $g \in G$ tel que g s'écrit sous forme normale*

$$h_0 p_{i_0}^{\varepsilon_0} h_1 \dots h_{n-1} p_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}} h_n.$$

avec $n > 0$.

i) Supposons $n > 0$.

Soit $K_n = A_{-\varepsilon_{n-1} i_{n-1}}$ et pour $1 \leq j < n$,

$$K_j = h_j(\alpha_{i_j}^{-\varepsilon_j}(K_{j+1}))h_j^{-1} \bigcap A_{-\varepsilon_{j-1} i_{j-1}}$$

et enfin $K_0 = h_0(\alpha_{i_0}^{-\varepsilon_0}(K_1))h_0^{-1}$.

Alors $H \cap H^{g^{-1}} = K_0$

ii) Si pour tout $i \in I$, $A_{-i} = A_i$, A_i normal dans H et α_i est l'identité alors :

$$H \cap H^{g^{-1}} = A_{i_0} \cap A_{i_1} \dots \cap A_{i_{n-1}} \text{ et } H \cap H^g = H \cap H^{g^{-1}}.$$

iii) Si pour tout $i \in I$, $A_{-i} = A_i$ et α_i est l'identité alors :

$$[H : H \cap H^g] = [H : H \cap H^{g^{-1}}].$$

$\triangleright$ i) Soit pour $0 < j \leq n$, $g_j = h_0 p_{i_0}^{\varepsilon_0} h_1 \ldots h_{j-1} p_{i_{j-1}}^{\varepsilon_{j-1}}$.

Soit $h \in H$ tel que $ghg^{-1} \in H$.

Soit $k_n = h_n h h_n^{-1}$. Alors $g_n k_n g_n^{-1} = ghg^{-1}$. Par (2.5.4 iii)) $k_n \in A_{-\varepsilon_{n-1} i_{n-1}} = K_n$.

Toujours en utilisant (2.5.4 iii), on montre par induction pour $1 \leq j < n$, que $k_j = h_j(\alpha_{i_j}^{-\varepsilon_j}(k_{j+1}))h_j^{-1}$ vérifie $g_j k_j g_j^{-1} = ghg^{-1}$ et donc que $k_j \in A_{-\varepsilon_{j-1} i_{j-1}}$. On a alors $k_j \in K_j$.

Alors $ghg^{-1} = h_0 p_{i_0}^{\varepsilon_0} k_1 p_{i_0}^{-\varepsilon_0} h_0^{-1}$. Toujours en utilisant (2.5.4 iii) on en déduit que $ghg^{-1} \in K_0$.

On a donc montré que $gHg^{-1} \cap H \subseteq K_0$.

Réciproquement si $k_0 \in K_0$. On définit par induction pour $0 < j \leq n$, $k_j = \alpha_{i_{j-1}}^{\varepsilon_{j-1}}((h_{j-1} k_{j-1} h_{j-1}^{-1}))$. Alors $g_j k_j g_j^{-1} = k_0$. On a alors $g_n k_n g_n^{-1} = k_0$, d'où $k_0 = g k_n^{h_n} g^{-1}$.

ii) Avec les hypothèses supplémentaires sur l'extension HNN, on a $K_n = A_{i_{n-1}}$ et pour $j > 1$, $K_{j-1} = K_j \cap A_{i_{j-2}}$.

Alors par (2.5.4 ii), $H^g \cap H = H^{g^{-1}} \cap H$.

iii) Remarquons que $[H : H \cap H^g] = [H : H \cap H^{h_0^{-1} g h_n^{-1}}]$ et que $[H : H \cap H^{g^{-1}}] = [H : H \cap H^{(h_0^{-1} g h_n^{-1})^{-1}}]$. Nous pouvons donc supposer que $h_0 = h_n = 1$.

Alors $g^{-1} = p_{i_{n-1}}^{-\varepsilon_{n-1}} h_{n-1}^{-1} \ldots h_1^{-1} p_{i_0}^{-\varepsilon_0}$ et donc g^{-1} s'écrit sous forme normale

$$g^{-1} = p_{i_{n-1}}^{-\varepsilon_{n-1}} h'_{n-2} \ldots h'_0 p_{i_0}^{-\varepsilon_0} h'_{-1}.$$

Il est facile de vérifier par induction sur j que pour tout $0 < j < n$:

$$h_{n-1}^{-1} h_{n-2}^{-1} \ldots h_{n-j}^{-1} A_{i_{n-(j+1)}} = h'_{n-2} h'_{n-3} \ldots h'_{n-(j+1)}) A_{i_{n-(j+1)}}.$$

Donc pour tout $0 \leq j < n-1$:

$$A_{i_j}^{h'^{-1}_j \ldots h'^{-1}_{n-2}} = A_{i_j}^{h_{j+1} \ldots h_{n-1}}.$$

Par (i), une simple induction montre que :

$$H \cap H^{g^{-1}} = A_{i_{n-1}}^{h_{n-1}^{-1} \ldots h_1^{-1}} \cap \ldots \cap A_{i_1}^{h_1^{-1}} \cap A_{i_0} \text{ et } H \cap H^g = A_{i_0}^{h'^{-1}_0 \ldots h'^{-1}_{n-2}} \cap \ldots \cap A_{i_{n-1}}.$$

D'où

$$(H \cap H^{g^{-1}})^{h_1 \ldots h_{n-1}} = A_{i_{n-1}} \cap A_{i_{n-2}}^{h_{n-1}} \cap \ldots \cap A_{i_0}^{h_1 \ldots h_{n-1}} = H \cap H^g.$$

Par conséquent $[H : H \cap H^{g^{-1}}] = [H : H \cap H^g]$. $\triangleleft$

Maintenant à partir d'un groupe profini, nous construisons une extension HNN unimodulaire et vérifiant les hypothèses de (2.4.4). Ainsi nous obtenons la structure voulue :

Proposition 2.5.6. *Soit H un groupe profini. Il existe une structure D fortement minimale unimodulaire à valence bornée et réduite à une composante telle que $H = \mathrm{Fix}(d)$ $(= \mathrm{Gal}_d(D))$. Si H est séparable, on peut choisir D dénombrable. En fait pour tout κ cardinal infini tel que le cardinal de l'ensemble des sous-groupes normaux ouverts de H est inférieur ou égal à κ, on peut choisir D de cardinal κ.*

$\triangleright$ Soit $(N_i)_{i\in I}$ l'ensemble des sous-groupes ouverts de H. Soit G l'extension HNN $< H, p_i;\ p_i^{-1}N_ip_i = N_i >$.

Soit $g \in G \setminus H$. Si g s'écrit sous forme normale

$$g = h_0 p_{i_0}^{\varepsilon_0} h_1 \dots h_{n-1} p_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}} h_n$$

alors par (2.5.5 ii)

$$H \cap H^{g^{-1}} = H \cap H^g = N_{i_0} \cap \dots \cap N_{i_{n-1}}.$$

Donc (G, H) vérifie les hypothèses de la proposition 2.4.4 et on peut construire D tel que $G = \mathrm{Aut}(D)$ et $H = \mathrm{Fix}(d)$.

D'autre part $[H^g : H \cap H^g] = [H : H \cap H^{g^{-1}}] = [H : H \cap H^g]$ donc D est unimodulaire (2.4.9).

Pour tout $i \in I$ $[H : N_i]$ est fini donc $|D| = |G/H| = \max(\aleph_0, |I|)$. En particulier si H est séparable, I est dénombrable et donc D est dénombrable.

Pour obtenir une structure de cardinalité κ, il suffit de considérer l'extension HNN

$$< H, p_i, q_j; p_i^{-1}N_ip_i = N_i\ (i \in I), q_j^{-1}Hq_j = H\ (j \in \kappa) > .$$

C'est à dire prendre le produit libre de G avec $*_\kappa\mathbb{Z}$. $\triangleleft$

Remarque. i) En nommant d, on obtient que tout groupe profini est groupe d'automorphismes de la clôture algébrique du vide d'une structure fortement minimale à valence bornée et non $\aleph_0$-catégorique.

ii) Si H est fini, on peut simplement choisir comme extension HNN le produit libre de H avec $\mathbb{Z}$, $H * \mathbb{Z}$.

iii) Il y a des exemples de groupes $\mathrm{Aut}(\mathrm{iacl}(d))$ qui ne sont pas des extensions HNN de $\mathrm{Fix}(d)$: considérons la structure M_4 ou la structure M_5 (2.3.2).

Dans cet exemple $H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes_\psi \mathbb{Z}$ tel que $\psi(2m) = id$ et $\psi(2m+1)(\theta_0, \theta_1) = (\theta_1, \theta_0)$.

Nous montrons que G n'est pas une extension HNN de H. Si c'était le cas, le produit libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * < t >$ se plongerait dans G par un plongement p. Notons ε le générateur de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alors ε est d'ordre 2, donc $p(\varepsilon)$ est de la forme $(\theta_0, \theta_1, 0)$.D'autre part $p(t^2) = (\theta_0', \theta_1', 2m)$. Donc $p(\varepsilon)$ et $p(t^2)$ commutent.

Par conséquent $p(t^{-2}\varepsilon t^2) = p(\varepsilon)$ ce qui est impossible car p est un plongement.

Nous traitons ici le cas non unimodulaire : le fixateur d'un point possède nécessairement deux sous-groupes ouverts homéomorphes d'indice distinct (2.4.9). Nous montrons la réciproque par une extension HNN et (2.4.4) :

Proposition 2.5.7. *Soit H un groupe profini. Il existe une structure $D = \mathrm{iacl}(d)$ fortement minimale triviale non unimodulaire réduite à une composante telle que $H = \mathrm{Fix}(d)$ si et seulement si il existe deux sous-groupes ouverts de H, A_1 et A_2 homéomorphes et tels que $[H : A_1] \neq [H : A_2]$.*

Pour tout κ cardinal infini tel que le cardinal de l'ensemble des sous-groupes normaux ouverts de H est inférieur ou égal à κ, on peut choisir D de cardinal κ.

$\triangleright$ Si $H = \mathrm{Fix}(d)$ avec D non unimodulaire. Alors il existe $g \in \mathrm{Aut}(D)$ tel que $[H : H \cap H^g] \neq [H^g : H \cap H^g]$ (2.4.9). Donc $[H : H \cap H^g] \neq [H : H \cap H^{g^{-1}}]$. D'autre part l'automorphisme intérieur défini par g est un homéomorphisme qui envoie $H \cap H^g$ sur $H \cap H^{g^{-1}}$.

Réciproquement soit H un groupe profini et soient A_1 et A_2 deux sous-groupes ouverts de H homéomorphes et d'indices distincts dans H. Soit α l'homéomorphisme qui envoie A_1 sur A_2.

Soit $(N_i)_{i \in I}$ recouvrant l'ensemble des sous-groupes normaux ouverts de H. On suppose que $0 \notin I$. Soit G l'extension HNN $< H, p_i;\ p_0^{-1} A_1 p_0 = \alpha(A_1),\ p_i^{-1} N_i p_i = N_i\ (i \neq 0) >$.

Montrons que pour tout $g \in G$, $H \cap H^{g^{-1}}$ est un sous-groupe ouvert de H. On reprend (2.5.5 i) : soit $g = h_0 p_{i_0}^{\varepsilon_0} h_1 \dots h_{n-1} p_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}} h_n$ sous forme normale, alors K_n est l'un des N_i ou A_1 ou A_2. Si K_{j+1} est un ouvert de H, $\alpha_{i_j}^{-\varepsilon_j}(K_{j+1})$ est encore ouvert, car $\alpha_{i_j} = \pm\alpha$ ou l'identité. D'autre part un automorphisme intérieur de H est un homéomorphisme, donc K_j est encore ouvert. On en déduit par induction que K_0 est un ouvert.

D'autre part pour tout $i \in I$, $H \cap H^{p_i} = N_i$ donc l'intersection des conjugués de H forme un système de voisinages ouverts de 1 dans G qui induit la même topologie que celle de départ sur H.

Enfin $H \cap H^{p_0} = A_2$ et $H \cap H^{p_0^{-1}} = A_1$ donc G n'est pas unimodulaire.

Pour la question de cardinalité il suffit d'utiliser le même argument que dans la preuve pour le cas unimodulaire. $\triangleleft$

Remarque. Certains groupes profinis commutatifs sont fixateurs de structures non unimodulaires. Par exemple tous les groupes de la forme K^ω avec K fini vérifient les hypothèses de la proposition précédente.

Il existe des groupes profinis séparables tels que tout groupe profini séparable est un fermé de chacun de ces groupes. Il suffit pour cela de considérer par exemple le groupe produit de tous les groupes finis. Toujours en utilisant les extensions HNN et (2.4.4), nous montrons la proposition suivante :

Proposition 2.5.8. *Il existe une structure dénombrable D fortement minimale à valence bornée unimodulaire réduite à une composante et une structure dénombrable D' fortement minimale à valence bornée non unimodulaire réduite à une composante telles que pour tout groupe profini séparable H, il existe $X \subseteq D$ et $X' \subseteq D'$ tels que $H = \mathrm{Aut}_X(D) = \mathrm{Aut}_{X'}(D)$.*

$\triangleright$ Soit $(H_i)_{i\in\omega}$ une énumération de tous les groupes finis. Considérons le groupe profini séparable $H = \prod_{i\in\omega} H_i$. Alors tout groupe profini K séparable est isomorphe à un sous-groupe fermé de H : en effet par définition il existe une partie I de ω telle que K est un sous-groupe fermé de $\prod_{i\in I} H_i$. Tout sous-groupe fermé de H est une intersection de sous-groupe ouverts de H car H est profini.

Le groupe H est séparable donc il existe une énumération $(A_i)_{i\in\omega}$ des sous-groupes ouverts de H. Soit G l'extension HNN $< H, p_i;\ p_i^{-1}A_ip_i = A_i >$. Par (2.5.5 i), pour tout $g \in G$, $H \cap H^g$ est un sous-groupe ouvert de H et pour tout $i \in \omega$, $H \cap H^{p_i} = A_i$.

Par (2.4.4) il existe D tel que $G = \mathrm{Aut}(D)$ et $H = \mathrm{Fix}(d)$. La structure D est unimodulaire car pour tout $g \in G$, $[H : H \cap H^g] = [H : H \cap H^{g^{-1}}]$ (2.5.5 iii). Si K est un groupe profini séparable, alors il existe une partie I de ω telle que $K = \cap_{i\in I}A_i$. Donc $K = \mathrm{Fix}(d, p_i(d);\ i \in I)$.

Pour obtenir une structure D' non unimodulaire ayant les mêmes propriétés il suffit de considérer le groupe $H' = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\omega \times H$. Alors tout groupe profini séparable est isomorphe à un sous-groupe fermé de H' car H est un sous-groupe fermé de H'. De plus il existe un sous-groupe ouvert A' de H' homéomorphe à H'. Soit $(A'_i)_{i\in\omega}$ une énumération des sous-groupes ouverts de H'. Soit G' l'extension HNN $< H', q, p_i;\ q^{-1}H'q = A',\ p_i^{-1}A'_ip_i = A'_i >$. Par (2.4.4) la structure D' telle que $G' = \mathrm{Aut}(D')$ et $H = \mathrm{Fix}(d')$ vérifie les propriétés voulues. $\triangleleft$

2.5.2 Structures non libres pour un groupe profini commutatif séparable

Les constructions précédentes par extensions HNN donnent des structures libres (c'est-à-dire à valence bornée). Par un autre type de construction dans le cas où H est un groupe profini séparable, non trivial et commutatif, nous obtenons des structures non libres. Par séparabilité on peut voir H comme limite projective d'une famille de groupes finis $(H_n)_{n\in\omega}$ munie pour tout $n \in \omega$ d'une projection p_n de H_{n+1} dans H_n. Nous construisons en deux étapes une structure fortement minimale triviale unimodulaire non libre tel que le groupe H est le fixateur d'un point. La première étape consiste en une construction d'une structure à valence bornée où H apparaît comme fixateur d'une partie dénombrable. Cette première construction ne nécessite pas l'hypothèse H commutatif mais cette hypothèse simplifie la preuve qui utilise (2.2.11). Ensuite nous enrichissons la structure à valence bornée par des relations d'équivalence finies afin que H soit le fixateur d'un point. Nous vérifions alors par (2.2.17) que la structure obtenue est toujours fortement minimale. Il est nécessaire ici que H soit commutatif.

Enfin cette construction est une généralisation de l'exemple 2.3.2 : en effet en partant du groupe profini $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, nous obtenons par (2.5.9), la structure M_3 et par l'enrichissement (2.5.10), la structure M_5.

Construction 2.5.9. On considère le langage L suivant : pour tout $n \in \omega$ une relation binaire R_n et une fonction binaire P_n définie sur les réalisations de R_n et pour tout $h \in H_n$ des fonctions unaires g_h. L'ensemble de base de notre structure sera le produit

libre des groupes $H_n \times \mathbb{Z}$. (On ne met pas la loi de groupe dans la structure D.)
Soit $D = (*_{n\in\omega}(H_n \times \mathbb{Z}), L)$ tel que :

- $R_n := \{(x, (h, 1) \cdot x)/\ x \in D,\ h \in H_n\}$,
- $g_h(x) = (h, 0) \cdot x$ pour $x \in D$,
- $P_n(x, (h, 1) \cdot x) = (p_n(h), 1) \cdot x$ pour $x \in D$ et $h \in H_{n+1}$.

La structure D est définie de telle manière que pour tout $x \in D$ et tout $n \in \omega$, H_n agit régulièrement sur l'ensemble des $y \in D$ tels que $R_n(x, y)$, et de plus telle que les actions de H_{n+1} et H_n sont compatibles avec p_n.

La structure D est fortement minimale triviale et $H = \mathrm{Aut}_1(X)$ pour $X := \{(h, 1)/\ n \in \omega,\ h \in H_n\} \cup \{1\}$.
La structure D est unimodulaire car pour tout $x \in D$ et $h \in H_n$, $\mathrm{mult}((h, 1) \cdot x/x) = \mathrm{mult}(x/(h, 1) \cdot x)$.

▷ Nous avons un langage à valence bornée.

De plus D est transitive : soient x, y deux éléments de D et f la bijection de D définie par $f(t) = t \cdot x^{-1} \cdot y$, alors f est un automorphisme de la structure D qui envoie x sur y.

Donc D est fortement minimale triviale (2.2.11).

D'autre part pour tout x et $k \in H_n$, $(k, 0) \cdot x$ est définissable sur x et $(k, 1) \cdot x$ est algébrique sur x. Donc D est réduite à une composante.

Nous montrons maintenant que H est homéomorphe à $\mathrm{Aut}_1(X)$. Soit l'application

$$\phi : \begin{array}{rcl} \mathrm{Fix}(1) & \to & \prod_{n\in\omega} H_n \\ f & \mapsto & (h_n^{-1})_{n\in\omega};\ f((1_n, 1)) = (h_n, 1). \end{array}$$

Alors ϕ est un morphisme : soient f_1 et f_2 dans $\mathrm{Fix}(1)$ tels que $\phi(f_1) = (h_{1,n}^{-1})$ et $\phi(f_2) = (h_{2,n}^{-1})$. Alors

$$\begin{array}{rcl} f_1 \circ f_2((1_n, 1)) & = & f_1((h_{2,n}, 1)) \\ & = & f_1(g_{h_{2,n}}((1_n, 1))) \\ & = & g_{h_{2,n}}(f_1((1_n, 1))) \\ & = & (h_{2,n}, 0) \cdot (h_{1,n}, 1) \\ & = & (h_{2,n}h_{1,n}, 1). \end{array}$$

Le noyau de ϕ est égal à $\mathrm{Fix}(X)$ et $\mathrm{Fix}(1)/\mathrm{Fix}(X) = \mathrm{Aut}_1(X)$.

L'image de ϕ est incluse dans H : soit $f \in \mathrm{Fix}(1)$.
Pour tout $n \in \omega$, $P_n(1, (1_{n+1}, 1)) = (1_n, 1)$, donc $P_n(1, f(1_{n+1}, 1)) = f(1_n, 1)$ et par conséquent, $p_n(\phi(f)_{n+1}) = \phi(f)_n$.

Réciproquement : soit $h \in H$. Nous allons définir $f \in \mathrm{Fix}(1)$ tel que $\phi(f) = h^{-1}$.

Tout élément $x \in D$ s'écrit de manière unique sous la forme normale suivante : $x = (k_1, n_1) \dots (k_m, n_m)$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $(k_i, n_i) \in H_{j_i} \times \mathbb{Z} \setminus \{(1_{j_i}, 0)\}$ et $j_i \neq j_{i+1}$.

Pour un tel élément $x \in D$, on pose $f(x) = (k_1 h_{j_1}^{n_1}, n_1) \dots (k_m h_{j_m}^{n_m}, n_m)$.

Du fait que H est commutatif il est facile de vérifier que pour tout $x \in D$ et $k \in H_n$, $f((k,0)\cdot x) = (k,0)\cdot f(x)$ et $f((k,1)\cdot x) = (kh_n,1)\cdot x$. Ceci permet de vérifier simplement que f est un automorphisme de D.

Montrons l'unimodularité : ce qui précède montre que pour tout $n \in \omega$, l'ensemble des conjugués de $(1_n,1)$ par Fix(1) est égal à $\{(h,1)/h \in H_n\}$ et de même l'ensemble des conjugués de $(1_n,-1)$ par Fix(1) est égal à $\{(h,-1)/h \in H_n\}$. Donc pour tout $x \in D$ et $h \in H_n$, $\mathrm{mult}((h,1)\cdot x/x) = \mathrm{mult}(x/(h,1)\cdot x)$. On en déduit que si x et y sont dans D il existe $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$, tel que $\mathrm{mult}(x_i/x_{i+1}) = \mathrm{mult}(x_{i+1}, x_i)$.

Pour conclure il suffit de remarquer la propriété suivante de la multiplicité : si a,b et c sont deux à deux interalgébriques et si $\mathrm{mult}(a/b) = \mathrm{mult}(b/a)$, $\mathrm{mult}(b/c) = \mathrm{mult}(c/b)$ alors $\mathrm{mult}(a/c) = \mathrm{mult}(c/a)$. En effet :

$$\begin{aligned}
\mathrm{mult}(a/c)\cdot\mathrm{mult}(b/ac) &= \mathrm{mult}(ab/c) \\
&= \mathrm{mult}(a/bc)\cdot\mathrm{mult}(b/c) = \mathrm{mult}(a/bc)\cdot\mathrm{mult}(c/b) \\
&= \mathrm{mult}(ac/b) \\
&= \mathrm{mult}(c/ba)\cdot\mathrm{mult}(a/b) = \mathrm{mult}(c/ba)\cdot\mathrm{mult}(b/a) \\
&= \mathrm{mult}(cb/a) = \mathrm{mult}(c/a)\cdot\mathrm{mult}(b/ca).
\end{aligned}$$

$\triangleleft$

Construction 2.5.10. Soit D la structure définie par la construction 2.5.9. Soit D' la structure de D enrichie par des relations $(E_n)_{n\in\omega}$ tel que pour tout $n \in \omega$, $E_n \subset R_n \times R_n$ et E_n est une relation d'équivalence sur les couples réalisant R_n définissant les $|H_n|$ classes suivante :

$$C_h := \{(x,(h,1)\cdot x);\ x \in D\}.$$

D' est fortement minimale triviale unimodulaire, $H = \mathrm{Fix}(1)$ et si H n'est pas trivial D' n'est pas libre.

$\triangleright$ Pour tous x, y éléments de D et f l'automorphisme de D défini par $f(t) = t\cdot x^{-1}\cdot y$, qui envoie x sur y, est un automorphisme de D' qui fixe globalement chaque classe d'équivalence.

Par conséquent D' vérifie les hypothèse du lemme 2.2.17 et est donc fortement minimale triviale.

On reprend les notations de la preuve précédente :

Le morphisme ϕ devient injectif car $\mathrm{Fix}(X) = \{id\}$: en effet si l'on fixe X, on fixe toutes les classes d'équivalence et alors tout devient définissable.

Le morphisme ϕ est toujours surjectif : soit $h \in H$. On reprend l'automorphisme f de D qui s'envoie sur h^{-1}. Il est simple de vérifier que f est un automorphisme de D' qui envoie pour $k \in H_n$ la classe C_k sur C_{kh_n}.

On a donc $\mathrm{Fix}(1) = H$.

D'autre part si H n'est pas trivial, pour $h \neq 1$, l'automorphisme f correspondant ne fixe pas toutes les classes d'équivalence. Par conséquent D' n'est pas libre. $\triangleleft$

2.6 Structures fortement minimales triviales et finiment axiomatisées

En utilisant les résultats de A.A. Ivanov, nous montrons dans cette partie que toute structure fortement minimale triviale finiment axiomatisable est unimodulaire (2.6.5) et que l'existence d'une structure fortement minimale triviale finiment axiomatisée implique l'existence d'une telle structure à valence bornée réduite à une composante telle que le fixateur d'un point est infini (2.6.7).

A.A. Ivanov [Iv 93] a montré, en utilisant son résultat (2.2.15), qu'à partir d'une structure fortement minimale finiment axiomatisée on peut toujours se ramener à une structure à valence bornée réduite à une composante finiment axiomatisée :

Proposition 2.6.1. *[Iv 93] Si M est une structure finiment axiomatisée fortement minimale triviale ω-saturée, alors il existe $C \subseteq M$ fini tel que $(M, c; c \in C)$ est à valence bornée et encore finiment axiomatisée.*

Remarque 2.6.2. On peut oublier la composante algébrique : la structure D d'une composante non algébrique d'une structure fortement minimale à valence bornée et finiment axiomatisée est encore fortement minimale à valence bornée et finiment axiomatisée.

Ceci permet à A.A. Ivanov [Iv 93] d'énoncer le théorème suivant à partir du théorème analogue pour un graphe connexe fortement minimal à valence bornée et finiment axiomatisé qu'il avait démontré auparavant [Iv 89] :

Théorème 2.6.3. *([Iv 89] et [Iv 93]) Soit M une structure fortement minimale à valence bornée et finiment axiomatisée. Soit $D = \mathrm{iacl}(d)$ une composante non algébrique de M, $G = \mathrm{Aut}(D)$ et $H = \mathrm{Aut}_d(D)$ le fixateur de d. Soit $< X, \Sigma >$ une présentation de H telle que pour tout $x \in X$ il existe $x' \in X$ vérifiant $xx' \in \Sigma$. Alors :*

i) il existe une partie finie Y de G, un ensemble fini Σ' de mots sur $X \cup Y$, et un ensemble Σ'' de mots du type $yxy^{-1}h$ où $x \in X$, $y \in Y$ et h est un mot sur X et où pour tout $x \in X$, $y \in Y$ il existe un unique mot de ce type dans Σ'', tels que $< X \cup Y, \Sigma \cup \Sigma' \cup \Sigma'' >$ est une présentation de G.

ii) Il existe $g_1, \ldots, g_n$ dans G tel que pour tout $g \in G$ il existe $m > 0$ et $h \in H$ tel que g^m est conjugué à l'un des hg_i.

Par ce théorème il est évident que si H est fini alors G vérifie les propriétés de la conjecture A (ceci est nécessaire car si G est finiment présenté alors H est dénombrable donc fini car il est profini). On peut donc se demander si le fixateur d'un point dans une structure fortement minimale à valence bornée et finiment axiomatisée est nécessairement fini. Malheureusement la réponse est négative : d'une part nous construisons à partir d'un groupe vérifiant les hypothèses de la conjecture A, un graphe fortement minimal à valence bornée finiment axiomatisable tel que $H = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\omega$ (2.6.6). D'autre part nous montrons que l'existence d'une structure fortement minimale triviale finiment axiomatisée implique l'existence d'une telle structure à valence bornée dont le fixateur d'un point est infini (2.6.7).

Auparavant nous déduisons à partir des résultats de A.A. Ivanov et du lemme 2.6.4 suivant facile à vérifier que toute structure fortement minimale triviale finiment axiomatisable est unimodulaire :

Lemme 2.6.4. *Soit M une structure fortement minimale saturée. Soit $A \subseteq M$ tel que $|A| < |M|$. Alors M est unimodulaire si et seulement si $(M, a; a \in A)$ est unimodulaire.*

Proposition 2.6.5. *Toute structure fortement minimale triviale finiment axiomatisable est unimodulaire.*

$\triangleright$ Soit M une telle structure. Par interdéfinissabilité on peut supposer M finiment axiomatisée.

Par (2.6.1) et (2.6.4), on peut supposer M à valence bornée. Alors M est unimodulaire si et seulement si $G = \mathrm{Aut}(D)$ est unimodulaire où $D = \mathrm{iacl}(d)$ est une composante non algébrique de M (2.4.9).
Soit α la fonction modulaire correspondant à G (voir 2.4.7). Alors α vaut 1 sur $H = \mathrm{Aut}_d(D)$. Soit $g \in G$. Si g est d'ordre fini alors $\alpha(g) = 1$ car il existe m tel que $g^m = 1$ donc tel que $\alpha(g)^m = 1$. Sinon par le résultat de A.A. Ivanov (2.6.3 ii), il existe $g_1, \ldots, g_n$ dans G tels que pour tout $k > 0$ il existe $m_k > 0$, i_k et $h_k \in H$ tels que g^{km_k} est conjugué à $h_k g_{i_k}$. On en déduit qu'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ et r, s distincts tels que $\alpha(g^r) = \alpha(g^s) = \alpha(g_i)$. D'où $\alpha(g) = 1$. $\triangleleft$

Construction 2.6.6. S'il existe un groupe vérifiant les propriétés de la conjecture A alors il existe un graphe connexe à valence bornée fortement minimal trivial finiment axiomatisé tel que $\mathrm{Fix}(x) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\omega$ pour tout élément x du graphe. De plus comme $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\omega$ n'a pas la propriété du petit indice, le graphe non plus (2.4.11).

$\triangleright$ Soit G un groupe vérifiant les hypothèses de la conjecture A.

Soit $< a_1, \ldots, a_n / w_1, \ldots w_k >$ une présentation de G. Soient $g_1, \ldots, g_n$ les éléments de G correspondant à $a_1, \ldots, a_n$.

On peut supposer que les g_i sont tous distincts de 1 et que pour tout i il existe j tel que $g_j = g_i^{-1}$. On peut aussi supposer que la condition sur les classes de conjugaisons s'exprime de la façon suivante : pour tout $g \neq 1 \in G$, il existe $m > 0$ tel que g^m est conjugué à l'un des g_i.

La première structure finiment axiomatisable est simplement le graphe de Cayley de G dans le langage réduit à $\{a_1, \ldots, a_n\}$, c'est à dire $D_1 = (G, a_1, \ldots, a_n)$ tel que $a_i(g) = g_i g$. Dans ce cas acl = dcl.
La théorie de D_1 est axiomatisée par :$\forall x \ a_i(x) \neq x$ $(1 \leq i \leq n)$ et $\forall x \ w_j(x) = x$ $(1 \leq j \leq k)$. Ceci vient du fait que la condition sur les classes de conjugaisons implique que si $w \neq 1$, alors g, correspondant au mot w dans G, a une puissance conjuguée à l'un des g_i, donc l'axiome $\forall x \ a_i(x) \neq x$ implique $\forall x \ w(x) \neq x$.

Alors D_1 est fortement minimale triviale car transitive et à valence bornée (2.2.11).

Pour obtenir maintenant une structure telle que $\mathrm{Fix}(x)$ est infini on double G et on munit cette structure du même type de langage que le graphe de Cayley mais sur les doublons :
Soit $D_2 = (G \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, R_1, \ldots, R_n)$ où $R_i = \{(g, \varepsilon), (g_i.g, \varepsilon') / g \in G, \ \varepsilon, \ \varepsilon' \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$.

Il est alors évident que la relation d'équivalence E, dont les classes d'équivalence sont les doublons, est définissable dans D_2. On en déduit une axiomatisation simple de la théorie de D_2 : E est une relation d'équivalence compatible avec les R_i telle que la structure induite sur D_2/E est élémentairement équivalente à D_1.
Donc D_2 est finiment axiomatisable. La structure D_2 est aussi fortement minimale triviale car D_2 est transitive et à valence bornée.

Pour tout $x \in D_2$, $\mathrm{Fix}(x) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\omega$ (2.2.11). $\triangleleft$

Proposition 2.6.7. *L'existence d'une structure fortement minimale triviale finiment axiomatisée implique l'existence d'une telle structure à valence bornée réduite à une composante telle que* $\mathrm{Fix}(x)$ *est infini.*

$\triangleright$ Par (2.6.1) et (2.6.2) il existe une structure D finiment axiomatisée fortement minimale triviale réduite à une composante et à valence bornée. Soient $R_1, \dots, R_n$ les relations à valence bornée définissant le langage. Nous doublons D de façon à être sûr que le fixateur d'un point est infini, de la même manière que pour (2.6.6).

Soit $D' = (D \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, R'_1, \dots, R'_n)$ où pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$R'_i = \{((x_1, \varepsilon_1), \dots, (x_l, \varepsilon_l));\ x_j \in D,\ \varepsilon_j \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ et } lR_i(x_1, \dots, x_l)\}.$$

Pour les mêmes raisons que dans la construction 2.6.6, D' est fortement minimale triviale et finiment axiomatisée. De plus pour $x \in D$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\omega \subseteq \mathrm{Fix}(x)$. $\triangleleft$

Chapitre 3

Sous-groupes $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissables du groupe additif d'un corps séparablement clos

Introduction

Dans ce chapitre nous étudions les sous-groupes $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissables du groupe additif d'un corps L séparablement clos de degré d'imperfection fini strictement positif, et plus particulièrement, la structure induite sur les sous-groupes $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissables additifs minimaux localement modulaires, qui sont des exemples de groupes minimaux d'exposant borné. Les théories de corps séparablement clos sont stables non superstables [Wo 79] et en fait aucun ensemble définissable n'est rangé. Les groupes minimaux ne sont donc pas définissables mais $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissables.

L'étude des ensembles $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissables dans un corps séparablement clos est beaucoup plus complexe que dans un corps algébriquement clos. Contrairement au cas des corps algébriquement clos, il n'y a pas directement l'élimination des quantificateurs et on est obligé d'introduire une topologie, limite de topologie de Zariski, qui n'est alors plus noethérienne. Malgré cette difficulté, les travaux de M. Messmer [Me 94], de E. Hrushovski [Hr 96] et de F. Delon [De 98] ont abouti en particulier (et en utilisant la trichotomie des géométries de Zariski [HZ 96]) à la dichotomie suivante sur les types minimaux : un type minimal dans un corps séparablement clos L de caractéristique p est soit localement modulaire, soit non orthogonal à $L^{p^\infty} := \cap_{n\in\omega} L^{p^n}$ qui est le sous-corps algébriquement clos maximal de L.

Récemment, E. Bouscaren et F. Delon [BD2] ont donné une description complète des groupes minimaux $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissables dans L et grâce à la dichotomie précédente, elles ont ainsi obtenu une description des groupes minimaux $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissables localement modulaires et de ceux non localement modulaires. Leur description souligne de plus une dichotomie transversale à la précédente : un groupe minimal $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissable est ou bien divisible, et dans ce cas de rang de transcendance fini, ou bien d'exposant p, et dans ce cas définissablement isomorphe à un sous-groupe du groupe additif de L et de rang de transcendance arbitraire. La classe des groupes minimaux additifs $\mathcal{M}$-définissables (les sous-groupes minimaux du groupe additif de L) est donc riche.

Notre étude des sous-groupes minimaux additifs $\mathcal{M}$-définissables confirmera cette richesse.

Dans la section suivant celle des préliminaires, nous montrons que tout sous-groupe additif $\mathcal{M}$-définissable est en fait défini par les zéros de polynômes additifs (3.2.8).

Dans la troisième section, nous regardons le groupe additif du corps L muni de sa structure de module sur l'anneau des endomorphismes définissables dans la structure de corps L : nous commençons par donner une description de l'anneau des endomorphismes définissables (3.3.1) et nous en déduisons, d'une part, l'élimination des quantificateurs pour la structure de module sur le groupe additif (3.3.4) et d'autre part, que tout groupe 1-basé peut être étudié dans cette structure de module (3.3.5). L'élimination des quantificateurs avait été démontré auparavant en utilisant un autre point de vue par P. Dellunde, F. Delon et F. Point [DDP].

Nous commençons ensuite l'étude de la structure induite sur un sous-groupe additif minimal localement modulaire $\mathcal{M}$-définissable dans les quatrième et cinquième sections. Le théorème 1.3.6 dû à E. Hrushovski [Hr 85] montre l'importance du corps des quasi-endomorphismes dans cette étude, mais dans le cas de groupes d'exposant bornés les travaux de E. Hrushovski et J. Loveys [HL] soulignent les difficultés techniques à décrire la structure induite à partir de ce théorème (voir section 1.4).

Nous nous intéressons aux rapports entre le corps de quasi-endomorphismes et l'anneau des endomorphismes définissables. Nous montrons qu'il existe des sous-groupes additifs minimaux $\mathcal{M}$-définissables localement modulaires (et d'autres non localement modulaires) dont le corps de quasi-endomorphismes est infini et n'est pas un corps de fractions de l'anneau des endomorphismes définissables qui lui, est fini (3.5.16).

Par ailleurs, nous construisons $2^{\aleph_0}$ sous-groupes minimaux additifs définis sur le vide, deux à deux orthogonaux et $\aleph_0$-catégoriques. La structure induite sur ces groupes est exactement celle d'un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel (3.5.20).

Nous remarquons que l'on peut voir la locale modularité sur le corps de quasi-endomorphismes mais pas sur l'anneau des endomorphismes définissables : tout groupe additif minimal $\mathcal{M}$-définissable non localement modulaire est isogène à $(L^{p^\infty}, +)$ et donc a même corps de quasi-endomorphismes que celui-ci ; par contre, il existe un groupe additif minimal $\mathcal{M}$-définissable localement modulaire et un autre non localement modulaire ayant même anneau d'endomorphismes définissables (3.4.24 et 3.5.9).

Les exemples connus de types de L rangés et de rang infini sont des types triviaux [CCSSW]. Dans la dernière section, nous donnons une construction de types additifs de L de rang U égal à ω (3.6.5). Nous montrons ainsi qu'il existe une infinité de sous-groupes additifs de rang U égal à ω dont les types génériques sont deux à deux orthogonaux et parmi lesquels certains sont 1-basés et d'autres non (3.6.6, 3.6.7 et 3.6.8).

3.1 Notations et préliminaires

Dans ce chapitre nous nous plaçons dans un corps séparablement clos de degré d'imperfection fini strictement positif. Un corps est dit séparablement clos s'il n'a pas d'extension algébrique séparable propre (remarque : un corps de caractéristique 0 séparablement clos est algébriquement clos).

La théorie $SCF_{p,\nu}$ des corps séparablement clos de degré d'imperfection $\nu > 0$ est complète [Er 67], stable non superstable [Wo 79].

Pour toute la suite on fixe un corps L séparablement clos de caractéristique $p > 0$ et de degré d'imperfection fini $\nu > 0$ (c'est-à-dire $[L : L^p] = p^\nu$).

Tout au long de cette section, nous fixons les notations que nous utiliserons dans la suite de ce chapitre. Nous commençons par rappeler les résultats généraux de théorie des modèles concernant les corps séparablement clos (paragraphes 3.1.1 et 3.1.2). Pour ces résultats nos références sont [De 88], [Me 94], [Me 96] et [De 98].

E. Bouscaren et F. Delon [BD1] ont montré que tout groupe définissable dans L est définissablement isomorphe au groupe des points L-rationnels d'un groupe algébrique définissable sur L. Nous citons dans le paragraphe 3.1.3 les résultats de leur article qui nous seront utiles. Ensuite, nous énonçons un corollaire 3.1.25 immédiat, sur les sous-groupes minimaux du groupe additif de L, de la description par E. Bouscaren et F. Delon [BD2] des groupes minimaux dans L et du fait que tout type minimal dans L a une géométrie de Zariski (E. Hrushovski puis F. Delon). Enfin nous terminons ces préliminaires par une question ouverte sur la connexité par fini.

3.1.1 p-base et composantes itérées

Pour étudier plus précisément la théorie d'un corps séparablement clos L de degré d'imperfection fini $\nu > 0$, il est pratique d'enrichir le langage en lui ajoutant une p-base. On fixe une **p-base** B et pour $i \in p^\nu$ on note m_i le monôme $\prod_{j\in\nu} b_j^{i(j)}$.

Alors $(m_i : i \in p^\nu)$ forme une base du L^p espace vectoriel L. On note $(x_i : i \in p^\nu)$ les **p-composantes** de x tels que $x = \sum x_i^p m_i$.

On se place dans le langage $\mathcal{L}_{p,\nu} = \{0, 1, +, -, .\} \cup \{b_0, .., b_{\nu-1}\} \cup \{f_i : i \in p^\nu\}$ et on considère dans ce langage la théorie $T_{p,\nu}$, théorie de L dans $\mathcal{L}_{p,\nu}$ où l'on a interprété $f_i(x)$ par x_i. En fait cette théorie est axiomatisée par

$$SCF_{p,\nu} \cup \{B \text{ est une } p\text{-base }\} \cup \{\forall x\ x = \sum_{i\in p^\nu} f_i(x)^p m_i\}.$$

Théorème 3.1.1. *$T_{p,\nu}$ est complète, a l'élimination des quantificateurs, est stable non superstable et a l'élimination des imaginaires.*

Ce théorème découle de la description des types par des idéaux.

On introduit pour cela les notions d'idéaux séparables et de λ-topologie mais auparavant on étend les notations précédentes pour introduire les p-composantes itérées : $f_\emptyset$ est l'identité et $m_\emptyset = 1$ et pour tout $n > 0$ et $i \in (p^\nu)^n$,

$$f_i = f_{i(n-1)} \circ .. \circ f_{i(0)} \text{ et } m_i = m_{i(n-1)}^{p^{n-1}} \dots m_{i(0)}.$$

Alors pour tout entier n et $x \in L$:

$$x = \sum_{i \in (p^\nu)^n} f_i(x)^{p^n} m_i$$

les m_i formant une base du L^{p^n}-espace vectoriel L.

On note $p^\infty := (p^\nu)^{<\omega}$ et pour $x \in L$ on note $x_\infty := (x_i : i \in (p^\nu)^{<\omega})$ la suite des composantes itérées de x définie par $x_i = f_i(x)$.
Pour $n \geq 0$, soit λ_n la bijection de L dans $L^{\times p^{\nu n}}$ définie par $\lambda_n(x) = (x_i)_{i \in p^{\nu n}}$ et pour $x \in L$, $x_{=n} := \lambda_n(x)$ et $x_{\leq n} := (x_{=0}, \dots, x_{=n})$. On étend de manière naturelle ces notations aux uples.

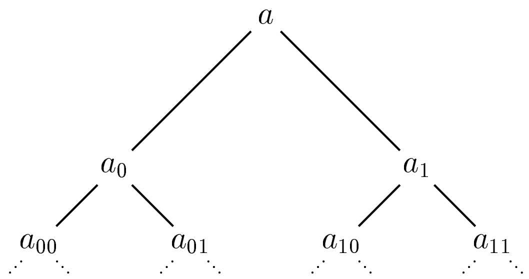
Pour une suite $(a_j)_{j \in J}$ d'éléments de L, on note pour tout $j \in J$ et $i \in p^\infty$, $a_{j,i}$ l'élément $f_i(a_j)$.

Enfin pour $i \in p^\infty$, $j \in p^\infty$ et $a \in L$ on note $a_{i \frown j}$ ou plus simplement a_{ij} l'élément $f_j \circ f_i(a)$.

Remarque 3.1.2. Nous avons considéré ci-dessus p^ν comme ensemble des applications de ν dans p et pour tout n, $p^{\nu n}$ comme ensemble des applications de n dans p^ν. Par la suite dans certaines preuves techniques et certains exemples, il sera pratique de voir ces ensembles comme les entiers correspondants et donc comme ensembles des entiers naturels les précédant. Pour qu'il n'y ait alors pas de confusion il faut choisir l'ordre que l'on met sur p^ν et sur $p^{\nu n}$. Nous choisissons l'ordre lexicographique inverse, c'est à dire pour $i, j \in p^\nu$, $i < j$ s'il existe $l < \nu$ tel que $i(l) < j(l)$ et pour tout $k > l$, $i(k) = j(k)$. Nous faisons de même sur $(p^\nu)^n$ à partir de l'ordre défini sur p^ν. Nous avons choisi cet ordre de telle manière que pour $0 \leq i < p^{\nu n} < p^{\nu m}$, m_i correspond alors au même élément, que l'on considère i comme le $(i+1)$ème élément de $p^{\nu n}$ ou de $p^{\nu m}$. On a par exemple $m_0 = 1$, $m_1 = b_0$ et $m_{p-1} = b_0^{p-1}$ (alors que si l'on avait choisi l'ordre lexicographique classique, m_1 serait égal à $b_{\nu-1}^{p^n}$ pour 1 le second élément de $p^{\nu n}$).

Par contre pour $a \in L$, a_i dépend nécessairement de la hauteur où se trouve i. On utilisera donc quand k est un entier fixé la notation "abusive" a_k et f_k seulement pour $0 \leq k < p^\nu$. Ainsi $a_0 = f_0(a)$ correspond à la composante en $m_0 = 1$ de a, a_1 correspond lui à la composante en $m_1 = b_0$ et a_{p-1} à la composante en $m_{p-1} = b_0^{p-1}$.

Enfin on utilisera simplement a_{10} pour la composante en m_0 de $a_1 = f_1(a)$, (c'est-à-dire $a_{10} = f_0(f_1(a))$), sachant que 10 ne sera jamais employé pour *dix*. (La notation a_{10} étant plus courte que $a_{1 \frown 0}$.)



Composantes itérées pour $p = 2$ et $\nu = 1$

Définition 3.1.3. Pour $x \in L$ et $n \in \omega$, nous définissons $x_{\bar{0}(n)}$ par récurrence de la manière suivante : $x_{\bar{0}(0)} = x$ et $x_{\bar{0}(n+1)} = f_0(x_{\bar{0}(n)}) = x_{\bar{0}(n)0}$. Nous définissons $x_{\bar{1}(n)}$ de façon identique à l'aide de f_1 au lieu de f_0.

Par la suite quand aucune confusion n'est possible, on ne fait pas de différence dans les notations entre les éléments et les uples d'éléments.

Enfin s'il n'y a pas d'autre précision L est toujours considéré comme $\mathcal{L}_{p,\nu}$-structure.

Fait 3.1.4. *Soit $A \subset L$.*
- *$\mathbb{F}_p(B, f_i(A); i \in p^\infty)^{sep}$, la clôture séparable de $\mathbb{F}_p(B, f_i(A); i \in p^\infty)$), est un modèle premier au-dessus de A.*
- *La clôture définissable de A est $\mathbb{F}_p(B, f_i(A); i \in p^\infty)$.*
- *Par élimination des imaginaires tout ensemble définissable sur $acl^{eq}(A)$ est définissable sur $\mathbb{F}_p(B, f_i(A); i \in p^\infty)^{sep}$.*

Définition 3.1.5. Soit K un sous-corps définissablement clos de L.

Le **rang de transcendance** noté RT d'un ensemble infiniment définissable Δ sur K est égal au maximum des degrés de transcendance de $K(x_\infty)$ sur K pour $x \in \Delta$. On note $K\!<\!x\!>:= K(x_\infty)^{sep}$ le modèle premier au-dessus de $K \cup \{x\}$ et donc $\mathrm{RT}(\Delta) = \sup_{x\in\Delta} \deg tr(K\!<\!x\!>/K)$.

Le corps $L^{p^\infty} := \cap_{n\in\omega} L^{p^n}$ est l'unique sous-corps algébriquement clos maximal de L. Il est minimal de rang de transcendance 1 et c'est un pur corps algébriquement clos au sens suivant :

Fait 3.1.6. *Soit K un sous-corps définissablement clos de L.*

Soit k un entier et D une partie de $L^{\times k}$ définissable sur K. Alors $D \cap (L^{p^\infty})^{\times k}$ est définissable dans le pur corps L^{p^∞} sur K^{p^∞}.

3.1.2 Idéaux séparables

On rappelle un résultat général sur les corps de définition des idéaux qui sera utile par la suite :

Définition. Soit F un corps et $F[X_i : i \in J]$ un anneau de polynômes sur F. On dit que $C \subseteq F$ est un **corps de définition** d'un idéal I de $F[X_i : i \in J]$, si cet idéal I est engendré par des polynômes sur C.

Fait 3.1.7. *[L 58] Tout idéal $I \in F[X_i : i \in J]$ a un plus petit corps de définition $C(I)$ qui de plus vérifie la propriété suivante : pour tout automorphisme σ du corps F, σ laisse globalement invariant I si et seulement si σ fixe point par point $C(I)$.*

On fixe maintenant un sous-corps K de L, définissablement clos (c'est-à-dire clos par les f_i et contenant $\mathbb{F}_p(B)$).

Notation 3.1.8. Soit $K[X_\infty] := K[X_i; i \in p^\infty]$ l'anneau des polynômes sur K à une infinité d'indéterminées indexées par p^∞. Pour un k-uple d'indéterminées $X = (X_1, \dots, X_k)$, on note de même $K[X_\infty]$ l'anneau $K[X_{1,\infty}, \dots, X_{k,\infty}]$.
Pour $n \in \omega$, soient

$$K[X_{\leq n}] := K[X_i; i \in (p^\nu)^{\leq n}] \text{ et } K[X_{=n}] := K[X_i; i \in (p^\nu)^n]$$

et pour I un idéal de $K[X_\infty]$ soient

$$I_{\leq n} := I \cap K[X_{\leq n}] \text{ et } I_{=n} := I \cap K[X_{=n}].$$

Pour une indéterminée X on note I^0 l'idéal de $K[X_\infty]$ engendré par les polynômes $X_i - \sum_{j \in p^\nu} X^p_{i \frown j} m_j$ pour $i \in p^\infty$. Pour $X = (X_1, .., X_k)$ un uple d'indéterminées, s'il n'y a pas de risque de confusion, on note aussi I^0 l'idéal de $K[X_\infty]$ engendré par les idéaux $I^0(X_i)$ de $K[X_{i,\infty}]$.
Pour décrire le type de $x \in L$ sur K on va simplement considérer l'idéal associé

$$I(x, K) := \{P \in K[X_\infty]; P(x_\infty) = 0\}.$$

Notation 3.1.9. Pour q un type complet sur K on note $I(q)$ l'idéal $I(a, K)$ pour a réalisant q.

Pour tout $n \in \omega$ et a réalisant q, on note

$$q_n := \{P(x_{\leq n}) = 0, Q(x_{\leq n}) \neq 0;\ P, Q \in K[X_{\leq n}],\ P(a_{\leq n}) = 0,\ Q(a_{\leq n}) \neq 0\}.$$

Par élimination des quantificateurs q sera égal à la conjonction des q_n.

Définition. Un idéal I d'une K-algèbre C est **séparable** si pour tous $P_i \in C$, $i \in p^\nu$, tels que $\sum_{i \in p^\nu} P_i^p m_i \in I$ alors $P_i \in I$ pour tout $i \in p^\nu$.

La proposition qui suit démontre l'élimination des quantificateurs et la stabilité de $T_{p,\nu}$:

Proposition 3.1.10. *Supposons L $|K|^+$-saturé.*
L'application qui à $x \in L^{\times k}$ associe $I(x, K)$ définit une bijection entre les k-types sur K et les idéaux premiers séparables de $K[X_\infty]$ contenant I^0.

Remarque. La preuve se fait en deux temps. Tout d'abord on suppose que K est séparablement clos (c'est-à-dire $K \models T_{p,\nu}$). Ensuite avec le fait 3.1.7, on peut montrer un lemme (voir [De 88] lemme 32) qui permet de montrer la surjectivité de l'application dans le cas général. En fait pour un idéal I premier séparable de $K[X_\infty]$ il existe P premier séparable (par exemple $P = I \otimes_K K^{sep}$) de $K^{sep}[X_\infty]$ tel que $I = P \cap K[X_\infty]$.

Remarque 3.1.11. i) I^0 est séparable et $I^0 = I(g, K)$ où g réalise l'unique générique du groupe additif L au dessus de K qui est aussi l'unique générique du groupe multiplicatif de L (cf. [Po 87]).

ii) Pour tout polynôme $P \in K[X_\infty]$, il existe des polynômes $P_i \in K[X_\infty]$ uniques modulo I^0 tels que $P \equiv \sum_{i \in p^\nu} P_i^p m_i$ modulo I^0.

iii) Soit I un idéal de $K[X_\infty]$ contenant I^0 alors I est séparable si et seulement si $I \otimes_K L$ est un idéal séparable de $L[X_\infty]$.

$\triangleright$ Nous montrons seulement l'implication du iii). (La réciproque du iii) est immédiate et n'utilise pas le fait que I contient I^0.)

Supposons I séparable. Soit $\sum_{i \in p^\nu} P_i^p m_i \in I \otimes_K L$. Donc

$$\sum_{i \in p^\nu} P_i^p m_i = R_1 Q_1 + \ldots + R_n Q_n \text{ avec } R_j \in L[X_\infty] \text{ et } Q_j \in I.$$

Avec le ii) et la séparabilité de I, il existe pour tout j des polynômes $R_{j,i} \in L[X_\infty]$ et $Q_{j,i} \in I$ tels que

$$R_j Q_j \equiv \left(\sum_{i \in p^\nu} R_{j,i}^p m_i \right) \left(\sum_{i \in p^\nu} Q_{j,i}^p m_i \right) \quad (mod\ I^0 \otimes_K L).$$

D'où

$$P_i \equiv \sum_j \sum_{l+k \equiv i(p)} (m_l m_k m_i^{-1})^{1/p} R_{j,l} Q_{j,k} \quad (mod\ I^0 \otimes_K L)$$

et $P_i \in I \otimes_K L$ si $I \supseteq I^0$. $\triangleleft$

λ-topologie

Définition. Pour un ensemble de polynômes $S \subseteq K[X_\infty]$ on définit un **λ-fermé** :

$$V(S) := \{x \in L^{\times k}; S(x_\infty) = 0\}.$$

La **λ-topologie (définie sur K)** de $L^{\times k}$ est définie par l'ensemble des λ-fermés $V(S)$ avec $S \subseteq K[X_\infty]$.

Si $S \subseteq K[X_{=n}]$, $V(S)$ est par définition un **λ_n-fermé**. La λ-topologie est la limite des λ_n-topologies noethériennes.

A une partie A de $L^{\times k}$, on associe l'idéal

$$I(A, K) := \{P \in K[X_\infty]; P(a_\infty) = 0 \text{ pour tout } a \in A\}.$$

(Quand K est fixé on écrit tout simplement $I(A)$.)

L'élimination des quantificateurs de $T_{p,\nu}$ se traduit par le fait que tout ensemble définissable sur K est combinaison booléenne finie de λ-fermés définissables sur K, ce qu'on appelle un **λ-constructible**. En fait c'est un **λ_n-constructible** pour un certain n (une combinaison booléenne finie de λ_n-fermés définissables sur K). On dit plus généralement qu'un ensemble est $\bigwedge$-définissable **au niveau** n si c'est une intersection de λ_n-constructibles.

Comme dans tout espace topologique on définit les λ-fermés irréductibles, les composantes irréductibles d'un λ-fermé et la notion de générique topologique. Tout fermé est l'union de ses sous-ensembles fermés irréductibles et si un fermé est union d'un nombre fini de sous-ensembles irréductibles maximaux alors ces sous-ensembles sont toutes les composantes irréductibles de ce fermé.

On dit qu'un type complet q sur K est un générique topologique d'un fermé sur K si $V(I(q))$ est une composante irréductible de ce fermé.

Proposition 3.1.12 ("Nullstellensatz"). *Supposons $K \preccurlyeq L$ et L $\aleph_1$-saturé. (Éventuellement $K = L$; $I(A)$ désigne $I(A, K)$ pour $A \subseteq L^{\times k}$)*

1. *L'application qui à A, une partie de $L^{\times k}$, associe l'idéal $I(A)$ définit une bijection entre les λ-fermés sur K de $L^{\times k}$ et les idéaux séparables contenant I^0 de $K[X_\infty]$. L'application réciproque est l'application qui à I associe $V(I)$.*
2. *Un λ-fermé A est irréductible si et seulement si $I(A)$ est premier.*
3. *Soient $C \subseteq A$ des λ-fermés de $L^{\times k}$. Alors C est une composante irréductible de A si et seulement si $I(C)$ est un idéal premier minimal au dessus de $I(A)$.*

Remarque 3.1.13. Le "Nullstellensatz" est vrai en supposant seulement K définissablement clos.

$\triangleright$ Il faut vérifier le 1. (le 2. et 3. se déduisent de la même manière que dans le cas K séparablement clos).
L'application $A \mapsto I(A, K)$ est toujours injective car pour A λ-fermé, $A = V(I(A, K))$. Pour montrer la surjectivité on utilise la remarque 3.1.11. Soit I un idéal séparable de $K[X_\infty]$ contenant I^0. Alors $I \otimes_K L$ est séparable et contient $I^0 \otimes_K L$. En appliquant le "Nullstellensatz" au-dessus de L on obtient $I(V(I), L) = I \otimes_K L$, d'où $I(V(I), K) = I$.
$\triangleleft$

Fait 3.1.14. *Si A est un λ-fermé définissable alors A a un nombre fini de composantes irréductibles.*

En utilisant le "Nullstellensatz" et la notion de corps de définition 3.1.7, on montre l'élimination des imaginaires pour $T_{p,\nu}$ (cf. [De 88], [Me 96] ou [De 98]).

En particulier, avec le "Nullstellensatz" on peut définir la notion de corps de définition d'un λ-fermé A : K est un **corps de définition** de A si K est un corps de définition de $I(A, L)$ (c'est-à-dire $I(A, L) = I(A, K) \otimes_K L$).

On en déduit le résultat suivant :

Corollaire 3.1.15. *Soit A un λ-fermé sur L. (K est toujours supposé définissablement clos.) Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

– *A est $\bigwedge$-définissable sur K (au sens de la théorie des modèles).*

– *K est un corps de définition de A.*
– *A est λ-fermé sur K.*

$\triangleright$ Supposons A $\wedge\!\!\wedge$-définissable sur K. On peut supposer L $|K|^+$-saturé. (Il suffit pour cela de se plonger dans une extension élémentaire de L.) Tout automorphisme de la structure L fixant point par point K, fixe globalement A, donc $I(A,L)$ et donc point par point $C(I(A,L))$. Comme K est définissablement clos et L $|K|^+$-saturé, $C(I(A,L)) \subseteq K$ et par conséquent K est un corps de définition de A. Les autres implications sont évidentes. $\triangleleft$

Idéaux séparables et clôture de Zariski dans L

On note $\bar{K}$ et $\bar{L}$ les clôture algébriques de K et L. De même pour $S \subseteq \bar{L}[X]$ on note $\bar{V}(S)$ le fermé de Zariski défini par S dans $\bar{L}^{\times k}$ et pour $A \subseteq \bar{L}^{\times k}$, on note $\bar{I}(A) := \{P \in \bar{L}[X]; P(a) = 0 \text{ pour tout } a \in A\}$. On note $\bar{A}$ la clôture de Zariski de $A \subseteq L^{\times k}$ dans $\bar{L}^{\times k}$.

Si A est un λ_0-fermé on a évidemment $\bar{A} = \bar{V}(I(A)_{=0})$.

Remarque. Les corps K et L n'étant pas algébriquement clos, les notions de définissable au sens de la théorie des modèle et de définissables au sens de la géométrie algébrique sont distinctes. Quand nous parlerons de fermés de Zariski ou de variétés définies sur K (ou sur L), ce sera toujours au sens de la géométrie algébrique.

Fait 3.1.16. – *Un idéal I premier séparable de $L[X]$ est absolument premier (c'est-à-dire $I \otimes_L \bar{L}$ est un idéal premier de $\bar{L}[X]$).*
– *Si V est une variété irréductible de $\bar{L}$ définie sur L alors $V(L)$ est Zariski dense dans V.*
– *Un idéal I séparable de $L[X]$ est absolument réduit c'est-à-dire si $I_1, \dots, I_n$ sont les idéaux premiers minimaux de $L[X]$ contenant I, alors dans $\bar{L}[X]$, les idéaux premiers minimaux contenant $I \otimes_L \bar{L}$ sont exactement les $I_1 \otimes_L \bar{L}, \dots, I_n \otimes_L \bar{L}$.*

3.1.3 Groupes définissables

Nous citons maintenant quatre résultats utiles pour la suite que l'on trouve dans [BD1]. Nous supposons ici que K est une sous-structure élémentaire de L (c'est à dire K est séparablement clos).

Proposition 3.1.17. *[BD1] Soit G un groupe $\wedge\!\!\wedge$-définissable sur K dans L avec une multiplication rationnelle (c'est-à-dire pour tout a, b de G, $a \cdot b \in K(a,b)$). Alors si q est un type générique de G (au sens du groupe) alors $I(q,K)$ est minimal parmi les $I(r,K)$ pour r parcourant les types complets sur K dans G.*

Proposition 3.1.18. *[BD1] Soit H un sous-groupe définissable sur K d'un groupe G λ_0-fermé sur K à multiplication rationnelle. Si H est λ_n-constructible alors H est λ_n-fermé.*

Proposition 3.1.19. *[Hr 96] ou [BD1] Soit G un groupe algébrique connexe défini sur K. Alors $G(L)$, comme groupe définissable dans L, est connexe.*

Proposition 3.1.20. *[BD1] Tout groupe G définissable sur K dans L est connexe par fini. La composante connexe de G est donc d'indice fini dans G et définissable sur K.*

Remarque 3.1.21. En particulier tout sous-groupe définissable de $(L,+)$ sur K est λ-fermé et connexe par fini. De plus, dans ces groupes, la notion de générique topologique coïncide avec celle de générique de groupes.

Enfin E. Bouscaren et F. Delon ont montré que l'étude des sous-groupes commutatifs définissables d'exposant p se ramène à l'étude des sous-groupes définissables du groupe additif :

Proposition 3.1.22. *[BD2] Soit G un groupe commutatif d'exposant p et $\bigwedge$-définissable sur K. Alors G est définissablement isomorphe à un sous-groupe λ-fermé de $(L,+)$.*

Par la suite nous appellerons un sous-groupe de $(L,+)$, **sous-groupe additif**.

3.1.4 Groupes minimaux

E. Bouscaren et F. Delon donnent la description suivante des groupes minimaux dans un corps séparablement clos.

Proposition 3.1.23. *[BD2] Soit G un groupe $\bigwedge$-définissable minimal dans L.*

1. Si G est non-orthogonal à L^{p^∞}, alors G est définissablement isogène à un groupe algébrique de dimension 1 défini sur L^{p^∞}. Plus précisément :
- *soit G est définissablement isomorphe à $((L^{p^\infty})^*, \cdot)$,*
- *soit G est définissablement isomorphe à $A(L^{p^\infty})$ pour A une courbe elliptique définie sur L^{p^∞},*
- *soit G est définissablement isogène à $(L^{p^\infty}, +)$.*

2. Si G est orthogonal à L^{p^∞}, alors
- *soit G est divisible et G est définissablement isomorphe à $p^\infty A(L) := \cap_{n\in\omega} p^n A(L)$ pour A une variété abélienne simple définie sur L,*
- *soit G est d'exposant p et est définissablement isomorphe à un sous-groupe λ-fermé de $(L,+)$.*

Cette description des groupes minimaux sépare les groupes localement modulaires de ceux non localement modulaires car tout type minimal de L est soit non orthogonal à L^{p^∞} et donc non localement modulaire, soit localement modulaire. Ceci vient des résultats suivants : d'une part E. Hrushovski [Hr 96] a montré que les types minimaux dans L qui sont minces (c'est-à-dire de rang de transcendance fini) ont une géométrie de Zariski et ensuite F. Delon [De 98] a montré ce résultat pour tous les types minimaux de L. D'autre part tout type minimal ayant une géométrie de Zariski est soit localement modulaire, soit non-orthogonal à un corps minimal $\bigwedge$-définissable [HZ 96] ou [Ma 98]. Enfin à isomorphisme définissable près L^{p^∞} est l'unique corps minimal $\bigwedge$-définissable de L [Me 94, Hr 96].

Donc :

Fait 3.1.24. *[BD2] Un type minimal de L est soit localement modulaire, soit non orthogonal à L^{p^∞}.*

Nous utiliserons par la suite le corollaire de (3.1.24) et (3.1.23) pour les sous-groupes minimaux additifs :

Corollaire 3.1.25. *[BD2] Soit G un sous-groupe de $(L,+)$ $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissable minimal dans L. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
- G est non localement modulaire
- G est non orthogonal à L^{p^∞}
- G est définissablement isogène à $(L^{p^\infty},+)$.

Remarque. [BD2] Il existe des sous-groupes minimaux de $(L,+)$ définissablement isogènes mais non définissablement isomorphes à $(L^{p^\infty},+)$.

3.1.5 Composante connexe

E. Bouscaren et F. Delon ont montré que tout groupe définissable dans L est connexe par fini [BD1]. Ce n'est pas le cas des groupes $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissables. Voici un contre exemple dans le groupe multiplicatif de L qui est même de rang U égal à 1 :

Exemple 3.1.26. Soit $b := b_0$ le premier élément de la p-base. Soit pour tout entier n, $G_n := \cup_{i<p^n}(b^i(L^{p^n})^*,\cdot)$. Soit $G := \cap_n G_n$. Alors pour tout n, $G_n^0 = ((L^{p^n})^*,\cdot)$ et donc $G^0 = ((L^{p^\infty})^*,\cdot)$.

Voici une construction de contre-exemples dans le groupe additif de L :

Construction 3.1.27. Soit $(G_n)_{n\in\omega}$ une suite strictement décroissante de sous-groupes additifs de $(L,+)$ définissables et connexes. Pour tout $n\in\omega$, soit $a_n \in G_n \setminus G_{n+1}$. Soit pour tout $n\in\omega$, H_n le sous-groupe de $(L,+)$ engendré par G_{n+1} et $a_0,\dots,a_n$. Alors H_n est une suite strictement décroissante. Soit H l'intersection de cette suite. La composante connexe de H est l'intersection des G_n et est donc d'indice infini dans H.

Se pose alors la question suivante : dans un groupe connexe $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissable de L, les groupes relativement définissables sont-ils tous connexes par fini ? E. Hrushovski a répondu positivement à cette question pour les groupes $\cap_n p^n A(L)$ où A est une variété abélienne définie sur L. Les groupes utilisés dans la preuve de Mordell-Lang due à E. Hrushovski [Hr 96] sont les groupes $\cap_n p^n A(L)$ où A est une variété semi-abélienne définie sur L et E. Bouscaren et F. Delon [BD2] ont montré qu'un groupe $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissable de L commutatif et divisible est définissablement isomorphe à un tel groupe.

Par contre parmi les sous-groupes additifs la réponse est négative. Voici un contre-exemple dû à F. Delon :

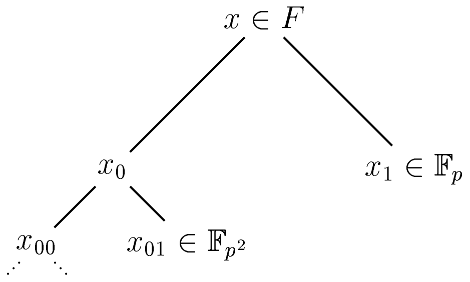
Exemple 3.1.28. Nous utilisons la remarque sur les notations 3.1.2 et la définition 3.1.3. Soit b le premier élément de la p-base. Soit le sous-groupe de $(L,+)$

$$F := \{x \in L;\ x_{\bar{0}(n)} = x^p_{\bar{0}(n+1)} + b x^p_{\bar{0}(n)1} \text{ et } x_{\bar{0}(n)1} \in L^{p^\infty}, \text{ pour tout } n\}.$$

Soit

$$G := \{(x,y) \in F \times F;\ y_{\bar{0}(n)1} = x^{p^{n+1}}_{\bar{0}(n)1} - x_{\bar{0}(n)1}, \text{ pour tout } n\}.$$

Alors G est un groupe connexe non rangé par le rang U car il contient une suite strictement décroissante de groupes connexes. Soit le sous-groupe relativement définissable de G, $H := G \cap (L \times \{0\})$. La composante connexe de H est $L^{p^\infty} \times \{0\}$ et est donc d'indice infini dans H. Le groupe H est de rang U un.



Groupe H

On peut aussi dans la construction précédente ne pas utiliser le groupe F et remplacer G par

$$G' := \{(x, y) \in L \times L;\ y_{\bar{0}(n)1} = x^p_{\bar{0}(n)1} - x_{\bar{0}(n)1},\ \text{pour tout } n\}.$$

Remarque. Les groupes commutatifs divisibles sont minces donc de rang U fini. Par contre le contre-exemple (3.1.28) dans le cas additif n'est pas rangé. Il reste donc la question ouverte suivante : dans un groupe connexe $\bigwedge$-définissable et mince (ou seulement de rang U fini, ou rangé par le rang U) de L, les groupes relativement définissables sont-ils tous connexes par fini ?

3.2 Sous-groupes additifs et p-polynômes

Dans toute cette partie L est un modèle fixé de $T_{p,\nu}$ et K est un sous-corps de L définissablement clos.

Nous montrons que tout sous-groupe de $(L^{\times k}, +)$ définissable sur K est défini pour un entier n par des p-polynômes de $K[X_{=n}]$ (3.2.3).

Nous en déduisons que pour tout sous-groupe G de $(L^{\times k}, +)$ $\bigwedge$-définissable sur K, $I(G)$ est engendré par des p-polynômes de $K[X_\infty]$ (3.2.8).

Commençons par remarquer qu'un sous-groupe additif λ_n-fermé λ_n-irréductible est connexe :

Lemme 3.2.1. *Supposons K séparablement clos.*

Soit G un sous-groupe de $(L^{\times k}, +)$ et I un idéal premier séparable de $K[X_{\leq n}]$ ou de $K[X_\infty]$ tel que $G = V(I)$. Alors G est connexe.

$\triangleright$ Si I est un idéal de $K[X_\infty]$ alors G est l'intersection des groupes $G_m := V(I_{\leq m})$ et les $I_{\leq m}$ sont alors premier séparable. De plus par stabilité si chacun des groupes G_m est connexe alors G aussi. (Ce résultat est aussi une conséquence directe du fait que dans G, un générique topologique est un générique de groupes et réciproquement (3.1.21).)

Il suffit donc de montrer le résultat pour I idéal de $K[X_{\leq n}]$. On peut supposer $n = 0$ en remplaçant G par $\lambda_n(G)$.

Soit $H = \bar{V}(I)$. Comme I est absolument premier (3.1.16), H est un fermé irréductible dans le corps algébriquement clos $\bar{L}$. Donc H est connexe. De plus $G = H(L)$ et H est un groupe algébrique, donc G est connexe par (3.1.19). $\triangleleft$

Remarque. L'argument H est un groupe algébrique est essentiel dans la preuve précédente. En effet E. Bouscaren et F. Delon [BD1] ont donné un exemple de groupe dans L, λ_0-fermé irréductible mais non connexe.

Définition. Soit F un corps de caractéristique p.

Soit P un polynôme de $F[X_i;\ i \in I]$. On dit que P est un **p-polynôme** s'il est somme de monômes de la forme $a_{i,j}X_i^{p^j}$. Dans ce cas P est un **polynôme additif** c'est-à-dire $P((a_1+b_1),\ldots,(a_k+b_k)) = P(a_1,\ldots,a_k) + P(b_1,\ldots,b_k)$ pour tout $a_i, b_i \in F$.

On trouve dans [Hu 87] (chapitre VII 20) les résultats classiques suivants :

Fait 3.2.2. *Soit F algébriquement clos.*

i) Si $P \in F[(X_1,\ldots,X_k]$ est un polynôme additif sur $F^{\times k}$ alors P est un p-polynôme.

ii) Si $P \in F[(X_1,\ldots,X_k]$ est sans facteur carré et si l'ensemble des zéros de P est un sous-groupe de $(F^{\times k},+)$ alors P est un p-polynôme.

iii) Si G est un sous-groupe fermé connexe de $(F^{\times k},+)$ alors il existe un automorphisme ϕ de $(F^{\times k},+)$ défini par des p-polynômes tel que $\phi(G)$ est un sous-groupe vectoriel de $(F^{\times k},+)$. Ainsi G est une intersection des noyaux de p-polynômes.

iv) Si G est un sous-groupe fermé de $(F^{\times k},+)$ alors G est une intersection des noyaux de p-polynômes (exercice 7).

Nous allons en déduire la proposition suivante dans le cadre séparablement clos :

Proposition 3.2.3. *Si G est un sous-groupe définissable sur K de $(L^{\times k},+)$ alors il existe des p-polynômes $P_0,\ldots,P_l$ de $K[X_\infty]$ tel que $G = V(\{P_0,\ldots,P_l\})$.*

Remarque. Quand on a $G = V(\{P_0,\ldots,P_l\})$ alors $G = V(\{Q\})$ pour $Q = \sum_i P_i^{p^n} m_i$ tel que $p^{\nu n} \geq l+1$.

Pour la preuve de 3.2.3 on peut supposer que L est $|K|^+$-saturé (il suffit pour cela de se placer dans une extension élémentaire suffisamment saturée de L).

On décompose la preuve de cette proposition en trois lemmes :

Lemme 3.2.4. *La proposition est vraie pour G fini.*

$\triangleright$ Soient G un sous-groupe fini de $(L^{\times k},+)$ et n un entier tel que $p^{\nu n} \geq k$.

Soit $H = \lambda_n^{-1}(G \times \{0\}^{p^{\nu n}-k})$. Alors H est un sous-groupe fini de $(L,+)$ définissable sur K.

Soit $P(X) = \prod_{h \in H}(X-h)$. Comme H est définissable sur K et K est définissablement clos, les racines de P sont globalement fixé par tout automorphisme de L fixant K. Donc P est un polynôme de $K[X]$. En appliquant le deuxième point du fait 3.2.2 on en déduit que P est un p-polynôme. Soit $Q(X_0,\ldots,X_{k-1}) := P(X_0^{p^n}m_0+\ldots+X_{k-1}^{p^n}m_{k-1})$. Alors Q est un p-polynôme de $K[X_0,\ldots,X_{k-1}]$ et $G = V(Q)$. (Ici on utilise la notation décrite dans (3.1.2).) $\triangleleft$

Lemme 3.2.5. *Supposons $K \preccurlyeq L$.*

Soit G un sous-groupe λ_0-fermé sur K de $(L^{\times k}, +)$. Alors il existe des p-polynômes $P_1, \ldots, P_l$ de $K[X]$ tels que $G = V(\{P_1, \ldots, P_l\})$.

▷ Soit $\bar{G}$ la clôture de Zariski de G dans $\bar{L}^{\times k}$. Par (3.2.2 iv) il existe des p-polynômes $P_1, \ldots, P_l$ de $\bar{K}[X]$ tels que $\bar{G} = \bar{V}(\{P_1, \ldots, P_l\})$ (X est un k-uple). En élevant les P_i à une puissance p^m suffisante, on peut les supposer à coefficient dans K. D'où $G = \bar{G}(L) = V(\{P_1, \ldots, P_l\})$ (3.1.16). ◁

Lemme 3.2.6. *Supposons K seulement définissablement clos.*

Soit G un sous-groupe connexe λ_0-fermé sur K de $(L^{\times k}, +)$. Alors il existe des p-polynômes $P_1, \ldots, P_n$ de $K[\bar{X}]$ tels que $G = V(\{P_1, \ldots, P_n\})$.

De plus si g est un générique de G au-dessus de K tel que $g := (\bar{x}, y_1, \ldots, y_n)$ où $\bar{x}$ est une base de transcendance séparante de $K(g)$ au dessus de K, alors nous pouvons choisir les polynômes $P_1, \ldots, P_n$ tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $P_i \in K[\bar{X}, Y_1, \ldots, Y_i]$, P_i est unitaire et de degré minimal en Y_i, parmi les p-polynômes de $K^{sep}[\bar{X}, Y_1, \ldots, Y_i]$ de degré > 0 en Y_i et s'annulant en g, et pour tout $j < i$ $\deg_{Y_j}(P_i) < \deg_{Y_j}(P_j)$. Les polynômes P_i sont les uniques polynômes vérifiant les propriétés ci-dessus.

▷ Soit g réalisant le générique de G au-dessus de K (qui est stationnaire).

On peut supposer que $g := (\bar{x}, \bar{y})$ tel que $\bar{x}$ est une base de transcendance séparante de $K(g)$ au dessus de K. Soit $m = l(\bar{x})$ et $n = l(\bar{y})$. $(k = m + n)$.

Soit $\bar{G}$ la clôture de Zariski de G dans $\bar{L}^{\times k}$.

Par (3.1.16) g réalise le générique de $\bar{G}$ au-dessus de $\bar{K}$. Soit pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $g_i = (\bar{x}, y_1, \ldots, y_i)$ et $\bar{G}_i$ la projection de $\bar{G}$ sur $\bar{L}^{\times(m+i)}$.

Chaque g_i réalise donc le générique de $\bar{G}_i$. Par (3.2.2 iii), pour tout i, il existe un p-polynôme dans $\bar{K}[\bar{X}, Y_1, \ldots, Y_i]$ de degré ≥ 1 en Y_i s'annulant en g_i. On peut supposer ces p-polynômes à coefficient dans K^{sep} en les élevant à une puissance p^m suffisante.

On construit par récurrence sur i des p-polynômes $P_i \in K^{sep}[\bar{X}, Y_1, \ldots, Y_i]$ tels que $P_i(g_i) = 0$, P_i est unitaire et de degré minimal p^{n_i} en Y_i et tels que $\deg_{Y_j}(P_i) < \deg_{Y_j}(P_j)$ pour tout $j < i$.

Supposons que pour $i \leq n$, $P_1, \ldots, P_i$ sont définis. D'après ce qui précède, on peut choisir un p-polynôme $P'_{i+1} \in K^{sep}[\bar{X}, Y_1, \ldots, Y_{i+1}]$ unitaire, de degré minimal $p^{n_{i+1}}$ en Y_{i+1} tel que $P'_{i+1}(g_{i+1}) = 0$. Si $i = 0$ on prend $P_1 = P'_1$. Sinon, on abaisse successivement le degré en Y_i, puis en Y_{i-1},..., jusqu'en Y_1 tels que $\deg_{Y_j}(P_i) < \deg_{Y_j}(P_j)$ pour tout $j < i$. On utilise pour cela la technique suivante : si on a $P(X)$ un p-polynôme unitaire de degré p^m et $Q(X)$ un p-polynôme de degré $p^{m'}$ tel que $m' > m$ alors il existe un p-polynôme $Q'(X)$ tel que $\deg(Q') < \deg(Q)$ et tel que Q' et Q sont congrus modulo P. On remplace simplement dans Q, $X^{p^{m'}}$ par $(X^{p^m} - P(X))^{p^{m'-m}}$.

Après ces opérations on obtient un p-polynôme P_{i+1} vérifiant toutes les bonnes propriétés.

On a en fait construit ces polynômes P_i de telle manière qu'ils soient à coefficients dans K. En effet comme $\mathrm{tp}(g/K)$ est stationnaire, tout automorphisme σ de L fixant K point par point laisse fixe les P_i : soit $i \in \{1, \ldots, n\}$, comme P_i est unitaire en Y_i, on a $\sigma(P_i) - P_i$ de degré strictement plus petit en Y_i que P_i, il est donc nul en Y_i ; puis en utilisant les hypothèses $\deg_{Y_j}(P_i) < \deg_{Y_j}(P_j)$ pour tout $j < i$, on en déduit qu'il est nul en $Y_{i-1}, \ldots$, en Y_1 ; enfin comme $\bar{x}$ est transcendant, il est nul. Pour la même raison les polynômes P_i sont uniques.

Montrons maintenant que $G = V(\{P_1, \ldots, P_n\})$.

Par (3.2.5) il suffit de vérifier que pour tout Q p-polynôme de $K^{sep}[\bar{X}, \bar{Y}]$ tel que $Q(g) = 0$ alors $Q \in < P_1, \ldots, P_n >$.

Soit Q un p-polynôme. En utilisant la même méthode que pour la construction successive des P_i, on a $Q(\bar{X}, \bar{Y}) \equiv Q_0(\bar{X}) + Q_1(Y_1) + \ldots + Q_n(Y_n) \pmod{P_1, \ldots, P_n}$ avec $\deg(Q_i) < \deg_{Y_i}(P_i)$.

On en déduit que si $Q(g) = 0$ alors $Q_n = 0, \ldots, Q_1 = 0$, et $Q_0 = 0$. D'où $Q \in < P_1, \ldots, P_n >$. ◁

▷ **Preuve de la proposition 3.2.3**

Soit G un sous-groupe définissable sur K de $(L^{\times k}, +)$. Soit G^0 sa composante connexe. Alors G^0 est un sous-groupe définissable sur K et d'indice fini dans G (3.1.20). Par (3.1.18) et (3.1.15) les groupes G et G^0 sont des λ-fermés sur K. Pour un certain n, $H := \lambda_n(G)$ et $H^0 = \lambda_n(G^0)$ sont λ_0-fermés sur K.

Par (3.2.6) il existe $P_1, \ldots, P_l$ des p-polynômes de $K[X]$ (où X est un $k \cdot p^{\nu n}$-uple de variables) tels que $H^0 = V(\{P_1, \ldots, P_l\})$.

Soit ϕ le morphisme de $L^{\times k \cdot p^{\nu n}}$ dans $L^{\times l}$ qui à x associe $(P_1(x), \ldots, P_l(x))$. Alors $H^0 = \ker \phi$ et donc $\phi(H)$ est un sous-groupe fini de $(L^{\times l}, +)$ définissable sur K car H^0 est d'indice fini dans H. Il existe donc un polynôme Q dans $K[Y]$ tel que $\phi(H) = V(\{Q\})$ (3.2.4).

De plus $H = \phi^{-1}(\phi(H))$ car $\ker \phi \subseteq H$.

D'où $H = V(\{R\})$ avec $R(X) = Q(P_1(X), \ldots, P_l(X))$.

Soit Z un k-uple de variables. Alors $G = V(\{R(Z_{=n})\}$ car $G = \lambda_n^{-1}(H)$. ◁

Avec le lemme suivant on montre que l'idéal séparable correspondant au groupe G est en fait engendré par des p-polynômes.

Lemme 3.2.7. *Soit $S \subseteq K[X_\infty]$. Si S est un ensemble de p-polynômes alors $I(V(S), K)$ est engendré par des p-polynômes.*

▷ Soit P un polynôme de $K[X_{=n}]$. Il existe des $P_i \in K[X_{=n+1}]$ uniques tels que

$$P \equiv \sum_{i \in p^\nu} P_i^p m_i \ (\bmod\ I^0).$$

Il est simple de voir que si P est un p-polynôme les P_i aussi.

On peut donc supposer S clos par ce procédé. C'est à dire si $P \in S$ il existe $P_i \in S$ tel que $P \equiv \sum_{i \in p^\nu} P_i^p m_i \ (\bmod\ I^0)$.

L'idéal $I =< S \cup I^0 >$ est alors séparable.

En effet si $\sum_{i \in p^\nu} Q_i^p m_i \in I$ alors modulo I^0 cette somme est égale à une somme de termes $a \cdot P$ où $P \in S$ et $a \in K[X_\infty]$. On a

$$a \cdot P \equiv (\sum_{i \in p^\nu} a_i^p m_i) \cdot (\sum_{i \in p^\nu} P_i^p m_i)$$

avec les $P_i \in S$.

On en déduit qu'il existe des $b_{i,j} \in K[X_\infty]$ tels que

$$a \cdot P \equiv \sum_{i \in p^\nu} \left(\sum_{j \in p^\nu} b_{i,j} \cdot P_j \right)^p m_i.$$

Et donc chaque Q_i est dans $< S \cup I^0 >$.

Alors $I(V(S)) = I$ ("Nullstellensatz" 3.1.12 et 3.1.13). ◁

Remarque. Cette preuve ne montre pas que pour tout ensemble S de p-polynômes dans $K[X_{=n}]$, l'idéal $I(V(S), K)_{\leq n}$ est engendré par des p-polynômes.

Proposition 3.2.8. *Si G est un sous-groupe $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissable sur K de $(L^{\times k}, +)$ alors $I(G)$ est engendré par des p-polynômes de $K[X_\infty]$.*

▷ Par stabilité le groupe G est l'intersection de sous-groupes définissables sur K de $(L^{\times k}, +)$. On applique la proposition 3.2.3 à ces groupes et on en déduit qu'il existe $S \subseteq K[X_\infty]$ ensemble de p-polynômes tel que $G = V(S)$. On termine en appliquant le lemme 3.2.7. ◁

3.3 Structure de module d'un corps séparablement clos

Nous fixons toujours L un modèle de $T_{p,\nu}$ et K un sous-corps définissablement clos de L. De plus nous supposons L $|K|^+$-saturé.

P. Dellunde, F. Delon et F. Point [DDP] ont étudié la théorie de module des corps séparablement clos sur l'anneau des endomorphismes $\mathbb{F}_p(B)\{\alpha\}$ engendré par $\mathbb{F}_p(B)$ et le Frobénius α. Les auteurs ont axiomatisé cette théorie, montré qu'elle est complète et qu'elle admet l'élimination des quantificateurs dans le langage enrichi par des fonctions additives qui sont l'analogue des fonctions f_i du langage du corps.

Ici nous adoptons un point de vue différent. Nous étudions uniquement la structure de module de $(L, +)$ sur l'anneau $\mathrm{End}_K(L, +)$ de tous les endomorphismes définissables sur K. Même si $K = \mathbb{F}_p(B)$, cet anneau contient strictement $\mathbb{F}_p(B)\{\alpha\}$, par contre le langage enrichi par les fonctions additives [DDP] est alors $\emptyset$-interdéfinissable avec celui que nous considérons.

Nous montrons que l'anneau $\mathrm{End}_K(L, +)$ correspond à l'ensemble des p-polynômes de $K[X_\infty]$ quotienté par I^0 (3.3.1). Ceci nous permet de déduire directement l'élimination des quantificateurs dans ce langage (3.3.4) et de plus de montrer que si K est séparablement clos (c'est-à-dire si K est une sous-structure élémentaire de L), la structure induite d'un sous-groupe additif 1-basé dans la structure de corps L au-dessus de K, est la même que la structure induite dans la structure réduite de module (3.3.5).

3.3.1 Endomorphismes du groupe additif

Nous allons décrire l'anneau $\mathrm{End}_K((L,+))$ des endomorphismes de $(L,+)$ définissables au-dessus de K. Pour cela nous considérons ces endomorphismes comme agissant à gauche sur L.

Cet anneau contient naturellement le Frobenius que l'on note α, les f_i et toutes les homothéties de rapport dans K que nous appellerons ensuite les endomorphismes scalaires. Nous allons montrer qu'il est engendré en fait par ces endomorphismes.

Notons pour l'instant $K\{\alpha,(f_i)_{i\in p^\nu}\}$ le sous-anneau de $\mathrm{End}_K((L,+))$ engendré par les endomorphismes ci-dessus (Frobenius, f_i et homothéties) et $K\{\alpha\}$ le sous-anneau de $K\{\alpha,(f_i)_{i\in p^\nu}\}$ engendré par le Frobenius et les homothéties de rapport dans K. On a évidemment les relations suivantes dans $K\{\alpha,(f_i)_{i\in p^\nu}\}$:

1. $\alpha\cdot a = a^p\cdot\alpha$ pour $a\in K$.
2. $f_i\cdot m_i\cdot\alpha = 1$ et $f_i\cdot m_j\cdot\alpha = 0$ pour $i,j\in p^\nu, i\neq j$.
3. $f_i\cdot a = \displaystyle\sum_{j,l\in p^\nu;\ l+j\equiv i\ (p)} a_l\cdot\left(m_l m_j m_i^{-1}\right)^{1/p}\cdot f_j$ pour $i\in p^\nu$ et $a\in K$.
4. $\displaystyle\sum_{i\in p^\nu} m_i\cdot\alpha\cdot f_i = 1.$

Avec ces relations on peut montrer simplement par induction que tout élément de $K\{\alpha,(f_i)_{i\in p^\nu}\}$ s'écrit pour tout n assez grand sous la forme

$$\sum_{i\in(p^\nu)^n}\left(\sum_j a_{i,j}\cdot\alpha^j\right)\cdot f_i.$$

Nous avons donc les relations suivantes :

5. pour tout $r\in K\{\alpha,(f_i)_{i\in p^\nu}\}$ il existe N tel que pour tout $n\geq N$ et $i\in p^{\nu n}$, $r_i = r\cdot m_i\cdot\alpha^n\in K\{\alpha\}$ et $r=\sum_{i\in(p^\nu)^n} r_i\cdot f_i$.

Définition. En utilisant la relation 1, on montre que tout élément $r\in K\{\alpha\}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{j\in\omega} a_j\alpha^j$ où tous les a_j sauf un nombre fini sont nuls. On peut donc lui associer le p-polynôme de $K[X]$,

$$P_r = \sum_{j\in\omega} a_j x^{p^j},$$

ainsi on a $r\cdot x = P_r(x)$ pour tout $x\in L$. Inversement, à un p-polynôme P de $K[X]$ on peut associer l'unique endomorphisme r_P dans $K\{\alpha\}$ tel que $P_{r_P}=P$.

De même à tout p-polynôme $P=\sum_{i\in p^\infty} P_i(X_i)$ de $K[X_\infty]$, on peut associer un endomorphisme r_P de $K\{\alpha,(f_i)_{i\in p^\nu}\}$ défini par

$$r_P = \sum_{i\in p^\infty} r_{P_i}\cdot f_i.$$

Alors évidemment pour tout $x\in L$, $r_P\cdot x = P(x)$.

Le théorème suivant montre que tout élément de $\mathrm{End}_K((L,+))$ s'écrit de manière unique sous la forme r_P pour un P p-polynôme appartenant à $K[X_{=n}]$.

Théorème 3.3.1. *L'anneau des endomorphismes de $(L,+)$ définissables sur K est engendré par les endomorphismes scalaires dans K, les endomorphismes f_i et le Frobénius :*

$$\mathrm{End}_K((L,+)) = K\{\alpha, (f_i)_{i\in p^\nu}\}.$$

Plus précisément

$$\begin{aligned}\mathrm{End}_K((L,+)) &= \cup_{n\in\omega}\{r_P; P \text{ } p\text{-polynôme de } K[X_{=n}]\}\\ &= \{r_P; P \text{ } p\text{-polynôme de } K[X_\infty]\}.\end{aligned}$$

On a l'unicité suivante : si $r_P = r_Q$ pour P et Q des p-polynômes de $K[X_{=n}]$ alors $P = Q$. Plus généralement si $r_P = r_Q$ pour P et Q des p-polynômes de $K[X_\infty]$ alors $P - Q \in I^0$.

Ainsi par la relation 4 pour tout $r \in \mathrm{End}_K((L,+))$, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, il existe un unique p-polynôme de $K[X_{=n}]$, que l'on note $P_{r,n}$, qui vérifie $r = r_{P_{r,n}}$.

Enfin l'anneau des endomorphismes du groupe $(L^{\times m},+)$ définissables sur K est l'anneau $\mathcal{M}_{m,m}(\mathrm{End}_K((L,+)))$ des matrices sur $\mathrm{End}_K((L,+))$.

$\triangleright$ Soit g un endomorphisme de $(L,+)$ définissable sur K. En tant qu'application définissable on sait par compacité qu'il existe un entier n, des ensembles définissables sur K, $D_1,\ldots,D_n$, recouvrant L tels que $g_{|D_i} = P_i/Q_i$ où $P_i, Q_i \in K[X_\infty]$ et $Q_i \neq 0$ sur D_i (car pour tout $a \in L$, $\mathrm{dcl}(K\cup\{a\}) = K(a_\infty)$ (3.1.4)). Il existe donc m tel que l'on peut supposer $P_i, Q_i \in K[X_{=m}]$ et D_i défini par $(R_i \neq 0) \wedge (S_i = 0)$ avec R_i et S_i dans $K[X_{=m}]$.

Pour tout $j \in (p^\nu)^m$ on définit $g_j = g \circ m_j \circ \alpha^m$ (c'est-à-dire $g_j(x) = g(m_j.x^{p^m})$).

Comme g est un endomorphisme,

$$g = \sum_{j\in(p^\nu)^m} g_j \circ f_j.$$

Les g_j sont aussi des endomorphismes de $(L,+)$.

Pour tout polynôme T de $K[X_{=m}]$ et tout $j \in (p^\nu)^m$ on définit

$$T^j(X_j) := T(0,.,0,X_j,0,..,0)$$

tel que dans la deuxième expression X_j se trouve à la j-ième place.

Soit D_i^j défini par $(R_i^j \neq 0) \wedge (S_i^j = 0)$, $D_i^j := D_i \cap (0 \times \ldots \times 0 \times L \times 0 \times \ldots \times 0)$.

Alors $g_{j|D_i^j} = P_i^j/Q_i^j$ et chaque g_j est donné par une fraction rationnelle de $K(X_j)$ sur un ensemble cofini de L.

Par conséquent chaque g_j est égal à un polynôme P_j de $K[X_j]$ additif sur L. Chaque g_j est donc un p-polynôme.

Donc g est égal à un p-polynôme P de $K[X_{=m}]$, c'est à dire $g = r_P$.

Montrons l'unicité : soit P un p-polynôme de $K[X_{=n}]$ tel que $r_P = 0$. Par les relations 5, pour tout $i \in p^{\nu n}$, $r_{P_i} = r_P \cdot m_i \cdot \alpha^n = 0$. D'où $P_i = 0$ et donc $P = 0$.

Si P est un p-polynôme de $K[X_\infty]$, en faisant des changements de variables du type X_j remplacé par $\sum_{i \in p^\nu} m_i X^p_{j\frown i}$, on obtient un p-polynôme P' de $K[X_{=n}]$ congru à P modulo I^0. Ces changements de variables reviennent à remplacer dans $\mathrm{End}_K((L,+))$, $r_{P_j} \cdot f_j$ par $r_{P_j} \cdot (\sum_{i \in p^\nu} m_i \cdot \alpha \cdot f_{j\frown i})$. On a donc $r_P = r_{P'}$. On en déduit avec le résultat précédent que si $r_P = 0$, $P \in I_0$. $\triangleleft$

Le corollaire suivant permet de montrer que L n'a pas de sous-module définissable (3.3.9).

Corollaire 3.3.2. $\mathrm{End}_K((L,+))$ *n'a pas d'idéal bilatère non trivial.*

$\triangleright$ Soit r un endomorphisme dans $\mathrm{End}_K((L,+))$ différent de 0. On montre que l'idéal bilatère $< r >$ engendré par r est tout $\mathrm{End}_K((L,+))$.

Par (3.3.1) et les relations 5, il existe n tel que pour tout $i \in p^{\nu n}$, $r \cdot m_i \cdot \alpha^n \in K\{\alpha\}$. Comme $r = \sum_{i \in p^{\nu n}} r \cdot m_i \cdot \alpha^n \cdot f_i$, il existe dans $< r >$ un élément non nul de $K\{\alpha\}$ qui s'écrit $\sum_j a_j \alpha^j = P(\alpha)$ où $P \in K[X]$.

On fait maintenant une induction sur le degré de P. Si P est de degré 0, il est évident que $1 \in < P(\alpha) >$.

Si $\deg(P) = m + 1$ alors il y a deux possibilités :
Ou bien $P(X) = Q(X) \cdot X$. Il existe $l \in p^\nu$ tel $f_l \cdot P(\alpha) \neq 0$ d'après la relation 4. Alors :

$$f_l \cdot P(\alpha) = \sum_{j>0} \left(\sum_{i \in p^\nu} b_{j,i} f_i \alpha^j \right) = \sum_{j>0} b_{j,0} \alpha^{j-1} = R(\alpha).$$

Le p-polynôme R de $K[X]$ est non nul et de degré strictement inférieur à celui de P.

Ou bien en multipliant par un élément de K on peut supposer $P = 1 + Q(X)$ avec $Q \neq 0$. On multiplie encore par f_i à gauche tel que $f_i \cdot Q(\alpha) \neq 0$. On obtient alors un élément qui s'écrit $f_i + S(\alpha)$ avec $0 \leq \deg(S) < \deg(P)$. On choisit $l \neq i$ et on multiplie à droite par $m_l \cdot \alpha$ pour supprimer f_i. On obtient alors un polynôme de degré au plus celui de P mais qui se factorise par X. On applique le premier cas pour terminer. $\triangleleft$

3.3.2 Structure de $\mathrm{End}_K((L,+))$-module sur $(L,+)$

Nous nous intéressons aux rapports entre la structure de corps L au-dessus de K et la structure réduite de module sur l'anneau $\mathrm{End}_K((L,+))$. Notons $L_{K\text{-mod}}$ la structure de $\mathrm{End}_K((L,+))$-module sur $(L,+)$.

En utilisant la proposition 3.2.3 nous montrons :

Proposition 3.3.3. *Tout sous-groupe de $(L^{\times k},+)$ définissable sur K dans la structure de corps L est définissable sur $\emptyset$ dans la structure de module $L_{K\text{-mod}}$ par une formule atomique (et par stabilité tout sous-groupe de $(L^{\times k},+)$ $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissable sur K dans la structure de corps L est $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissable sur $\emptyset$ dans la structure de module $L_{K\text{-mod}}$).*

$\triangleright$ Soit G un sous-groupe de $(L^{\times k}, +)$ définissable sur K dans L.
Par (3.2.3), il existe un p-polynôme P dans $K[X_{1,\infty}, \dots, X_{k,\infty}]$ tel que $G = V(\{P\})$.
Alors $P = \sum_{j=1}^{k} P_j[X_{j,\infty}]$.
Le groupe G est donc défini dans la structure de module $L_{K\text{-mod}}$ par

$$\sum_{j=1}^{k} r_{P_j}(x_j) = 0.$$

$\triangleleft$

Corollaire 3.3.4. *La structure de module $L_{K\text{-mod}}$ a l'élimination des quantificateurs.*

$\triangleright$ Dans un module, tout ensemble définissable (sur vide) est combinaison booléenne d'ensembles définissables (sur vide) par une *pp*-formule [Zi 84]. Dans la structure $L_{K\text{-mod}}$, un ensemble $\emptyset$-définissable par une *pp*- formule est de la forme $\bar{a} + G$ où $\bar{a} \in K$ et G est un groupe K- définissable dans la structure de corps L. Par (3.3.3), G est défini par une formule atomique dans la structure de module $L_{K\text{-mod}}$ et donc $\bar{a} + G$ aussi. $\triangleleft$

Corollaire 3.3.5. *Supposons K séparablement clos (c'est-à-dire $K \preccurlyeq L$).*
Soit G un sous-groupe 1*-basé de $(L^{\times k}, +)$ $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissable sur K dans L. Alors la structure induite sur G par la structure de corps L au-dessus de K est identique à celle induite par la structure de module $L_{K\text{-mod}}$ au-dessus du vide. De plus tout relativement définissable (à paramètres quelconques) de G dans la structure de corps L est relativement définissable dans la structure de module $L_{K\text{-mod}}$.*

$\triangleright$ Tout partie de $L^{\times k}$ définissable sur $\mathrm{acl}^{eq}(K)$ dans la structure de corps L est en fait définissable sur K car K est une sous-structure élémentaire de L.

Un ensemble relativement définissable D de G^n dans la structure de corps L est combinaison booléenne de translatés T de sous-groupes de G^n relativement définissables sur K (1.3.2). Par (3.3.3), D est relativement définissable dans la structure de module $L_{K\text{-mod}}$.

De plus, si D est relativement définissable sur K dans la structure de corps L, alors par (1.3.2), chaque translaté T est relativement définissables sur K dans L. Or un tel translaté T est nécessairement de la forme $\bar{a} + H$ où $\bar{a} \in K$, car K est un modèle. Ces translatés sont alors $\emptyset$-définissable dans la structure de module $L_{K\text{-mod}}$ (3.3.3). $\triangleleft$

Pour $K = \mathbb{F}_p(B)$, nous avons retrouvé le résultat d'élimination des quantificateurs (3.3.4) démontré par P. Dellunde, F. Delon et F. Point pour leur théorie de $\mathbb{F}_p(B)\{\alpha\}$-module enrichie par les f_i. Voici leur résultat principal :

Théorème 3.3.6. *[DDP] Soit $\mathcal{L}_K = \mathcal{L}_{K\{\alpha\}} \cup \{f_i, i \in p^\nu\}$*
Soit T_K la $\mathcal{L}_K$ théorie suivante :
1. *axiomes de $K\{\alpha\}$-modules à gauche.*
2. *$\forall x \exists^{=\deg(P_r)} y,\ r \cdot y = x$, pour tout r dans $K\{\alpha\}$ tel que P_r est séparable.*
3. *$\forall x\ x = \sum_{i \in p^\nu} m_i \cdot \alpha \cdot f_i(x)$.*
4. *$\forall x \forall (x_i)_{i \in p^\nu} \Big(x = \sum_{i \in p^\nu} m_i \cdot \alpha \cdot x_i \rightarrow \wedge_i x_i = f_i(x) \Big)$.*

Alors T_K est complète, élimine les quantificateurs et a pour modèle premier K^{sep}.

Remarque. Dans [DDP] cette preuve est faite pour $K = \mathbb{F}_p(B)$ mais les auteurs utilisent seulement le fait que K contient B et est clos par les f_i.

On peut traduire ce théorème dans le langage de $\mathrm{End}_K((L,+))$-module. Les axiomes 3 et 4 sont inclus dans les axiomes de $\mathrm{End}_K((L,+))$-module à gauche :

Corollaire 3.3.7. *La théorie de $L_{K\text{-}mod}$ a l'élimination des quantificateurs, a pour modèle premier K^{sep} et est axiomatisé par :*

1. *axiomes de* $\mathrm{End}_K((L,+))$*-modules à gauche.*
2. $\forall x \exists^{=\deg(P_r)} y,\ r \cdot y = x$*, pour tout r dans $K\{\alpha\}$ tel que P_r est séparable.*

Définition. Pour toute partie A de L, on définit l'idéal à gauche de $\mathrm{End}_K((L,+))$,

$$\mathrm{Ann}(A) := \{r \in \mathrm{End}_K((L,+)); r \cdot a = 0 \text{ pour tout } a \in A\}.$$

Pour J un idéal à gauche de $\mathrm{End}_K((L,+))$, on désigne par $< S(J) >$ l'idéal de $K[X_\infty]$ engendré par $S(J) := \{P \in K[X_\infty]; P\ \ p\text{-polynôme et } r_P \in J\}$.

Remarque 3.3.8. $< S(J) >$ est un idéal séparable contenant I^0.

Il suffit d'utiliser la preuve de (3.2.7) avec $S(J)$. Alors $S(J)$ contient I^0. D'autre part pour tout $P \in S$ et P_i p-polynômes, tels que $P \equiv \sum_{i \in p^\nu} P_i^p m_i \pmod{I^0}$, les P_i sont dans $S(J)$ car alors $r_P = \sum_{i \in p^\nu} m_i \cdot \alpha \cdot r_{P_i}$ et $r_{P_i} = f_i \circ r_P$.

Proposition 3.3.9. *Pour tout sous-groupe G de $(L,+)$ $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissable sur K dans L,*

$$G = \{x \in L; r \cdot x = 0, \text{ pour tout } r \in \mathrm{Ann}(G)\} \text{ et } I(G,K) =< S(\mathrm{Ann}(G)) > .$$

Donc $L_{K\text{-}mod}$ n'a pas de sous-module $\emptyset$-définissable non trivial.

▷ Par (3.2.8), $I(G,K) =< S(\mathrm{Ann}(G)) >$ et donc $G = V(S(\mathrm{Ann}(G)))\}$.

Soit M un sous-module $\emptyset$-définissable de $L_{K\text{-mod}}$. Alors $\mathrm{Ann}(M)$ est un idéal bilatère de $\mathrm{End}_K((L,+))$. D'après (3.3.2) cet idéal est trivial ; M est donc trivial. ◁

3.4 Endomorphismes de sous-groupes minimaux du groupe additif

Nous rappelons que L est un modèle fixé de $T_{p,\nu}$ et K un sous-corps définissablement clos de L. De plus nous supposons L $|K|^+$-saturé. Nous étudions dans ce qui suit les endomorphismes définissables sur K de sous-groupes additifs définissables sur K. En fait, les classes d'exemples de sous-groupes minimaux que nous considérons sont définissables sur $\emptyset$ (c'est-à-dire sur $\mathbb{F}_p(B)$). Donc pour les exemples localement modulaires, les endomorphismes sont définissables sur $\mathbb{F}_p(B)^{sep}$ (1.3.2 iv). Nous notons toujours α le Frobénius.

Nous montrons dans cette section que tout endomorphisme définissable d'un sous-groupe du groupe additif est la restriction d'un endomorphisme du groupe additif lui-même (3.4.7). Nous montrons aussi que pour tout sous-groupe minimal additif G non isomorphe à $(L^{p^\infty}, +)$ (en particulier pour tout sous-groupe localement modulaire), il existe un entier $n > 0$ tel que le corps $K \cap \mathrm{End}_K(G)$ des endomorphismes-homothéties scalaires de G est égal à $\mathbb{F}_{p^n}$ (3.4.8).

Nous remarquons dans le paragraphe 3.4.4 suivant qu'il existe un nombre arbitraire des sous-groupes additifs minimaux deux à deux orthogonaux et que les sous-groupes additfs minimaux témoignent de la DOP.

Nous étudions ensuite les anneaux d'endomorphismes de certains sous-groupes minimaux additifs localement modulaires : nous montrons que la locale modularité d'un sous-groupe minimal ne se voit pas sur l'anneau des endomorphismes (3.4.24) (alors que nous verrons dans la section suivante qu'elle se voit sur le corps des quasi-endomorphismes). En effet il existe des sous-groupes minimaux localement modulaires dont l'anneau des endomorphismes est réduit à $\mathbb{F}_p$ (3.4.23) et nous donnons un exemple de sous-groupe minimal non localement modulaire ayant aussi comme anneau des endomorphismes $\mathbb{F}_p$ (3.4.3).

3.4.1 Deux exemples de sous-groupes additifs minimaux non localement modulaires

Nous savons que tout sous-groupe minimal du groupe additif non localement modulaire est définissablement isogène à $(L^{p^\infty}, +)$ (3.1.25). E. Bouscaren et F. Delon [BD2] ont donné un exemple de groupe minimal définissablement isogène mais non définissablement isomorphe à $(L^{p^\infty}, +)$.

Nous montrons que l'anneau des endomorphismes définissables sur K de cet exemple est réduit à $\mathbb{F}_p$ alors que celui de $(L^{p^\infty}, +)$ est égal à l'anneau des endomorphismes définissables sur K^{p^∞} de $(L^{p^\infty}, +)$ dans sa structure de pur corps algébriquement clos.

Commençons par L^{p^∞} :

Proposition 3.4.1. *Les endomorphismes de $(L^{p^\infty}, +)$ définissables sur K sont de la forme $r_P \cdot \alpha^{-n}$ où P est un p-polynôme de $K^{p^\infty}[X]$. L'anneau de ces endomorphismes est donc égal à $K^{p^\infty}\{\alpha, \alpha^{-1}\}$.*

$\triangleright$ Soit $f : (L^{p^\infty}, +) \to (L^{p^\infty}, +)$ un endomorphisme K-définissable. Par compacité il existe un entier m et un homomorphisme $\tilde{f} : (L^{p^m}, +) \to (L, +)$ définissable sur K tels que $f = \tilde{f}$ sur L^{p^∞}.

A nouveau par compacité et (3.1.4), il existe un recouvrement fini de L^{p^m} par des parties $D_1, \ldots, D_l$ définissables sur K et des fractions rationnelles $R_1, \ldots, R_l \in K(X_{=n})$ tels que $\tilde{f}(x) = R_i(x_{=n})$ pour tout $x \in D_i$.

Soient $C_i = D_i \cap L^{p^\infty}$. Les C_i sont alors définissables sur $K \cap L^{p^\infty} = K^{p^\infty}$ dans la structure L^{p^∞} (3.1.6).

Maintenant sur L^{p^∞}, $x_{=n} = (\alpha^{-n}(x), 0, \ldots, 0)$. En posant donc $g = f \cdot \alpha^n$, on obtient pour tout i, $g(x) = R'_i(x) = R_i(x, 0, \ldots, 0)$ sur $C'_i = \alpha^{-n}(C_i)$.

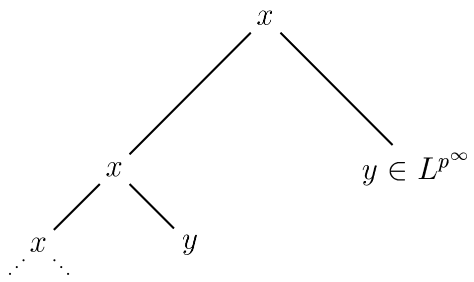
Donc g est égal à l'une des fractions rationnelles R'_i qui est alors un p-polynôme à paramètres dans K. Il est évidemment à paramètres dans L^{p^∞} et donc dans K^{p^∞}. $\triangleleft$

En fait cette preuve est l'analogue de celle qui montre le même résultat pour un pur corps algébriquement clos. On pourrait aussi d'ailleurs l'en déduire en utilisant (3.1.6) :

Fait 3.4.2. *Soient F un corps algébriquement clos et F_0 un sous-corps parfait de F. Alors l'anneau des endomorphismes définissables sur F_0 de $(F,+)$ est $F_0\{\alpha,\alpha^{-1}\}$.*

Remarque. Sur L^{p^∞}, $\alpha^{-1} = f_0$ (où $0 = (0,\dots,0) \in p^\nu$) et donc tout endomorphisme de $(L^{p^\infty},+)$ définissable est restriction d'un endomorphisme de $(L,+)$ définissable. Nous allons montrer dans la partie suivante que ce résultat est vrai pour tout sous-groupe connexe définissable de $(L,+)$.

Étudions maintenant l'anneau des endomorphismes de l'exemple donné dans [BD2]. Ce groupe est $G := \{x;\ \exists y \in L^{p^\infty},\ x = x^p + by^p\}$ avec $b \in K - K^p$. On peut supposer $b = b_0$ le premier élément de la p-base.



Groupe G

Pour démontrer que le groupe G n'est pas isomorphe à L^{p^∞}, E. Bouscaren et F. Delon montrent en particulier que pour tout homomorphisme ϕ du groupe $(G,+)$ dans $(L,+)$ définissable sur K, il existe m tel que $\alpha^m \circ \phi$ est égal à un p-polynôme de $K[X]$. Nous allons en déduire que G a très peu d'endomorphismes définissables.

Proposition 3.4.3. *L'anneau des endomorphismes de G définissables sur K est réduit à $\mathbb{F}_p$.*

$\triangleright$ On note $0 = (0,\dots,0)$, $1 = (1,0,\dots,0)$ et $p-1 = (p-1,0,\dots,0)$, ces trois éléments de p^ν (voir notations 3.1.2) et on note $b = b_0$ le premier élément de la p-base.

Ainsi pour tout $x \in L$,

$$x = x_0^p + x_1^p b + \dots + x_{p-1}^p b^{p-1} + \sum_{p \le i < p^\nu} x_i m_i$$

et donc

$$G = \{x;\ x_0 = x,\ x_1 \in L^{p^\infty},\ x_i = 0 \text{ pour tous les autres } i \in p^\nu\}$$

Pour $x \in G$ on note $y := x_1$.

Soit ϕ un endomorphisme de G définissable sur K. Par [BD2], il existe un entier m et un p-polynôme P_0 de $K[X]$ tel que $\alpha^m \circ \phi = P_0$.

Nous allons montrer par récurrence sur $l \leq m$ que pour tout $x \in G$,

$$\alpha^{m-l} \circ \phi(x) = P_l(x) + \sum_{j=1}^{l} c_j y^{p^{1-j}}$$

où P_l est un p-polynôme de $K[X]$ et les $c_j \in K$.

Ce résultat est vrai pour $l = 0$ et s'il est vrai pour un $l < m$, alors pour tout $x \in G$,

$$\begin{aligned}
\alpha^{m-l-1} \circ \phi(x) &= f_0(\alpha^{m-l} \circ \phi(x)) \\
&= f_0(P_l(x) + \sum_{j=1}^{l} c_j y^{p^{1-j}}) \\
&= f_0(\sum_{j \geq 0} a_j x^{p^j} + \sum_{j=1}^{l} c_j y^{p^{1-j}})
\end{aligned}$$

Or

$$a_0 x = (a_{0,0}^p + \ldots + a_{0,p-1}^p b^{p-1} + \ldots)(x^p + by^p) = (a_{0,0}x + a_{0,p-1}by)^p + \ldots$$

(Ici, $a_{0,0} = f_0(a_0)$ et $a_{0,p-1} = f_{p-1}(a_0)$.)

Donc $f_0(a_0 x) = a_{0,0}x + a_{0,p-1}by$.

Pour tout $j > 0$,

$$f_0(a_j x^{p^j}) = f_0((a_{j,0} x^{p^{j-1}})^p + \ldots) = a_{j,0} x^{p^{j-1}}.$$

De plus comme $y \in L^{p^\infty}$, pour tout $j \in \{1, \ldots, l\}$,

$$f_0(c_j y^{p^{1-j}}) = f_0((c_{j,0} y^{p^{-j}})^p + \ldots) = c_{j,0} y^{p^{-j}}.$$

Donc

$$\alpha^{m-l-1} \circ \phi(x) = a_{0,0}x + a_{0,p-1}by + \sum_{j>0} a_{j,0} x^{p^{j-1}} + \sum_{j=1}^{l} c_{j,0} y^{p^{-j}}.$$

Pour $l = m$, il existe donc a_j et c_j dans K tel que tout $x \in G$,

$$\phi(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^{p^j} + \sum_{j=1}^{m} c_j y^{p^{1-j}}.$$

Alors, pour les mêmes raisons que précédemment, pour tout $x \in G$,

$$f_0 \circ \phi(x) = a_{0,0}x + a_{0,p-1}by + \sum_{j=1}^{n} a_{j,0} x^{p^{j-1}} + \sum_{j=1}^{m} c_{j,0} y^{p^{-j}}.$$

Par ailleurs pour tout $x \in G$ $f_0 \circ \phi(x) = \phi(x)$ puisque ϕ est un endomorphisme de G. On a donc l'égalité suivante sur G :

$$(1) \quad \sum_{j=0}^{n} a_j x^{p^j} + \sum_{j=1}^{m} c_j y^{p^{1-j}} = a_{0,0}x + \sum_{j=1}^{n} a_{j,0} x^{p^{j-1}} + a_{0,p-1}by + \sum_{j=1}^{m} c_{j,0} y^{p^{-j}}.$$

On peut remarquer que si une équation sur G du type suivant,

$$\sum_{j=0}^{l} d_j x^{p^j} + \sum_{j=0}^{r} e_j y^{p^{-j}} = 0,$$

a une infinité de solutions alors les coefficients d_j et e_j sont tous nuls. (Pour cela il suffit d'élever à la puissance p^{r+1} et de remplacer y^p par $(x - x^p)/b$.)

Par (1) les a_j sont nuls pour $j \geq 1$. Nous pouvons donc supposer $n = 0$. On obtient de plus les égalités suivantes : $a_0 = a_{0,0}$, $c_1 = a_{0,p-1} \cdot b$, $c_j = c_{j-1,0}$ pour $1 < j \leq m$ et $c_{m,0} = 0$.

Par ailleurs pour tout $i \neq 0,\ 1$, et $x \in G$,

$$f_i \circ \phi(x) = 0 = a_{0,i}x + \text{termes en } y,\ y^{p^{-1}},\ y^{p^{-m}}.$$

D'où $a_{0,i} = 0$ pour tout $i \neq 0,\ 1$.

En supposant maintenant $p \neq 2$, on peut conclure rapidement : en effet $p - 1 \neq 1$ d'où $a_{0,p-1} = 0$ et donc tous les c_j sont nuls.

Par conséquent, on a montré dans ce cas que pour tout $x \in G$, $\phi(x) = a_0 x$ avec $a = a_{0,0}$ et $a_{0,i} = 0$ pour tout $i \neq 0,\ 1$. Un tel homomorphisme correspond à la multiplication par un élément de $\mathbb{F}_p$. En effet pour tout $x \in G$,

$$\phi(x) = a_0 x = (a_{0,0}^p + ba_{0,1}^p)(x^p + by^p) = (a_{0,0}x)^p + b(a_{0,0}y + a_{0,1}x)^p + b^2(a_{0,1}y)^p.$$

Comme $p \neq 2$, $a_{0,1} = 0$ et donc $a_0 = a_0^p$.

En général, sans supposer $p \neq 2$, on a $f_1(\phi(x)) \in L^{p^\infty}$. C'est à dire pour tout $x \in G$,

$$a_{0,1}x + a_{0,0}y + \sum_{j=1}^{m} c_{j,1} y^{p^{-j}} \in L^{p^\infty}.$$

D'où $a_{0,1} \in L^{p^\infty}$ car $1 \in G$. Ainsi pour tout $i \in p^{\nu n}$ non nul, en composant par f_i, alors $a_{0,0\frown i} = 0$ et pour tout j, $c_{j,1\frown i} = 0$. D'où $a_{0,1}$, $a_{0,0}$ et les $c_{j,1}$ sont dans L^{p^∞}. Par conséquent, $a_{0,1}$ est nul sinon on aurait $G \subseteq L^{p^\infty}$. On a donc $a_{0,i}$ nul pour tout $i \neq 0$, donc d'après les résultats venant de (1), les c_i sont nuls et $a_0 = a_0^p$. D'où $\phi(x) = a_0 x$ avec $a_0 \in \mathbb{F}_p$. $\lhd$

3.4.2 Endomorphismes de sous-groupes additifs

Après ces deux exemples nous allons montrer que tout endomorphisme d'un sous-groupe connexe définissable de $(L,+)$ est restriction d'un endomorphisme de $(L,+)$.

Proposition 3.4.4. *Soient G un sous-groupe de $(L,+)$, définissable sur K et connexe, et ϕ un homomorphisme de G dans $(L,+)$ définissable sur K. Alors il existe ψ un endomorphisme de $(L,+)$ définissable sur K (et donc défini par un p-polynôme de $K[X_\infty]$) qui prolonge ϕ.*

Remarque. Par (3.3.3) la proposition (3.4.4) est équivalente à la proposition suivante : soit G un sous-groupe de $(L,+)$ définissable sur $\emptyset$ dans la structure de module $L_{K\text{-mod}}$. Alors tout homomorphisme de G dans $(L,+)$ définissable sur $\emptyset$ dans la structure de module $L_{K\text{-mod}}$ est restriction d'un endomorphisme de $(L,+)$ définissable sur $\emptyset$ dans la structure de module $L_{K\text{-mod}}$.

Pour démontrer la proposition 3.4.4, nous allons plonger G dans $\bar{L}$ et nous utiliserons alors les deux lemmes suivants, le premier étant l'analogue de cette proposition dans le cas des corps algébriquement clos et le second portant sur le prolongement des homomorphismes définis génériquement dans une structure stable.

Lemme 3.4.5. *Soient F un corps algébriquement clos et F_0 un sous-corps algébriquement clos de F.*

Soient G un sous-groupe connexe de $(F^{\times k},+)$ définissable sur F_0 et ϕ un homomorphisme définissable sur F_0 de G sur un sous-groupe H de $(F^{\times k'},+)$. Alors il existe un homomorphisme ψ de $F^{\times k}$ dans H prolongeant ϕ et encore définissable sur F_0.

$\triangleright$ Par (3.2.2) il existe un entier l et un automorphisme β de $(F^{\times k},+)$ qui envoie G sur $F^{\times l}\times\{0\}^{k-l}$ et qui est définissable sur F_0 (en fait cet automorphisme et son inverse sont définis par des p-polynômes sur $F_0[X_1,\dots,X_k]$, c'est-à-dire $\beta(\bar{x})=(P_1(\bar{x}),\dots,P_k(\bar{x}))$ et $\beta^{-1}(\bar{x})=(Q_1(\bar{x}),\dots,Q_k(\bar{x}))$).

Soit $\gamma:=\beta^{-1}$. Alors $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_k)$ et $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_k)$ tels que les β_i et les γ_i sont des homomorphismes de $(F^{\times k},+)$ dans $(F,+)$ définissables sur F_0. Soit

$$\psi(\bar{x}):=\phi\left(\gamma_1\left(\beta_1(\bar{x}),\dots,\beta_k(\bar{x}),0,\dots,0\right),\dots,\gamma_k\left(\beta_1(\bar{x}),\dots,\beta_k(\bar{x}),0,\dots,0\right)\right).$$

Alors ψ est un homomorphisme de $F^{\times k}$ dans $\phi(G)$ qui prolonge ϕ et est définissable sur F_0. $\triangleleft$

Lemme 3.4.6. *Soient N une structure stable saturée et $M\preccurlyeq N$, $|M|<|N|$.*

Soient G et H deux groupes définissables sur M dans N. Supposons G connexe et p son type générique.

Soit $\Gamma\subseteq G\times H$ le graphe d'une fonction de G dans H définissable sur M (non nécessairement définie sur tout G). Supposons que Γ définit génériquement un homomorphisme de G dans H. C'est à dire $\Gamma\cap(p(N)\times H)$ est le graphe d'une application ϕ de $p(N)$ dans H telle que pour tous g,g' indépendants réalisant p , $\phi(g^{-1})=\phi(g)^{-1}$ et $\phi(gg')=\phi(g)\phi(g')$.

Alors il existe ψ un homomorphisme définissable sur M de G dans H qui prolonge ϕ.

▷ Soient $a \in G$ et g, g' deux génériques de G tels que a, g, et g' sont indépendants. On a alors

$$\phi(g')^{-1}\phi(g) = \phi({g'}^{-1}g) = \phi({g'}^{-1}a(g^{-1}a)^{-1}) = \phi({g'}^{-1}a)\phi(g^{-1}a)^{-1}$$

D'où $\phi(g)\phi(g^{-1}a) = \phi(g')\phi({g'}^{-1}a)$.

On peut donc définir $\psi(a)$ par $\phi(g)\phi(g^{-1}a)$ pour g générique de G indépendant de a.

Alors ψ est $\mathcal{M}$-définissable sur M (par définissabilité du type p sur M).

On montre que ψ est un homomorphisme. Soient a, b dans G. Soit g un générique indépendant de a, b. Alors

$$\psi(a)\psi(b) = (\phi(g)\phi(g^{-1}a)) \cdot (\phi(a^{-1}g)\phi((a^{-1}g)^{-1}b)) = \phi(g)\phi(g^{-1}ab) = \psi(ab).$$

Pour montrer la définissabilité de ψ, on utilise un argument de compacité : il existe par compacité une formule F dans p telle que ψ restreint à F est définissable par Γ, car $p(x) \wedge (y = \psi(x))$ implique $\Gamma(x, y)$. Maintenant F est une formule générique, donc G est recouvert par un nombre fini de translatés de F, ce qui donne la définissabilité de ψ. ◁

▷ **Preuve de la proposition 3.4.4**

Soit G un sous-groupe de $(L, +)$, définissable sur K et connexe, et ϕ un morphisme de G dans $(L, +)$ définissable sur K.

Comme ϕ est une application définissable sur K, il existe un entier n, des ensembles définissables sur K, $D_1, \ldots, D_n$ recouvrant G tels que $\phi_{|D_i} = P_i/Q_i$ où $P_i, Q_i \in K[X_\infty]$ et $Q_i \neq 0$ sur D_i (car pour tout $a \in L$, $\mathrm{dcl}(K \cup \{a\}) = K(a_\infty)$ (3.1.4)).

Il existe donc un entier m tel que G est λ_m-fermé, les D_i sont λ_m-constructibles et P_i et Q_i sont des polynômes de $K[X_{=m}]$.

Soient $G' := \lambda_m(G)$ et ϕ' l'homomorphisme de G' dans $(L, +)$ associé à ϕ défini par $\phi'(\bar{x}) := \phi(\lambda_m^{-1}(\bar{x}))$. Alors G' est un sous-groupe λ_0-fermé de $L^{\times p^{\nu m}}$. Soient $D'_i := \lambda_m(D_i)$. Alors pour tout i, $\phi'_{|D'_i}(\bar{x}) = P_i(\bar{x})/Q_i(\bar{x})$ où l'on considère les polynômes P_i et Q_i dans $K[\bar{X}]$ avec $\bar{X}$ un $p^{\nu m}$-uple de variables.

Le groupe G' est connexe et a donc un seul type générique qui correspond à son générique topologique. On peut supposer qu'il appartient à D'_1.

Soit $\bar{G}'$ la clôture de Zariski de G dans $\bar{L}^{\times p^{\nu m}}$. Soit Γ la partie de $(\bar{G}', \bar{L})$ définissable sur K par

$$\Gamma := \{(\bar{x}, y); \bar{x} \in \bar{G}',\ Q_1(\bar{x}) \neq 0 \text{ et } P_1(\bar{x}) = Q_1(\bar{x})y\}.$$

Comme G' est λ_0-fermé, $G' = \bar{G}'(L)$ et les génériques de G' dans L sont génériques dans $\bar{G}'$ (3.1.16 et 3.1.21).

On en déduit que Γ définit génériquement un homomorphisme de $\bar{G}'$ dans $(\bar{L}, +)$. Donc par (3.4.6) il existe ψ un homomorphisme définissable sur $\bar{K}$ de $\bar{G}'$ dans $(\bar{L}, +)$ qui prolonge l'homomorphisme générique défini par Γ. Il est donc égal à ϕ' sur les génériques de G' et comme tout élément de G' est somme de deux génériques, ψ prolonge ϕ'.

Par (3.4.5), ψ se prolonge en un homomorphisme de $(\bar{L}^{\times p^{\nu m}}, +)$ dans $(\bar{L}, +)$ définissable sur $\bar{K}$. Donc par (3.4.2) il existe $(a_{i,j})_{i\in\{1,\dots,p^{\nu m}\},j\in\mathbb{Z}}$ une famille d'éléments de $\bar{K}$ presque tous nuls tels que :

$$\psi(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{p^{\nu m}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{i,j}\alpha^j(x_i).$$

En composant par une puissance suffisante de α, on obtient pour tout $\bar{x} \in G'$, $\alpha^r \circ \phi'(\bar{x}) = S(\bar{x})$ où S est un p-polynôme de $K^{sep}[\bar{X}]$. Comme $\alpha^r \circ \phi'$ est définissable sur K, nous pouvons supposer que S est un p-polynôme de $K[\bar{X}]$: en effet il suffit de considérer le sous-groupe H connexe λ_0-fermé de $(L^{\times p^{\nu m}} \times L, +)$ défini par le graphe de $\alpha^r \circ \phi'$. Alors par (3.2.6) et du fait que pour tout $(\bar{x}, y) \in H$, $y = S(\bar{x})$, il existe un p-polynôme P de $K[\bar{X}, Y]$ unitaire et de degré 1 en Y tel que pour tout $(\bar{x}, y) \in H$, $P(\bar{x}, y) = 0$.

Enfin $\phi' = f_0^r \circ \alpha^r \circ \phi'$, d'où pour tout $\bar{x} \in G'$, $\phi'(\bar{x}) = S'(\bar{x}_{=r})$ où S' est un p-polynôme de $K[\bar{X}_{=r}]$ et donc pour tout $x \in G$, $\phi(x) = T(x_{=m+r})$ où T est un p-polynôme de $K[X_{=m+r}]$. $\lhd$

On peut donc montrer de même que tout endomorphisme de sous-groupe additif $\curlywedge$-définissable est restriction d'un endomorphisme de $(L, +)$:

Corollaire 3.4.7. *Soit G un sous-groupe de $(L, +)$ $\curlywedge$-définissable sur K et connexe. Les homomorphismes de G dans $(L, +)$ définissables sur K sont restrictions d'endomorphismes de $(L, +)$ définissables sur K. Soient* $\mathrm{End}_K(G)$ *l'ensemble de ces endomorphismes,* $\mathrm{End}_K((L, +), G)$ *l'ensemble des endomorphismes de $(L, +)$ laissant globalement invariant G et* $\mathrm{Ann}_K(G)$ *l'ensemble des endomorphismes de $(L, +)$ s'annulant sur G. Alors :*

$$\mathrm{End}_K(G) = \mathrm{End}_K((L, +), G)/\mathrm{Ann}_K(G).$$

Pour H un sous-groupe de $(L^{\times k}, +)$ $\curlywedge$-définissable sur K et connexe, les homomorphismes de H dans $(L, +)$ définissables sur K sont restrictions d'homomorphismes de $(L^{\times k}, +)$ dans $(L, +)$ définissables sur K. On a ici

$$\mathrm{End}_K(H) = \mathcal{M}_{k,k}(\mathrm{End}_K((L, +), H))/(\mathrm{Ann}_K(H))^{\times k}$$

où

$$\mathrm{Ann}_K(H) := \{(r_1, \dots, r_k) \in (\mathrm{End}_K(L, +))^{\times k};\ \forall h \in H,\ \sum r_i \cdot h_i = 0\}.$$

$\rhd$ Par stabilité G est une intersection de sous-groupes de $(L, +)$ définissables sur K. Avec (3.1.20) G est en fait une intersection de sous-groupes G_i de $(L, +)$ définissables sur K et connexes. Si ϕ est un homomorphisme définissable sur K alors par compacité ϕ est restriction d'un homomorphisme de G_i dans $(L, +)$. En utilisant la proposition précédente, on en déduit que ϕ est restriction d'un endomorphisme de $(L, +)$.

Pour H il suffit d'utiliser λ_m^{-1} avec $p^{\nu m} \geq k$. Ainsi on obtient un homomorphisme d'un groupe G comme ci-dessus dans $(L, +)$. Cet homomorphisme est restriction d'un endomorphisme de $(L,+)$. On applique maintenant λ_m, on obtient ainsi un homomorphisme de $(L^{\times p^{\nu m}},+)$ dans $(L,+)$. En gardant les k premières coordonnées on conclut.

On peut en fait remarquer que dans la proposition précédente 3.4.4 on a utilisé le fait que G est un sous-groupe de $(L,+)$ seulement pour ne pas alourdir les notations avec un entier k supplémentaire. La preuve est donc la même pour G sous-groupe de $(L^{\times k},+)$ et ceci permet de conclure directement pour le deuxième point de notre corollaire. $\triangleleft$

3.4.3 Corps des endomorphismes-homothéties d'un sous-groupe additif minimal

Pour G un sous-groupe additif minimal définissable sur K, nous appelons corps des endomorphismes-homothéties de G définissables sur K, le corps $K \cap \mathrm{End}_K(G)$.

Proposition 3.4.8. *Soit G un sous-groupe de $(L,+)$ minimal $\bigwedge$-définissable sur K. Si G n'est pas définissablement isomorphe à $(L^{p^\infty},+)$ (en particulier si G est localement modulaire) alors il existe un entier $n>0$ tel que $K \cap \mathrm{End}_K(G) = \mathbb{F}_{p^n}$.*

$\triangleright$ Pour tout entier l soit $G_l := V(I(G)_{\leq l})$. Les groupes G_l sont connexes puisque G est connexe : en effet pour tout entier l, $I_{K^{sep}}(G)_{\leq l}$ est premier séparable donc $G_l = V(I_{K^{sep}}(G)_{\leq l})$ est connexe (3.2.1).

Montrons que si $k \in K \cap \mathrm{End}_K(G)$ et k non nul alors pour tout l, $kG_l = G_l$. Pour tout l,

$$I(kG)_{\leq l} = \{Q(X_{\leq l});\ Q(X_{\leq l}) := P(k^{-1}X_{\leq l}) \text{ et } P(X_{\leq l}) \in I(G)_{\leq l}\}.$$

Donc $V(I(kG)_{\leq l}) = kV(I(G)_{\leq l}) = kG_l$. D'autre part par minimalité de G, $kG = G$, donc $G_l = V(I(kG)_{\leq l}) = kG_l$.

On en déduit que

$$K \cap \mathrm{End}_K(G) = K \cap \bigcap_{l\in\omega} \mathrm{End}_K(G_l).$$

Étudions maintenant $K \cap \mathrm{End}_K(G_l)$ pour l fixé. Fixons un élément g non nul de G.

Soit $H := \lambda_l(G_l)$ sous-groupe connexe de $(L^{\times p^{\nu l}},+)$ λ_0-fermé sur K. Soit h un générique de H au-dessus de K. On peut supposer que $h = \bar{x}y_1\ldots y_{n_l}$ avec $\bar{x}$ base de transcendance séparante de $K(h)$ au-dessus de K. Par (3.2.6), il existe des p-polynômes $P_1,\ldots,P_n$ de $K[\bar{X},Y_1,\ldots,Y_n]$ tels que $H = V(\{P_1,\ldots,P_n\})$ et tels que pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, $P_i \in K[\bar{X},Y_1,\ldots,Y_i]$, P_i est unitaire et de degré minimal n_i en Y_i parmi les p-polynômes de $K^{sep}[\bar{X},Y_1,\ldots,Y_i]$ de degré >0 en Y_i et s'annulant en h, et pour tout $j<i$ $\deg_{Y_j}(P_i) < \deg_{Y_j}(P_j)$. Par ailleurs en renommant les variables à l'aide de la bijection λ_l, ces polynômes se voient aussi comme p-polynômes dans $K[Z_{=l}]$, tels que

$$G_l = \{z \in L;\ P_1(z_{=l}) = \ldots = P_n(z_{=l}) = 0\}.$$

Soit $k \in K \cap \mathrm{End}_K(G_l)$. Alors $k^{p^l} \in \mathrm{End}_K(G_l)$, donc $k \in \mathrm{End}_K(H)$. Par la propriété de minimalité sur les polynômes $P_1, \ldots, P_n$, on a alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$P_i(k\bar{X}, kY_1, \ldots, kY_i) = k^{p^{n_i}} P_i(\bar{X}, Y_1, \ldots, Y_i).$$

Si pour un i, il existe un entier $m \neq n_i$ tel qu'une variable à la puissance p^m est présente dans P_i, alors $k^{p^m} = k^{p^{n_i}}$, donc $k \in \mathbb{F}_{p^{|n_i - m|}}$. Dans ce cas, $K \cap \mathrm{End}_K(G_l)$ est fini. Sinon, pour tout i,

$$P_i(Z_{=l}) = \sum_{j \in p^{\nu l}} a_j Z_j^{p^{n_i}}.$$

Montrons alors que $gL^{p^\infty} \subseteq G_l$. Rappelons que g est un élément fixé de G. Soit $c \in L^{p^\infty}$ alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$P_i((cg)_{=l}) = \sum_{j \in p^{\nu l}} a_j((cg)_j)^{p^{n_i}} = \sum_{j \in p^{\nu l}} a_j(c^{p^{-l}} g_j)^{p^{n_i}} = c^{p^{n_i - l}} P_i(g) = 0.$$

Donc $cg \in G_l$.

On a donc montré que ou bien il existe l, tel que $K \cap \mathrm{End}_K(G_l)$ est fini et donc $K \cap \mathrm{End}_K(G)$ est un corps fini, ou bien pour tout l, $gL^{p^\infty} \subseteq G_l$ et donc $gL^{p^\infty} \subseteq G$. Dans ce second cas par minimalité de G, $G = gL^{p^\infty}$. $\triangleleft$

3.4.4 Sous-groupes minimaux additifs orthogonaux

Nous montrons que si $|K|^{\aleph_0} > |K|$, il existe $|K|^{\aleph_0}$ sous-groupes additifs minimaux de rang de transcendance 1 définis sur K et deux à deux orthogonaux. Nous en déduisons qu'il existe des sous-groupes minimaux additifs orthogonaux à tout sous-groupe additif minimal défini sur $\mathbb{F}_p(B)^{sep}$. En fait la construction par F. Delon [De 88] de types orthogonaux à un corps donné K, montre aussi l'existence de sous-groupes minimaux orthogonaux à K et montre ainsi que les sous-groupes additifs témoignent de la multidimensionalité de $T_{p,\nu}$ et de la DOP. Ceci n'est pas en contradiction avec la non-multidimensionalité des théories de module et du résultat (3.3.3), car les sous-groupes additifs définis sur un sur-corps de K dans L ne sont pas nécessairement définissable dans la structure de module L_{K-mod}.

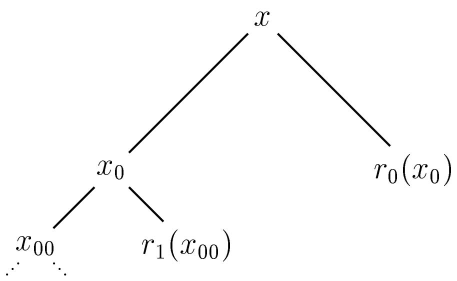
Nous terminons ce paragraphe par une construction ("effective") de $2^{\aleph_0}$ sous-groupes additifs minimaux de rang transcendance 1 définis sur le vide et deux à deux orthogonaux.

Nous allons utiliser une construction introduite dans [BD2] qui a permis aux auteurs de montrer l'existence de sous-groupes minimaux additifs de rang de transcendance infini.

Définition. Nous rappelons que pour $x \in L$ et $n \in \omega$, $x_{\bar{0}(n)}$ est défini par récurrence de la manière suivante : $x_{\bar{0}(0)} = x$ et $x_{\bar{0}(n+1)} = f_0(x_{\bar{0}(n)}) = x_{\bar{0}(n)0}$ (3.1.3).

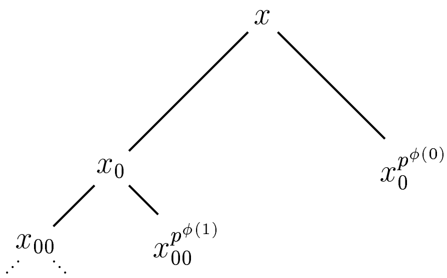
Soit $b = b_0$ le premier élément de la p-base.

Pour $r = (r_n)_{n\in\omega}$ une suite d'éléments de $K\{\alpha\}$ soit le sous-groupe de $(L,+)$ $G_r := \{x \in L;\ x_{\bar{0}(n)} = x^p_{\bar{0}(n+1)} + (r_n(x_{\bar{0}(n+1)}))^p b$ pour tout $n \in \omega\}$.



Groupes G_r

Pour ϕ une application de ω dans ω soit $G_\phi := G_r$ pour $r_n = \alpha^{\phi(n)}$.

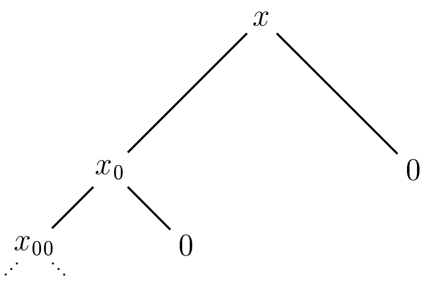


Groupes G_ϕ

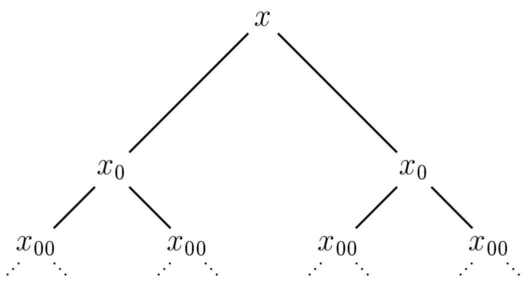
On définit $\deg(G_r)(n) := \prod_{0\leq j<n} \deg(X^p + (P_{r_j}(X))^p b)$.

On a donc $\deg(G_\phi)(n) = \prod_{0\leq j<n} p^{\phi(j)+1}$.

Remarque. Si $r = (0)$ alors G_r que l'on note $G_{(0)} = L^{p^\infty}$. Si ϕ est l'application nulle, G_ϕ que l'on note G_0 est isomorphe à L^{p^∞}. En fait G_0 est l'ensemble des points tels que $f_0(x_{\bar{0}(n)}) = f_1(x_{\bar{0}(n)})$ et $f_i(x_{\bar{0}(n)}) = 0$ pour $1 < i < p^\nu$. En prenant $a \in G_0$ non nul, on a $aL^{p^\infty} \subseteq G_0$ et par minimalité l'égalité.



Groupe $(L^{p^\infty}, +)$



Groupe G_0

Fait 3.4.9. *[BD2] Tous les groupes G_r sont minimaux de rang de transcendance un.*

Si x réalise le type générique de G_r, pour tout entier i, $[K(x_{\leq i}) : K(x)] = \deg(G_r)(i)$.

Si G_s est non orthogonal à G_r il existe des entiers n et k tels que pour tout entier i, $\deg(G_s)(i) \leq k \cdot \deg(G_r)(i+n)$.

Remarque. Le groupe G_n correspondant à l'application ϕ constante égale à n, est orthogonal à L^{p^∞} pour $n \geq 1$.

Corollaire 3.4.10. *Il existe $|K|^{\aleph_0}$ sous-groupes minimaux additifs définis sur K, localement modulaires et de rang de transcendance un.*

$\triangleright$ Par 3.4.9 il existe $|K|^{\aleph_0}$ sous-groupes minimaux additifs définis sur K de rang de transcendance un et orthogonaux au groupe $(L^{p^\infty}, +)$. Par 3.1.25 ces groupes sont localement modulaires. $\triangleleft$

Corollaire 3.4.11. *Si $|K|^{\aleph_0} > |K|$, il existe $|K|^{\aleph_0}$ sous-groupes additifs minimaux définis sur K, localement modulaires, de rang de transcendance un, et deux à deux orthogonaux.*

$\triangleright$ Soit G un sous-groupe additif minimal localement modulaire défini sur K. Par 1.3.7 il y a au plus $|K|$ groupes minimaux $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissables sur K non orthogonaux à G. On conclut par 3.4.10. $\triangleleft$

Corollaire 3.4.12. *Soit k_0 un sous-corps infini de K. Si $|K|^{\aleph_0} > |K|$ et si $|K|^{\aleph_0} > |k_0|^{\aleph_0}$, il existe un sous-groupe additif minimal localement modulaire défini sur K, de rang de transcendance un et orthogonal à tout groupe minimal $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissable sur k_0.*

$\triangleright$ Il y a au plus $|k_0|^{\aleph_0}$ groupes minimaux $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissables sur k_0. Par 1.3.7 il y a donc au plus $|K| \cdot |k_0|^{\aleph_0}$ groupes minimaux localement modulaires, $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissables sur K, et non orthogonaux à un de ces groupes $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissables sur k_0. On conclut par 3.4.10. $\triangleleft$

En fait en utilisant la construction de types orthogonaux de F. Delon [De 88], qui lui permet de montrer que la théorie $T_{p,\nu}$ a la DOP, on obtient immédiatement des sous-groupes minimaux additifs orthogonaux à $\mathbb{F}_p(B)^{sep}$. On peut alors remarquer que la DOP se voit avec les types additifs.

Proposition 3.4.13. *(voir [De 88]) Soit $k_0 \preccurlyeq K \preccurlyeq L$, tels que K est de degré de transcendance infini sur k_0, alors il existe un type q sur K orthogonal à k_0 que l'on peut de plus choisir minimal additif (c'est-à-dire générique d'un sous-groupe additif minimal).*

Cette proposition est un corollaire immédiat du résultat suivant :

Proposition 3.4.14. *[De 88] On dit qu'un idéal I de $K[X_\infty]$ a une* **croissance faible** *sur un sous-corps k_0 de K, s'il existe un entier m tel que pour tout n, $I_{\leq n}$ admet un corps de définition de degré de transcendance sur k_0 plus petit que $mp^{\nu n}$.*

Un type minimal p sur K tel que $I(p)$ n'est pas à croissance faible sur k_0 est orthogonal à k_0.

Nous allons maintenant donner une construction de sous-groupes additifs minimaux deux à deux orthogonaux :

Construction 3.4.15. Il existe $2^{\aleph_0}$ sous-groupes additifs minimaux de rang de transcendance un, définis sur $\emptyset$ et deux à deux orthogonaux.

Pour cette construction nous utilisons le petit lemme suivant :

Lemme 3.4.16. *Il existe une famille de parties de ω, $(O_\alpha)_{\alpha\in 2^\omega}$ telle que si $\alpha < \beta < 2^\omega$, $O_\alpha \subset O_\beta$ et $O_\beta \setminus O_\alpha$ est infini et contient des segments d'entiers arbitrairement longs.*

$\triangleright$ Pour le corollaire 3.4.15 nous n'aurons besoin seulement que de la condition suivante : si $\alpha < \beta < 2^\omega$, $O_\alpha \subset O_\beta$ et $O_\beta \setminus O_\alpha$ est infini. Il suffit d'utiliser pour cela une bijection de ω avec $\mathbb{Q}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, prendre l'ensemble $O_\alpha :=]-\infty, r] \cap \mathbb{Q}$.

Par contre pour la preuve de (3.4.23) nous aurons besoin de la condition supplémentaire : si $\alpha < \beta$ alors $O_\beta \setminus O_\alpha$ contient des segments d'entiers arbitrairement longs. Pour obtenir une telle famille de parties de ω, on construit par induction sur la longueur de ε une famille de partitions de ω en parties contenant des segments d'entiers arbitrairement longs $(A_\varepsilon, B_\varepsilon, C_\varepsilon, D_\varepsilon, E_\varepsilon)_{\varepsilon\in 2^{<\omega}}$ ayant les propriétés suivantes :

Pour tout $\varepsilon \in 2^{<\omega}$,

$$\begin{array}{rcl} A_{\varepsilon\frown 0} & = & A_\varepsilon \cup C_\varepsilon \cup E_\varepsilon, \\ B_{\varepsilon\frown 0} & \supseteq & B_\varepsilon, \\ A_{\varepsilon\frown 1} & \supseteq & A_\varepsilon, \\ B_{\varepsilon\frown 1} & = & B_\varepsilon \cup D_\varepsilon \cup E_\varepsilon \text{ et} \\ \{0, \dots, l(\varepsilon)-1\} & \subset & A_\varepsilon \cup B_\varepsilon. \end{array}$$

Soit $(A_\emptyset, B_\emptyset, C_\emptyset, D_\emptyset, E_\emptyset)$ une partition quelconque de ω en parties contenant des segments d'entiers arbitrairement longs.

Supposons $(A_\varepsilon, B_\varepsilon, C_\varepsilon, D_\varepsilon, E_\varepsilon)$ construit.
On construit $(A_{\varepsilon\frown 0}, B_{\varepsilon\frown 0}, C_{\varepsilon\frown 0}, D_{\varepsilon\frown 0}, E_{\varepsilon\frown 0})$ de la manière suivante : on pose $A_{\varepsilon\frown 0} = A_\varepsilon \cup C_\varepsilon \cup E_\varepsilon$. On fait une partition de D_ε en quatre parties $D_\varepsilon \cap \{0, \dots, l(\varepsilon)\}$, C, D, E telles que C, D, E contiennent des segments d'entiers arbitrairement longs.

On pose $B_{\varepsilon\frown 0} = B_\varepsilon \cup (D_\varepsilon \cap \{0, \dots, l(\varepsilon)\})$, $C_{\varepsilon\frown 0} = C$, $D_{\varepsilon\frown 0} = D$ et $E_{\varepsilon\frown 0} = E$.
On construit de manière équivalente $(A_{\varepsilon\frown 1}, B_{\varepsilon\frown 1}, C_{\varepsilon\frown 1}, D_{\varepsilon\frown 1}, E_{\varepsilon\frown 1})$.

Pour tout $\alpha \in 2^\omega$ on définit

$$O_\alpha = \bigcup_{n\in\omega} B_{\alpha_{|n}} = \omega \setminus (\bigcup_{n\in\omega} A_{\alpha_{|n}}).$$

Si $\alpha < \beta$ alors il existe $\varepsilon \in 2^{<\omega}$, α' et β' tels que $\alpha = \varepsilon \frown 0 \frown \alpha'$ et $\beta = \varepsilon \frown 1 \frown \beta'$. Alors

$$O_\alpha \subseteq \omega \setminus A_{\varepsilon\frown 0} = B_\varepsilon \cup D_\varepsilon \subset B_\varepsilon \cup D_\varepsilon \cup E_\varepsilon = B_{\varepsilon\frown 1} \subseteq O_\beta.$$

Donc $O_\beta \setminus O_\alpha$ contient E_ε qui, lui, contient des segments d'entiers arbitrairement longs. ◁

▷ **Construction 3.4.15**

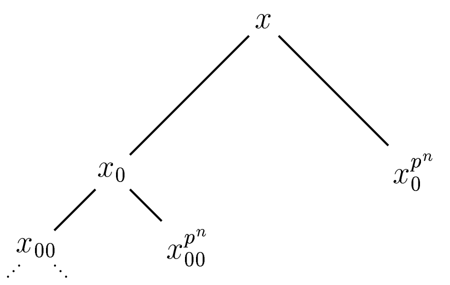
Soit pour tout $\alpha \in 2^\omega$, ϕ_α la fonction qui à n associe 1 si $n \in O_\alpha$ et 0 sinon.

Montrons que les groupes G_{ϕ_α} sont deux à deux orthogonaux. Supposons pour $\alpha < \beta$ que G_{ϕ_β} est non orthogonal à G_{ϕ_α}. Alors il existe n et k tels que pour tout i, $\deg(G_{\phi_\beta})(i) \le k \cdot \deg(G_{\phi_\alpha})(i+n)$ (3.4.9). Soit m un entier tel que $p^m > kp^{2n}$. Il existe un entier j tel que $O_\beta \setminus O_\alpha$ contient plus de m entiers strictement inférieurs à j. Alors $\deg(G_{\phi_\beta})(j) \ge p^m \cdot \deg(G_{\phi_\alpha})(j)$ car si $x = x_0^p + x_0^p b$, alors $[K(x_0) : K(x)] = p$ et si $x = x_0^p + x_0^{p^2} b$, alors $[K(x_0) : K(x)] = p^2$. De même $\deg(G_{\phi_\alpha})(j+n) \le p^{2n} \deg(G_{\phi_\alpha})(j)$. Donc $\deg(G_{\phi_\beta})(j) > k \cdot \deg(G_{\phi_\alpha})(j+n)$ car $p^m > kp^{2n}$. ◁

3.4.5 Anneaux d'endomorphismes de sous-groupes minimaux additifs localement modulaires

Étudions maintenant les anneaux d'endomorphismes de certaines classes de sous-groupes minimaux additifs définis sur le vide et leurs endomorphismes définissables. Nous utilisons pour cela le fait que tout endomorphisme définissable se prolonge à $(L, +)$ (3.4.4).

Soient n un entier et ϕ l'application constante à n. Nous rappelons que G_n est le groupe G_ϕ.



Groupe G_n

Nous étudions l'anneau des endomorphismes des groupes G_n pour $n > 0$.

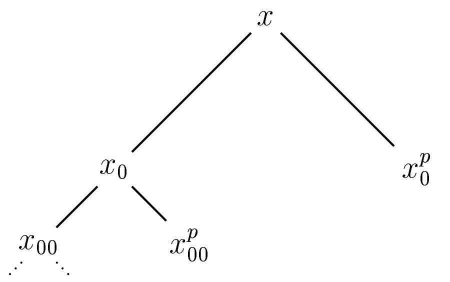
Proposition 3.4.17. *L'anneau des endomorphismes de G_1 définissables sur K est égal à*

$$\mathbb{F}_p\{f_{0|G_1}, f_{0|G_1}^{-1}\} \simeq \mathbb{F}_p[X, X^{-1}].$$

Plus généralement pour tout entier $n \geq 1$,

$$\mathrm{End}_K(G_n) = \mathbb{F}_{p^n}\{f_{0|G_n}, f_{0|G_n}^{-1}\}$$

$\triangleright$ La preuve est identique quelque soit n. Pour simplifier les notations nous nous contentons d'écrire celle pour G_1. Rappelons que G_1 est défini par les relations suivantes : pour tout $n \in \omega$, $x_{\bar{0}(n)} = x^p_{\bar{0}(n+1)} + bx^{p^2}_{\bar{0}(n+1)}$ (où $b = b_0$ est le premier élément de la p-base et pour tout n, $x_{\bar{0}(n)} = f_0^n(x)$).



Groupe G_1

L'application f_0 restreint à G_1 définit un isomorphisme. Son inverse est l'application qui à x associe $x^p + bx^{p^2}$. En effet $x = x_0^p + bx_0^{p^2} \in G_1$ si et seulement si $x_0 \in G_1$.

Soit g un endomorphisme définissable sur K de G_1. Par (3.4.7 et 3.3.1) il existe P un p-polynôme de $K[X_\infty]$ tel que pour tout $x \in G_1$, $g(x) = P(x_\infty)$. Par la définition de G_1 on peut supposer que P est un p-polynôme de $K[X_{\bar{0}(n)}]$ pour un certain n. D'où $g(x) = P(f_0^n(x))$. Ainsi l'application qui à x associe $P(x)$ est un endomorphisme de G_1.

On s'est donc ramené à un endomorphisme h défini par $h(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^{p^j}$. avec $a_j \in K$.

On reprend les notations (3.1.2). Dans ce qui suit on a donc, $a_{0,0} = f_0(a_0)$, $a_{0,1} = f_1(a_0)$, $a_{0,p-1} = f_{p-1}(a_0)$ et plus généralement pour tout $j \in \{0, \ldots, m\}$ et $i < p^\nu$, $a_{j,i} = f_i(a_j)$.

Pour tout $x \in G_1$ on a :

$$\begin{aligned}
h(x) &= (a_{0,0}^p + a_{0,1}^p b + \ldots + a_{0,p-1}^p b^{p-1} + \ldots)(x_0^p + x_0^{p^2} b) + \sum_{j=1}^m (\sum_{i \in p^\nu} a_{j,i}^p m_i)(x^{p^{j-1}})^p \\
&= (a_{0,0}x_0 + a_{0,p-1}bx_0^p)^p + (a_{0,1}x_0 + a_{0,0}x_0^p)^p b + \ldots + \sum_{i \in p^\nu} \left(\sum_{j=1}^m (a_{j,i} x^{p^{j-1}}) \right)^p m_i.
\end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in G_1$,

$$\begin{aligned}(h(x))_0 &= a_{0,0}x_0 + a_{0,p-1}bx_0^p + \sum_{j=1}^{m} a_{j,0}x^{p^{j-1}},\\ (h(x))_1 &= a_{0,1}x_0 + a_{0,0}x_0^p + \sum_{j=1}^{m} a_{j,1}x^{p^{j-1}}.\end{aligned}$$

Par ailleurs comme h est un endomorphisme de G_1, pour tout $x \in G_1$,

$$\begin{aligned}(h(x))_1 &= (h(x))_0^p, \text{ et}\\ (h(x))_i &= 0 = a_{0,i}x_0 + \text{ termes en } x_0^p \text{ et en } x^{p^j}, \text{ pour } 1 < i < p^\nu.\end{aligned}$$

Pour $i > 1$, en remplaçant x par $x_0^p + bx_0^{p^2}$ dans l'équation $(h(x))_i = 0$, on obtient $a_{0,i} = 0$. De même $a_{0,1} = 0$ car $a_{0,1}x_0$ est le seul terme en x_0 dans l'égalité $(h(x))_1 = (h(x))_0^p$. (On a des équations polynomiales en x_0 ayant une infinité de solutions.)

En considérant à nouveau cette égalité on obtient

$$0 = (a_{0,0} - a_{0,0}^p)x_0^p + \text{ termes en } x^{p^j} \text{ pour } 0 \leq j \leq m.$$

On en déduit que les termes en x sont nuls (car $x = x_0^p + bx_0^{p^2}$) et donc que $a_{0,0} = a_{0,0}^p$. D'où $a_0 \in \mathbb{F}_p$.

On peut donc se ramener à un degré inférieur en considérant l'application qui à x associe $f_0(h(x) - a_0x)$. $\lhd$

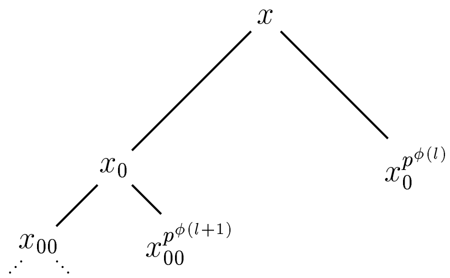
Remarque. Il existe un groupe G localement modulaire minimal tel que son anneau d'endomorphismes est égal à $\mathbb{F}_p\{f_{1|G}, f_{1|G}^{-1}\}$. Pour cela il suffit de prendre le "symétrique" de G_1 : $\{x;\ x_{\bar{1}(n)} = x_{\bar{1}(n+1)}^{p^2} + bx_{\bar{1}(n+1)}^p\}$.

Nous donnons maintenant une classe d'exemples dont l'anneau des endomorphismes est réduit à $\mathbb{F}_p$.

Proposition 3.4.18. *Soit ϕ une application injective de ω dans $\omega \setminus \{0\}$ tel que pour tout entier n il existe un entier $m > n$ tel que $\phi(n)$ et $\phi(m)$ sont premiers entre eux. (Les applications strictement croissantes de ω dans l'ensemble des nombres premiers vérifient ces propriétés.) Alors l'anneau $\mathrm{End}_K(G_\phi)$ des endomorphismes de G_ϕ définissables sur K est réduit à $\mathbb{F}_p$.*

De même pour tout $n > 0$, $\mathrm{End}_K(G_{n\phi}) = \mathbb{F}_{p^n}$.

Nous décomposons la preuve en petits lemmes. Pour tout $l \in \omega$, nous notons $\phi + l$ l'application qui à n associe $\phi(n + l)$ (ces applications vérifient aussi les hypothèses de la proposition). Pour tout $l \in \omega$, le groupe $G_{\phi+l}$ est égal à $f_{\bar{0}(l)}(G_\phi)$



Groupes $G_{\phi+l}$

Lemme 3.4.19. *Soit g un endomorphisme de G_ϕ défini par $g(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^{p^j}$. Alors $a_0 \in \mathbb{F}_p$.*

$\triangleright$ On fait le même type de raisonnement que dans la preuve précédente (3.4.17) et on utilise les mêmes notations (3.1.2) : pour tout $x \in G_\phi$ on a :

$$\begin{aligned}
(g(x))_0 &= a_{0,0}x_0 + a_{0,p-1}bx_0^{p^{\phi(0)}} + \sum_{j=1}^m a_{j,0}x^{p^{j-1}}, \\
(g(x))_1 &= a_{0,1}x_0 + a_{0,0}x_0^{p^{\phi(0)}} + \sum_{j=1}^m a_{j,1}x^{p^{j-1}}, \\
(g(x))_i &= 0 = a_{0,i}x_0 + \text{ termes en } x_0^{p^{\phi(0)}} \text{ et en } x^{p^j}, \text{ pour } 1 < i < p^\nu, \text{ et} \\
(g(x))_1 &= (g(x))_0^{p^{\phi(0)}}.
\end{aligned}$$

En remplaçant x par $x_0^p + bx_0^{p^{\phi(0)+1}}$, on en déduit de la même manière que dans la proposition 3.4.17 que $a_{0,1} = 0$ et $a_{0,i} = 0$ pour $i > 1$ et que $a_{0,0} = a_{0,0}^{p^{\phi(0)}}$. D'où $a_0 \in \mathbb{F}_{p^{\phi(0)}}$.

En composant g par f_0 on peut considérer un endomorphisme de $G_{\phi+1}$ défini par un p-polynôme de $K[x_0]$ dont le coefficient en x_0 est $a_{0,0}$. Alors $a_{0,0} \in \mathbb{F}_{p^{\phi(1)}}$, d'où $a_0 \in \mathbb{F}_{p^{\phi(1)}}$. En itérant nous montrons que pour tout entier n, $a_0 \in \mathbb{F}_{p^{\phi(n)}}$. Comme il existe un entier n tel que $\phi(0)$ et $\phi(n)$ sont premiers entre eux, on a $a_0 \in \mathbb{F}_p$. $\triangleleft$

Lemme 3.4.20. *Soit $l > 0$ et g un homomorphisme de $G_{\phi+l}$ dans G_ϕ défini par $g(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^{p^j}$. Alors $a_0 = 0$.*

$\triangleright$ Pour tout $x \in G_{\phi+l}$ on a :

$$\begin{aligned}
(g(x))_0 &= a_{0,0}x_0 + a_{0,p-1}bx_0^{p^{\phi(l)}} + \sum_{j=1}^m a_{j,0}x^{p^{j-1}},\\
(g(x))_1 &= a_{0,1}x_0 + a_{0,0}x_0^{p^{\phi(l)}} + \sum_{j=1}^m a_{j,1}x^{p^{j-1}},\\
(g(x))_i &= 0 = a_{0,i}x_0 + \text{ termes en } x_0^{p^{\phi(l)}} \text{ et en } x^{p^j}, \text{ pour } 1 < i < p^\nu, \text{ et}\\
(g(x))_1 &= (g(x))_0^{p^{\phi(0)}}.
\end{aligned}$$

En remplaçant x par $x_0^p + bx_0^{p^{\phi(l)+1}}$, on en déduit toujours de la même façon que $a_{0,1} = 0$ et $a_{0,i} = 0$ pour $i > 1$.

On considère à nouveau l'égalité $(g(x))_1 = (g(x))_0^{p^{\phi(0)}}$. Cela donne :

$$a_{0,0}x_0^{p^{\phi(l)}} + \sum_{j=1}^m a_{j,1}x^{p^{j-1}} = a_{0,0}^{p^{\phi(0)}}x_0^{p^{\phi(0)}} + \sum_{j=1}^m a_{j,0}^{p^{\phi(0)}}x^{p^{j-1+\phi(0)}}.$$

On remplace x par $x_0^p + bx_0^{p^{\phi(l)+1}}$ et on ne garde que les termes en $x_0^{p^{\phi(0)+t\phi(l)}}$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{t\geq 0} a_{\phi(0)+t\phi(l),1}(x_0^{p^{\phi(0)+t\phi(l)}} + b^{p^{\phi(0)+t\phi(l)-1}}x_0^{p^{\phi(0)+(t+1)\phi(l)}})\\
&= a_{0,0}^{p^{\phi(0)}}x_0^{p^{\phi(0)}} + \sum_{t\geq 1} a_{t\phi(l),0}^{p^{\phi(0)}}(x_0^{p^{\phi(0)+t\phi(l)}} + b^{p^{\phi(0)+t\phi(l)-1}}x_0^{p^{\phi(0)+(t+1)\phi(l)}}).
\end{aligned}$$

(Comme $\phi(l) \neq \phi(0) \neq 0$ le terme $a_{0,0}x_0^{p^{\phi(l)}}$ n'apparaît pas.) On a donc une équation polynomiale du type suivant :

$$a_{0,0}^{p^{\phi(0)}}x_0^{p^{\phi(0)}} + \sum_{t\geq 0} c_t(x_0^{p^{\phi(0)+t\phi(l)}} + b^{p^{\phi(0)+t\phi(l)-1}}x_0^{p^{\phi(0)+(t+1)\phi(l)}}) = 0.$$

Ainsi tous les c_t sont nuls et donc $a_{0,0}$ est nul.

D'où $a_0 = 0$. $\triangleleft$

Lemme 3.4.21. *Soit $l > 0$ et g un homomorphisme de G_ϕ dans $G_{\phi+l}$ défini par $g(x) = \sum_{j=0}^m a_jx^{p^j}$. Alors $a_0 = 0$.*

$\triangleright$ La preuve est analogue au lemme précédent. Pour tout $x \in G_\phi$ on a :

$$\begin{aligned}
(g(x))_0 &= a_{0,0}x_0 + a_{0,p-1}bx_0^{p^{\phi(0)}} + \sum_{j=1}^m a_{j,0}x^{p^{j-1}},\\
(g(x))_1 &= a_{0,1}x_0 + a_{0,0}x_0^{p^{\phi(0)}} + \sum_{j=1}^m a_{j,1}x^{p^{j-1}},\\
(g(x))_i &= 0 = a_{0,i}x_0 + \text{ termes en } x_0^{p^{\phi(0)}} \text{ et en } x^{p^j} \text{ pour } 1 < i < p^\nu \text{ et}\\
(g(x))_1 &= (g(x))_0^{p^{\phi(l)}}.
\end{aligned}$$

En remplaçant x par $x_0^p + bx_0^{p^{\phi(0)+1}}$, on en déduit que $a_{0,1} = 0$ et $a_{0,i} = 0$ pour $i > 1$.

On considère à nouveau l'égalité $(g(x))_1 = (g(x))_0^{p^{\phi(l)}}$. Cela donne

$$a_{0,0}x_0^{p^{\phi(0)}} + \sum_{j=1}^{m} a_{j,1}x^{p^{j-1}} = a_{0,0}^{p^{\phi(l)}} x_0^{p^{\phi(l)}} + \sum_{j=1}^{m} a_{j,0}^{p^{\phi(l)}} x^{p^{j-1+\phi(l)}}.$$

On remplace x par $x_0^p + bx_0^{p^{\phi(0)+1}}$ et on ne garde que les termes en $x_0^{p^{\phi(l)+t\phi(0)}}$. On obtient alors le même type d'égalité que dans le lemme précédent. On en déduit de même que $a_{0,0} = 0$ donc que $a_0 = 0$. ◁

Corollaire 3.4.22. *Soit $l \geq 0$ et g un homomorphisme de G_ϕ dans $G_{\phi+l}$ défini par $g(x) = \sum_{j=1}^m a_j x^{p^j}$. Alors $g = 0$.*

▷ Supposons g non nul. Soit $k > 0$ minimal tel que $a_k \neq 0$. On montre par récurrence sur k que $a_k = 0$ (contradiction).

Toujours par le même type d'équation on a $a_{k,i} = 0$ pour $i > 0$. En considérant $f_0 \circ g$ on obtient un homomorphisme de G_ϕ dans $G_{\phi+l+1}$. On a $(g(x))_0 = \sum_{j=k}^m a_{j,0}x^{p^{j-1}}$ qui est un p-polynôme en x. Si $k > 1$ on utilise l'hypothèse de récurrence et on a donc $a_{k,0} = 0$ d'où $a_k = 0$. Si $k = 1$ on conclut de même avec le lemme précédent. ◁

▷ **Preuve de la proposition 3.4.18**

Soit g un endomorphisme définissable sur K de G_ϕ. De même que pour G_1, par (3.4.7 et 3.3.1) il existe un entier n et un p-polynôme P de $K[X_{\bar{0}(n)}]$ tel que $g(x) = P(x_{\bar{0}(n)})$. On montre tout d'abord avec le lemme 3.4.20 que l'application qui à $x_{\bar{0}(n)}$ associe $f_0^n \circ P(x_{\bar{0}(n)})$, endomorphisme de $G_{\phi+n}$, est défini par un p-polynôme de $K[X_{\bar{0}(n)}]$.

En effet si $n > 0$, en considérant l'homomorphisme de $G_{\phi+n}$ dans G_ϕ défini par P, on a $P \in K[X_{\bar{0}(n)}^p]$ (3.4.20). D'où l'application qui à $x_{\bar{0}(n)}$ associe $f_0 \circ P(x_{\bar{0}(n)})$ est définie par un p-polynôme de $K[X_{\bar{0}(n)}]$. En itérant n fois on obtient le résultat ci-dessus.

On obtient donc un endomorphisme de $G_{\phi+n}$ défini par un p-polynôme de $K[X_{\bar{0}(n)}]$. Maintenant en utilisant le lemme 3.4.19 ce dernier p-polynôme est de la forme $aX_{\bar{0}(n)} + R[X_{\bar{0}(n)}]$ avec $a \in \mathbb{F}_p$ et $R \in K[X_{\bar{0}(n)}^p]$. L'application qui à $x_{\bar{0}(n)}$ associe $R(x_{\bar{0}(n)})$ est alors un endomorphisme de $G_{\phi+n}$ et par (3.4.22) $R = 0$. Donc que pour tout $x \in G_\phi$, $f_0^n \circ P(x_{\bar{0}(n)}) = ax_{\bar{0}(n)}$.

Maintenant pour tout $x \in G_\phi$, $x = Q(x_{\bar{0}(n)})$ pour un certain p-polynôme Q de $K[X]$. D'où $g(x) = Q(ax_{\bar{0}(n)}) = aQ(x_{\bar{0}(n)}) = ax$.

La preuve est identique pour les groupes $G_{n\phi}$. ◁

Par (3.4.8), tout sous-groupe minimal localement modulaire a nécessairement un corps d'endomorphismes scalaires fini. Réciproquement :

Corollaire 3.4.23. *Pour tout $n > 0$, il existe $2^{\aleph_0}$ sous- groupes additifs minimaux définis sur $\emptyset$, de rang de transcendance 1 et localement modulaires, deux à deux orthogonaux tels que leur anneau d'endomorphismes définissables sur K est égal à $\mathbb{F}_{p^n}$.*

▷ Il suffit de choisir deux suites de nombres premiers tous distincts (p_n) et (q_n) telles que $q_n \geq 2n + \sum_{i \leq 2n} p_i$.

Soit pour tout $\alpha \in 2^\omega$, ψ_α l'application qui à n associe q_n si $n \in O_\alpha$ et p_n sinon. (O_α est la famille de parties de ω définie dans le lemme 3.4.16.)

Montrons que les groupes G_{ψ_α} sont deux à deux orthogonaux.

Supposons pour $\alpha < \beta$ que G_{ψ_β} est non orthogonal à G_{ψ_α}. Alors il existe n et k tels que pour tout i, $\deg(G_{\psi_\beta})(i) \leq k \cdot \deg(G_{\psi_\alpha})(i+n)$ (3.4.9). Soit $m > n$ un entier tel que $p^m > k$. Il existe un entier $j \geq m$ tel que $\{j, \ldots, j+n\} \subset O_\beta \setminus O_\alpha$. Alors

$$\begin{aligned}
\deg(G_{\psi_\beta})(j+1) &= \deg(G_{\psi_\beta})(j) \cdot p^{1+q_j} \\
&\geq \deg(G_{\psi_\alpha})(j) \cdot p^m \cdot p^{n+1} \cdot \prod_{j \leq l \leq j+n} p^{p_l} \\
&= p^m \cdot \deg(G_{\psi_\alpha})(j) \cdot \prod_{j \leq l \leq j+n} p^{\psi_\alpha(l)+1} \\
&= p^m \cdot \deg(G_{\psi_\alpha})(j+n+1) > k \cdot \deg(G_{\psi_\alpha})(j+n+1).
\end{aligned}$$

De même pour tout $n > 0$, les groupes $G_{n\psi_\alpha}$ sont deux à deux orthogonaux.

Par (3.4.18), pour tout α et $n > 0$, l'anneau des endomorphismes définissables de $G_{n\psi_\alpha}$ est égal à F_{p^n}. ◁

Remarque. Dans ces exemples K n'a pas d'influence sur les endomorphismes définissables. Ceci vient du fait que tout sous-groupe connexe et en particulier tout endomorphisme définissable d'un groupe minimal localement modulaire définissable sur $\emptyset$ est $\mathrm{acl}^{eq}(\emptyset)$-définissable (1.3.2 iv).

Proposition 3.4.24. *Il existe un sous-groupe additif minimal localement modulaire et un sous-groupe additif minimal non localement modulaire qui ont même anneau d'endomorphismes définissables sur K.*

▷ C'est un corollaire de (3.4.23) et (3.4.3). ◁

Nous terminons cette section en indiquant deux questions ouvertes :

Question 3.4.25. En utilisant la construction de [CW 99] peut-on obtenir un groupe minimal de degré de transcendance infini n'ayant comme endomorphismes que les éléments de $\mathbb{F}_p$?

L'étude de la classe suivante de groupe ainsi que le lemme 3.4.27 ont été suggérés par T. Scanlon.

Soit $\theta \in K\{\alpha\}$. On définit

$$\theta^\sharp := \bigcap_{n \in \omega} \theta^n(L).$$

On suppose que $\theta = \sum_{i \geq 1} a_i \alpha^i$. Sinon pour tout $l \in L$, $P_\theta - l$ est séparable, donc $\theta(L) = L$ et dans ce cas $\theta^\sharp = L$.

Alors $\theta^\sharp$ est de rang de transcendance 1 : en effet pour tout $x \in \theta^\sharp$ et $n \in \omega$, il existe y tel que $x = \theta^n(y)$ et donc $K(x_{\leq n}) \subseteq K(y)$. D'où pour tout n, $\mathrm{RT}(x_{\leq n}/K) \leq 1$.

T. Scanlon a posé la question suivante :

Question 3.4.26 (de T. Scanlon). Soit θ tel que $\theta^\sharp$ est localement modulaire. A-t-on pour tout r quasi-endomorphisme de $\theta^\sharp$, une puissance de θ qui commute avec r ?

Remarque. Soit $n \in \omega$. Le groupe G_n est égal à $\theta_n^\sharp$ pour $\theta_n = \alpha + b\alpha^{n+1}$.

Les groupes G_n permettent de voir que θ ne commute pas nécessairement avec tous les endomorphismes définissables. En effet, tout $n \geq 2$, par (3.4.17),

$$\mathrm{End}_K(\theta_n^\sharp) = \mathbb{F}_{p^n}\{\theta_n, \theta_n^{-1}\}$$

et donc si $a \in \mathbb{F}_{p^n}$ alors $\theta_n \circ a = a^p \circ \theta_n$. Mais en revanche, θ_n^n lui commute avec tous les endomorphismes.

Terminons par une caractérisation des groupes localement modulaires de la forme $\theta^\sharp$.

Lemme 3.4.27. *Si $\theta^\sharp$ est minimal alors $\theta^\sharp$ est non localement modulaire si et seulement si il existe $a \in K^*$ tel que $a^{-1}\theta a \in K^p\{\alpha\}$.*

$\triangleright$ S'il existe $a \in K^*$ tel que $a^{-1}\theta a \in K^p\{\alpha\}$ alors $(a^{-1}\theta a)(L) \subseteq L^p$ d'où $(a^{-1}\theta a)^\sharp \subseteq L^{p^\infty}$ et par minimalité de L^{p^∞}, $(a^{-1}\theta a)^\sharp = L^{p^\infty}$. On conclut car $\theta^\sharp = a(a^{-1}\theta a)^\sharp$.

Sinon, soit $x \in \theta^\sharp$ et $y \in \theta^\sharp$ tel que $x = \theta(y)$. Soit N tel que $\deg P_\theta = p^N$. Si x est transcendant sur K alors y aussi et on a $[K(y) : K(x)] = \deg P_\theta = p^N$.

On va d'abord montrer qu'il existe R un p-polynôme de $K[Y]$ de degré inférieur ou égal à p^{N-2} tel que $R(y) \in K[x_{\leq 1}]$. En effet pour tout $i \in p^\nu$, $x_i = \theta_i(y)$ avec $\deg P_{\theta_i} \leq p^{N-1}$.

Ou bien il existe i tel que $\theta_i \neq 0$ et $\deg P_{\theta_i} < p^{N-1}$. Dans ce cas on pose $R = P_{\theta_i}$.

Ou bien pour tout i, $\deg P_{\theta_i} = p^{N-1}$ ou $\theta_i = 0$. Alors il existe deux P_{θ_i} non colinéaires (et une combinaison de ces deux polynômes donne R). Sinon il existerait i_0 et des $c_i \in K$ tels que pour tout i, $\theta_i = c_i\theta_{i_0}$. Dans ce cas il existe $c \in K$ tel que $\theta = c\alpha\theta_{i_0}$. En prenant $a \in K$ tel que $a^{p-1} = c^{-1}$, on a alors $a^{-1}\theta a = \alpha\theta'$ d'où $a^{-1}\theta a \in K^p\{\alpha\}$.

On a donc

$$R(Y) = \sum_{i=n_0}^{N-2} d_i Y^{p^i}.$$

On peut supposer que $d_{n_0} = 1$. En considérant

$$S(Y) = \sum_{i=n_0}^{N-2} d_{i,\bar{0}(n_0)} Y^{p^{i-n_0}},$$

on obtient que $S(y) \in K[x_{\leq n_0+1}]$ d'où $[K(x_{\leq n_0+1}, y) : K(x_{\leq n_0+1})] \leq p^{N-n_0-2}$ et pour tout $m \in \omega$, $y_{\leq m} \in K[x_{\leq n_0+1+m}, y]$.

On peut remarquer que n_0 ne dépend pas du choix de x.

On montre par récurrence sur $m \in \omega$ que $[K(x_{\leq m(n_0+1)}) : K(x)] \geq p^{m(n_0+2)}$ pour tout $x \in \theta^\sharp$ tel que $\mathrm{RT}(x/K) = 1$.

Pour $m = 0$ il n'y a rien à montrer.

On suppose le résultat vrai pour m. Soit $x \in \theta^\sharp$ tel que $\mathrm{RT}(x/K) = 1$. Il existe $y \in \theta^\sharp$ tel que $\theta(y) = x$.

Alors y est aussi transcendant sur K. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à y. Donc
$$[K(y_{\leq m(n_0+1)} : K(y)] \geq p^{m(n_0+2)}.$$
D'après ce qui précède, $y_{\leq m(n_0+1)} \in K[x_{\leq (m+1)(n_0+1)}, y]$. D'où
$$[K(x_{\leq (m+1)(n_0+1)}, y) : K(y)] \geq p^{m(n_0+2)}$$
et donc
$$[K(x_{\leq (m+1)(n_0+1)}, y) : K(x)] \geq p^{N+m(n_0+2)}.$$
On a aussi,
$$[K(x_{\leq (m+1)(n_0+1)}, y) : K(x_{\leq (m+1)(n_0+1)})] \leq p^{N-n_0-2}$$
d'où
$$[K(x_{\leq (m+1)(n_0+1)}) : K(x)] \geq p^{(m+1)(n_0+2)}.$$
Par (3.4.9), on conclut. En effet si pour $x \in \theta^\sharp$ tel que $\mathrm{RT}(x/K) = 1$, le type de x n'était pas orthogonal à L^{p^∞} alors il existerait $k \in \omega$ tel que $[K(x_{\leq n}) : K(x)] \leq kp^n$. Ce qui est impossible d'après ce qui précède. $\triangleleft$

3.5 Quasi-endomorphismes

Dans cette partie L est à nouveau un modèle fixé de $T_{p,\nu}$ et $k_0 \preccurlyeq K \preccurlyeq L$ sont des sous-structures élémentaires de L. De plus nous supposons L $|K|^+$-saturé. Les sous-groupes additifs seront supposés définissables sur k_0 (en général $k_0 = \mathbb{F}_p(B)^{sep}$) et les quasi-endomorphismes définissables sur K. Rappelons que dans le cas d'un sous-groupe minimal localement modulaire définissable sur k_0, tout quasi-endomorphisme définissable sur K l'est sur k_0 (1.3.5).

La notion de quasi-endomorphisme (1.3.4) se généralise aux groupes abéliens stables $\bigwedge$-définissables et dans ce cadre l'ensemble des quasi-endomorphismes est toujours muni d'une structure d'anneau (qui n'est pas nécessairement un corps) [Wa 97, Bu 96].

Dans le paragraphe qui suit, nous considérons uniquement les quasi-endomorphismes de groupes abéliens stables connexes $\bigwedge$-définissables et nous écrivons une preuve (nous n'en avons pas trouvé dans la littérature) du fait que les anneaux de quasi-endomorphismes sont stables par isogénie définissable (3.5.2).

Nous en déduisons que tout sous-groupe additif définissable connexe a un anneau de quasi-endomorphismes qui s'exprime simplement en fonction de l'anneau des quasi-endomorphismes de $(L, +)$ (3.5.5). De plus comme les sous-groupes minimaux additifs non localement modulaires sont définissablement isogènes à $(L^{p^\infty}, +)$ (3.1.25), nous en déduisons qu'ils ont même corps de quasi-endomorphismes et que l'on peut voir la locale modularité sur ce corps (3.5.9).

D'autre part nous montrons que tout quasi-endomorphisme d'un sous-groupe connexe $\bigwedge$-définissable de $(L, +)$ est la trace d'un quasi-endomorphisme de $(L, +)$ (3.5.6).

Nous construisons ensuite un sous-groupe additif minimal localement modulaire dont le corps de quasi-endomorphismes n'est pas un corps de fractions de l'anneau des endomorphismes définissables (3.5.16). Nous terminons par une construction de $2^{\aleph_0}$ sous-groupes minimaux additifs définis sur le vide et de rang de transcendance 1 dont le corps de quasi-endomorphismes est $\mathbb{F}_p$ et dont la structure induite est exactement la structure correspondante de $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel et est donc $\aleph_0$-catégorique (3.5.20).

3.5.1 Isogénies

On se place dans une structure M stable et saturée et on fixe un ensemble de paramètres A de cardinal strictement inférieur à celui de M. Dans toute la suite de cette sous-section, les définissables (resp. les $\bigwedge$-définissables) seront supposés définissables (resp. $\bigwedge$-définissables) sur $\mathrm{acl}^{eq}(A)$.

On fixe deux groupes abéliens G et H $\bigwedge$-définissables connexes. Comme M est stable ils sont intersections de groupes définissables.

L'hypothèse supplémentaire de connexité permet de donner une définition des quasi-endomorphismes (équivalente à celles données dans [Wa 97] ou [Bu 96])) qui n'utilise pas de relation d'équivalence :

Définition 3.5.1. Un sous-groupe S relativement définissable de $G \times H$ est un quasi-homomorphisme de G dans H si l'image de la projection de S sur G, $\pi_1(S)$, est G, si le conoyau de S ($\mathrm{coker}(S) = \{y \in H;\ (0, y) \in S\}$) est fini et si S est connexe.

Un quasi-endomorphisme de G est un quasi-homomorphisme de G dans G.

On note $\mathrm{QsH}(G, H)$ l'ensemble des quasi-homomorphismes de G dans H et $\mathrm{QsE}(G)$ l'ensemble des quasi-endomorphismes de G.

Les ensembles $\mathrm{QsH}(G, H)$ et $\mathrm{QsE}(G)$ sont munis respectivement d'une structure de groupe et d'une structure d'anneau par les opérations $+^0$ et $*^0$ que l'on peut définir de la manière suivante dans notre cadre (et que nous notons différemment de l'addition et multiplication usuelles afin de ne pas les confondre avec l'addition et la multiplication de sous-groupes) :

Définition. On définit les opérations $+^1$ et $+^0$ sur les sous groupes de $G \times H$, de la manière suivante : $S +^1 T := \{(x, y) \in (G, H);\ \exists y_1 y_2\ (y = y_1 + y_2) \wedge ((x, y_1) \in S) \wedge ((x, y_2) \in T)\}$ et $S +^0 T := (S +^1 T)^0$ (la composante connexe de $(S +^1 T)$).

On définit les opérations $*^1$ et $*^0$ sur les sous-groupes de $G \times G$, de la manière suivante : $S *^1 T := \{(x, z) \in (G, G);\ \exists y\ ((x, y) \in S) \wedge ((y, z) \in T)\}$ et $S *^0 T := (S *^1 T)^0$.

Nous vérifions maintenant que les isogénies définissent des isomorphismes entre les anneaux de quasi-endomorphismes :

Proposition 3.5.2. *Soient G, G', H et H' quatre groupes $\bigwedge$-définissables et connexes. Si G est définissablement isogène à G' et si H est définissablement isogène à H' alors les groupes* $\mathrm{QsH}(G, H)$ *et* $\mathrm{QsH}(G', H')$ *sont isomorphes et les anneaux* $\mathrm{QsE}(G)$ *et* $\mathrm{QsE}(G')$ *sont isomorphes.*

▷ Soient ϕ une isogénie définissable de G sur G' et ψ une isogénie définissable de H sur H'. Montrons que (ϕ, ψ) induit un isomorphisme de groupes entre $\mathrm{QsH}(G, H)$ et $\mathrm{QsH}(G', H')$ et que (ϕ, ϕ) induit un isomorphisme d'anneaux entre $\mathrm{QsE}(G)$ et $\mathrm{QsE}(G')$. Soient $S \in \mathrm{QsH}(G, H)$ et $T := (\phi, \psi)(S)$. Vérifions que $T \in \mathrm{QsH}(G', H')$. Comme *phi* est une isogénie, $\pi_1(T) = G'$. De plus

$$\mathrm{coker} T = \{t \in H';\ \exists (x, y) \in G \times H\ \phi(x) = 0 \wedge t = \psi(y)\}.$$

Donc $\mathrm{coker} T$ est fini puisque $\ker \phi$ et $\mathrm{coker} S$ sont fini. Montrons que T est connexe : soient U d'indice fini dans T et $V := (\phi, \psi)^{-1}(U) := \{(x, y);\ (\phi(x), \psi(y)) \in U\}$. On voit facilement que $V \cap S$ est d'indice fini dans S. Comme S est connexe, $S \subseteq V$ et donc $T = U$.

La fonction (ϕ, ψ) induit donc une application de $\mathrm{QsH}(G, H)$ dans $\mathrm{QsH}(G', H')$.

Pour S et T sous-groupes de $G \times H$, il est simple de vérifier que $(\phi, \psi)(S +^1 T) = ((\phi, \psi)(S)) +^1 ((\phi, \psi)(T))$.

Supposons de plus S et T dans $\mathrm{QsH}(G, H)$, alors

$$(\phi, \psi)(S +^0 T) = ((\phi, \psi)(S +^1 T))^0 = ((((\phi, \psi)(S)) +^1 ((\phi, \psi)(T)))^0.$$

Donc (ϕ, ψ) est un homomorphisme de groupes.

Soit $S \in \mathrm{QsH}(G, H)$. Si $(\phi, \psi)(S) = G' \times \{0\}$ alors $S \subseteq G \times \ker \psi$ d'où $S = G \times \{0\}$. Donc le noyau de cet homomorphisme est réduit à 0.

Soit $T \in \mathrm{QsH}(G', H')$. Soit $U = (\phi, \psi)^{-1}(T)$ alors $\pi_1(U) = G$, $\mathrm{coker} U$ est fini et $(\phi, \psi)(U^0) = T$.

Donc (ϕ, ψ) induit un isomorphisme de groupe de $\mathrm{QsH}(G, H)$ dans $\mathrm{QsH}(G', H')$ dont l'application inverse associe à $T \in \mathrm{QsH}(G', H')$, $((\phi, \psi)^{-1}(T))^0$.

Il reste à vérifier que (ϕ, ϕ) est un morphisme d'anneaux : si D est la diagonale de $G \times G$ alors $(\phi, \phi)(D)$ est la diagonale de $G' \times G'$. On vérifie facilement que pour tous sous-groupes S et T de $G \times G$, $(\phi, \phi)(S *^1 T) = \phi(S) *^1 \phi(T)$ et on en déduit de la même façon que pour l'addition ci-dessus que pour tous éléments S et T de $\mathrm{QsE}(G)$, $(\phi, \phi)(S *^0 T) = \phi(S) *^0 \phi(T)$. ◁

Terminons ce paragraphe avec un lemme simple mais un peu pénible à vérifier :

Lemme 3.5.3. *Soient G et H deux groupes $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissables et connexes. Le groupe $\mathrm{QsH}(G^{\times k}, H^{\times l})$ est isomorphe au groupe de matrices $\mathcal{M}_{k,l}(\mathrm{QsH}(G, H))$ et l'anneau $\mathrm{QsE}(G^{\times m})$ est isomorphe à l'anneau de matrices $\mathcal{M}_{m,m}(\mathrm{QsE}(G))$. Le premier isomorphisme θ se définit de la manière suivante : pour $S \in \mathrm{QsH}(G^{\times k}, H^{\times l})$ on associe $(S^0_{i,j})$ tel que*

$$S_{i,j} = \{(x, y);\ \exists \bar{y}, \bar{y}'\ (0, \dots, 0, x, 0, \dots, 0, \bar{y}, y, \bar{y}') \in S\}.$$

Réciproquement à $(T_{i,j}) \in \mathcal{M}_{k,l}(\mathrm{QsH}(G, H))$ on associe $\tilde{T}^0$ tel que

$$\tilde{T} = \{(\bar{x}, \bar{y});\ \exists (y_{i,j})\ y_j = \sum_i y_{i,j}\ \textit{et}\ (x_i, y_j) \in T_{i,j}\}.$$

▷ Notons pour cette preuve, $\mathrm{QsH}^1(G,H)$ l'ensemble des sous-groupes $\mathcal{M}$-définissables de $G\times H$ vérifiant les deux premières propriétés des quasi-homomorphismes (on enlève la propriété de connexité). Notons de même $\mathrm{QsH}^1(G^{\times k},H^{\times l})$.

Si $T\in \mathrm{QsH}^1(G^{\times k},H^{\times l})$ alors pour tout (i,j) $T_{i,j}\in \mathrm{QsH}^1(G,H)$ car $\mathrm{coker}T_{i,j}=\pi_j(\mathrm{coker}T)$.

Si S est un sous-groupe d'indice fini de T dans $\mathrm{QsH}^1(G^{\times k},H^{\times l})$ alors chaque $S_{i,j}$ est d'indice fini dans $T_{i,j}$.

Il est aussi facile de vérifier que pour tous S et T dans $\mathrm{QsH}^1(G^{\times k},H^{\times l})$,

$$(S+^1T)_{i,j}=S_{i,j}+^1T_{i,j}.$$

De ce qui précède on déduit que θ est un morphisme de groupes.

Si S est dans le noyau de ce morphisme alors chaque $S_{i,j}\subseteq G\times \mathrm{coker}S_{i,j}=G\times\pi_j(\mathrm{coker}S)$. On en déduit que $S\subseteq G^{\times k}\times\prod_j\pi_j(\mathrm{coker}S)$. Ce morphisme θ est donc injectif.

Pour montrer la surjectivité, on peut vérifier la relation suivante :
pour tout $(T_{i,j})\in\mathcal{M}_{k,l}(\mathrm{QsH}(G,H))$,

$$T_{i,j}\subseteq\tilde{T}_{i,j}\subseteq T_{i,j}+\{0\}\times\sum_{s\neq i}\mathrm{coker}T_{s,j}.$$

Donc $\tilde{T}^0$ est antécédent de $(T_{i,j})$.

Il reste à montrer que l'on a un morphisme d'anneaux entre les anneaux $\mathrm{QsE}(G^{\times m})$ et $\mathcal{M}_{m,m}(\mathrm{QsE}(G))$. Pour D la diagonale de $G^{\times m}\times G^{\times m}$ on a $D_{i,j}$ qui est la diagonale de $G\times G$.

Le plus pénible à vérifier est que $(S*^1T)_{i,j}$ et $\sum_s{}^1(S_{i,s}*^1T_{s,j})$ sont commensurables. Il est assez simple de voir que $\sum_s{}^1(S_{i,s}*^1T_{s,j})$ est d'indice fini dans $(S*^1T)_{i,j}$: on montre que

$$(S*^1T)_{i,j}\subseteq\sum_s{}^1(S_{i,s}*^1T_{s,j})+\{0\}\times\pi_j(\mathrm{coker}T).$$

En effet si $(x_i,z_j)\in(S*^1T)_{i,j}$, il existe $\bar z$ tel que z_j est le j-ème élément de $\bar z$ et tel que $(\bar 0,x_i,\bar 0,\bar z)\in S*^1T$. Il existe alors $\bar y$ tel que $(\bar 0,x_i,\bar 0,\bar y)\in S$ et $(\bar y,\bar z)\in T$. Pour chaque y_s il existe $\bar z_s$ tel que $(\bar 0,y_s,\bar 0,\bar z_s)\in T$. On a donc $(x,y_s)\in S_{i,s}$ et $(y_s,\bar z_{s,j})\in T_{s,j}$. D'autre part on voit facilement que $z_j-\sum_s\bar z_{s,j}\in\pi_j(\mathrm{coker}T)$.

Le second sens : soit $B=T(\prod_s\pi_s(\mathrm{coker}S))$ (c'est-à-dire l'ensemble des $\bar z$ tel qu'il existe $\bar y\in\prod_s\pi_s(\mathrm{coker}S)$ tel que $(\bar y,\bar z)\in T$).

On vérifie que

$$\sum_s{}^1(S_{i,s}*^1T_{s,j})\subseteq(S*^1T)_{i,j}+\pi_j(B).$$

En effet si $(x,z)\in\sum_s{}^1(S_{i,s}*^1T_{s,j})$, il existe $z_1,\dots,z_s$ et $y_1,\dots,y_s$ tels que $z=\sum_s z_s$, $(x,y_s)\in S_{i,s}$ et $(y_s,z_s)\in T_{s,j}$. Il existe alors $\bar y'$ tel que $\bar y'_1=y_1$ et $(\bar 0,x,\bar 0,\bar y')\in S$. Pour tout s, $\bar y'_s-y_s\in\pi_s(\mathrm{coker}S)$. Il existe $\bar z'$ tel que $(\bar y',\bar z')\in T$. On a alors $(x,\bar z'_j)\in(S*^1T)_{i,j}$ et $z-\bar z'\in B$. ◁

3.5.2 Quasi-endomorphismes de sous-groupes additifs

Le corps K joue ici le rôle de l'ensemble de paramètres A de la partie précédente. Comme K est une sous-structure élémentaire de L, tout définissable sur $\mathrm{acl}^{eq}(K)$, l'est sur K.

Nous montrons que comme pour les endomorphismes, tout quasi-endomorphisme d'un sous-groupe additif est restriction d'un quasi-endomorphisme du groupe additif entier (3.5.6).

Dans [BD2] E. Bouscaren et F. Delon montrent le lemme suivant :

Lemme 3.5.4. *Soit G un sous-groupe λ_0-fermé de $(L^{\times k}, +)$ défini sur K. Alors il existe une isogénie ϕ définissable sur K de $(L^{\times k}, +)$ tel que $\phi(G) = L^{\times m} \times \{0\}^{\times (k-m)}$ ($m = dim(\bar{G})$).*

Remarque. On peut remarquer que l'isogénie est définie par des p-polynômes mais par contre on n'a pas a priori $G = \phi^{-1}(L^{\times m} \times \{0\}^{\times (k-m)})$.

En utilisant la proposition 3.5.2, on déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 3.5.5. *Soit G un sous-groupe connexe λ_0-fermé de $(L^{\times k}, +)$ défini sur K. Alors $\mathrm{QsE}(G)$ est isomorphe à $\mathrm{QsE}((L^{\times m}, +)) = \mathcal{M}_{m,m}(\mathrm{QsE}((L, +)))$ où $m = dim(\bar{G})$.*

Du lemme précédent, on déduit un autre résultat :

Corollaire 3.5.6. *Soit G un sous-groupe connexe λ-fermé de $(L, +)$ défini sur K. Alors tout quasi-endomorphisme de G se prolonge en un quasi-endomorphisme de $(L, +)$.*

$\triangleright$ Soit $S \in \mathrm{QsE}(G)$. Le groupe S est connexe et est une intersection décroissante de sous-groupes définissables S_i de $(L \times L, +)$. Par compacité on peut supposer que $\mathrm{coker} S_0 = \mathrm{coker} S$. De même G est une intersection décroissante de sous-groupes définissables G_j de $(L, +)$. Par la proposition 3.1.20 on peut supposer les G_j connexes.

Par compacité il existe j tel que que $\pi_1(S_0) \supseteq G_j$.
Soit $T = (S_0 \cap (G_j \times L))^0$. Alors $T \supseteq S$ et $T \in \mathrm{QsH}(G_j, L)$.

Il existe un entier n tel que G_j est λ_n-fermé.
Soit $H = \lambda_n(G_j)$ et $U = (\lambda_n, id)(T)$.

Le groupe H est un sous-groupe λ_0-fermé de $(L^{\times p^{\nu n}}, +)$. Donc il existe une isogénie définissable ϕ de $(L^{\times p^{\nu n}}, +)$ qui envoie H sur $L^{\times k} \times \{0\}^{\times p^{\nu n} - k}$ (3.5.4). Ainsi on a une isogénie définissable ψ de H dans $(L^{\times k}, +)$. Soit $V = (\psi, id)(U)$. Donc $V \in \mathrm{QsH}(L^{\times k}, L)$. Soit $W \in \mathrm{QsH}(L^{\times p^{\nu n}}, L)$ défini par $W = \{(x, z, y);\ (x, y) \in V \text{ et } z \in L^{\times p^{\nu n} - k}\}$. Soit $X = (\phi, id)^{-1}(W)$. On a $X \supseteq U$.

Enfin soit $Y = (\lambda_n, id)^{-1}(X)$. Alors $Y \supseteq T \supseteq S$ et $Y \in \mathrm{QsE}((L, +))$. $\triangleleft$

Dans le cas particulier du groupe $(L, +)$ on a le petit lemme suivant :

Lemme 3.5.7. *Pout tout $S \in \mathrm{QsE}((L, +))$ il existe un endomorphisme T de $(L, +)$ tel que $S *^0 T$ est un endomorphisme de $(L, +)$. De plus cet endomorphisme T est défini par un p-polynôme de $K[X]$ (c'est-à-dire $T \in K\{\alpha\}$).*

▷ coker$S$ est un sous-groupe fini définissable sur K de $(L,+)$. Le p-polynôme P qui définit coker$S$ est dans $K[X]$. Soit T le graphe de ce p-polynôme. On a alors $\text{coker}(S *^0 T) = \{0\}$. ◁

On a le même lemme pour le groupe $(L^{p^\infty},+)$ avec la même démonstration.

Lemme 3.5.8. $\text{QsE}((L^{p^\infty},+))$ *est égal à* $= K^{p^\infty}\{\alpha,\alpha^{-1}\}$*, c'est à dire l'unique corps de fractions de* $\text{End}_K((L^{p^\infty},+))$.

▷ Pout tout $S \in \text{QsE}((L^{p^\infty},+))$ il existe un endomorphisme T de $(L^{p^\infty},+)$ tel que $S *^0 T$ est un endomorphisme de $(L^{p^\infty},+)$. De plus cet endomorphisme T est défini par un p-polynôme de $K^{p^\infty}[X]$.

Comme $(L^{p^\infty},+)$ est minimal $\text{QsE}((L^{p^\infty},+))$ est un corps et donc un corps de fractions de $\text{End}_K((L^{p^\infty},+)) = K^{p^\infty}\{\alpha,\alpha^{-1}\}$.

$K^{p^\infty}\{\alpha\}$ est un anneau de Ore à gauche car principal à gauche (en fait comme K^{p^∞} est un corps parfait $K^{p^\infty}\{\alpha\}$ est aussi principal à droite donc de Ore à droite). On en déduit que $K^{p^\infty}\{\alpha,\alpha^{-1}\}$ est aussi un anneau de Ore à gauche : en effet si g et h sont deux éléments non nuls de $K^{p^\infty}\{\alpha,\alpha^{-1}\}$ alors il existe m tel que $\alpha^m g$ et $\alpha^m h$ sont deux éléments non nuls de $K^{p^\infty}\{\alpha\}$, d'où

$$K^{p^\infty}\{\alpha,\alpha^{-1}\}g \cap K^{p^\infty}\{\alpha,\alpha^{-1}\}h \supseteq K^{p^\infty}\{\alpha\}\alpha^m g \cap K^{p^\infty}\{\alpha\}\alpha^m h \neq \{0\}.$$

$K^{p^\infty}\{\alpha,\alpha^{-1}\}$ étant un anneau de Ore, il a un unique corps de fraction [Co 71]. ◁

Proposition 3.5.9. *Soit G un sous-groupe minimal additif $\curlywedge\!\!\curlywedge$-définissable sur K. Si $|K| > \aleph_0$ alors le corps des quasi- endomorphismes définissables sur K de G est isomorphe au corps de fractions de $K^{p^\infty}\{\alpha,\alpha^{-1}\}$ si et seulement si G est non localement modulaire.*

▷ Si G est non localement modulaire alors G est isogène à $(L^{p^\infty},+)$ (3.1.25), donc par (3.5.2), $\text{QsE}_K(G)$ est isomorphe à $\text{QsE}_K(L^{p^\infty},+)$.

Le groupe G est un λ-fermé. Il existe donc un sous-corps K_0 dénombrable de définition de G (3.1.7).

Si G est localement modulaire alors $\text{QsE}_K(G) = \text{QsE}_{K_0}(G)$ (1.3.5).
Donc $\text{QsE}_K(G)$ est dénombrable ce qui n'est pas le cas de $\text{QsE}_K(L^{p^\infty},+)$. ◁

3.5.3 Corps des quasi-endomorphismes et anneaux des endomorphismes

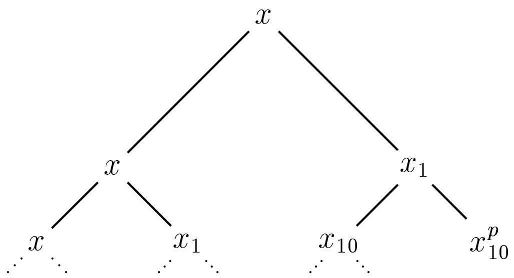
Remarque 3.5.10. Soit $G = \{x;\ \exists y \in L^{p^\infty},\ x = x^p + by^p\}$ le groupe considéré dans la proposition 3.4.3. Le groupe G est définissablement isogène à $(L^{p^\infty},+)$ donc a même corps de quasi-endomorphismes (3.1.25). Par contre l'anneau des endomorphismes définissables de G est réduit à $\mathbb{F}_p$ (3.4.3). Donc G est un exemple de groupe minimal non localement modulaire dont le corps de quasi-endomorphismes n'est pas un corps de fractions de son anneau d'endomorphismes.

Nous allons voir qu'il existe aussi des exemples localement modulaires. Ceci est plus intéressant. Cela signifie qu'il existe un sous-groupe H de $(L,+)$ localement modulaire dont la structure induite est plus riche que sa structure de module sur son anneau d'endomorphismes.

Remarque. On peut choisir ce groupe H $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissable sur le vide (3.5.16) et donc par (3.3.3 et 3.3.5) ce groupe est $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$-définissable dans la structure de module $L_{\mathbb{F}_p(B)^{sep}-mod}$ et la structure induite sur H par L est identique à celle induite par $L_{\mathbb{F}_p(B)^{sep}-mod}$. Ce contre exemple se réalise donc dans une structure de module.

Définition. Soit $H := \{x;\ \exists y \in G_1,\ x = x^p + by^p\}$ où G_1 est le sous-groupe de $(L,+)$ de la proposition 3.4.17, $G_1 = \{x \in L;\ x_{\bar{0}(n)} = x^p_{\bar{0}(n+1)} + x^{p^2}_{\bar{0}(n+1)}b$ pour tout $n \in \omega\}$, et b est le premier élément de la p-base.

Donc H est un sous-groupe de $(L,+)$ définissablement isogène à G_1.



Groupe H

Nous allons montrer que H est minimal et que son anneau d'endomorphismes est réduit à $\mathbb{F}_p$.

Soient la suite Q_n de polynômes de $K[Y]$ définie par

$$Q_0(Y) = Y^p \text{ et } Q_{n+1}(Y) = Q_n(Y^p + bY^{p^2})$$

et la suite P_n de polynômes de $K[X,Y]$ définie par

$$P_n(X,Y) = X^p - X + bQ_n(Y).$$

Il est simple de voir que $x \in H$ si et seulement si pour tout $n \in \omega$, $P_n(x, x_{1\bar{0}(n)}) = 0$.

Les lemmes suivants montrent que les polynômes P_n sont irréductibles.

Lemme 3.5.11. *Pour tout n, il existe $(s_{i,n}) \in \mathbb{F}_p(B)$ et $t_n \in \omega$ tels que $Q_n(Y) = \sum_{0\leq i\leq n} s_{i,n}Y^{p^{n+1+i}}$ et $s_{n,n} = b^{pt_n}$*

▷ On fait la preuve par induction sur n.
Pour $n = 0$, $t_0 = 0$.

Supposons le résultat vrai pour n.

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(Y) &= Q_n(Y^p + bY^{p^2}) \\ &= \sum_{i=0}^{n} s_{i,n}(Y^{p^{(n+2)+i}} + b^{p^{n+1+i}} Y^{p^{(n+2)+1+i}}). \end{aligned}$$

En particulier $s_{n+1,n+1} = s_{n,n} b^{p^{2n+1}}$. Donc $s_{n+1,n+1} = b^{p(t_n + p^{2n})}$ et $t_{n+1} = t_n + p^{2n}$. ◁

Corollaire 3.5.12. *Pour tout n, il n'existe pas de polynôme A dans $\bar{K}[Y]$ tel que $A - A^p = bQ_n(Y)$.*

▷ Si pour un n, on a un tel polynôme A. Alors A est un p-polynôme car la dérivée de Q_n est nulle.

Donc $A(Y) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i Y^{p^{n+1+i}}$ et $bQ_n(Y) = \sum_{i=0}^{n-1}(c_i Y^{p^{n+1+i}} - c_i^p Y^{p^{n+2+i}})$. Il suit que $bs_{0,n} = c_0$, pour $0 < i < n$, $bs_{i,n} = c_i - c_{i-1}^p$ et $bs_{n,n} = -c_{n-1}^p$.

Ceci donne l'équation suivante :

$$\sum_{i=0}^{n} (bs_{i,n})^{p^{n-i}} = 0.$$

Par (3.5.11), on obtient l'équation $a^p + bb^{pt_n} = 0$ en posant $a = \sum_{i=0}^{n-1}(bs_{i,n})^{p^{n-1-i}}$ ce qui est impossible car b n'appartient pas à L^p. ◁

Corollaire 3.5.13. *Les polynômes P_n sont irréductibles dans $\bar{K}[X, Y]$.*

▷ On considère $P_n(X)$ comme polynôme de $\bar{K}(Y)[X]$. Si $P_n(X)$ est réductible sur $\bar{K}(Y)$ alors d'après le théorème d'Artin-Schreier $P_n(X) = X^p - X + bQ_n(Y)$ a une racine dans $\bar{K}(Y)$. (Un polynôme de la forme $X^p - X - c$ sur un corps de caractéristique p est soit irréductible soit scindé.) Comme $\bar{K}[Y]$ est factoriel, cette racine est dans $\bar{K}[Y]$. Ceci est impossible d'après le corollaire 3.5.12. Donc les polynômes P_n sont irréductibles. ◁

Proposition 3.5.14. *Le groupe H est minimal et son anneau d'endomorphismes est réduit à $\mathbb{F}_p$.*

▷ Montrons que H est minimal.

Le groupe H est de RU $= 1$ car il est définissablement isogène à G_1 qui est minimal. Il reste à montrer qu'il est connexe.

Soit J l'idéal de $K[X_\infty]$ engendré par les polynômes P_n et I^0. On sait que $H = V(J)$ et il suffit donc de montrer que J est premier séparable. Considérons pour cela les idéaux J_{n+1} de $K[X_{\leq n+1}]$ engendré par $I^0_{\leq n+1}$ et P_n, et montrons que ces idéaux sont premiers séparables.

Pour tout $n \in \omega$,

$$K[X_{\leq n+1}]/J_{n+1} \simeq K[X/J_{n+1}, X_{1\bar{0}(n)}/J_{n+1}].$$

Or $Z := X_{1\bar{0}(n)}/J_{n+1}$ est transcendant sur K et $T := X/J_{n+1}$ est séparablement algébrique sur $K[Z]$ par le polynôme $P_n(T, Z) = T - T^p + bQ_n(Z)$ qui est irréductible dans $K[Z, T]$ (3.5.13) et séparable en la variable T.

Montrons maintenant qu'un endomorphisme de H est nécessairement un élément de $\mathbb{F}_p$. Posons pour cela, pour tout $n \in \omega$, $H_n := V(I(H)_{\leq n})$ et montrons le petit lemme suivant :

Lemme 3.5.15. *Soit $n \in \omega$. Posons $Y := X_{1\bar{0}(n)}$. Soit R un p-polynôme dans $K[X,Y] \cap I(H)_{\leq n+1}$. Alors $R \in < P_n >$ et en particulier ou bien $\deg_Y R \geq \deg Q_n$, ou bien R est nul.*

$\triangleright$ [Preuve de 3.5.15] Soient x réalisant le générique de H_n sur K, $y := x_{1\bar{0}(n)}$ et R un p-polynôme dans $K[X,Y] \cap I(H)_{\leq n+1}$.

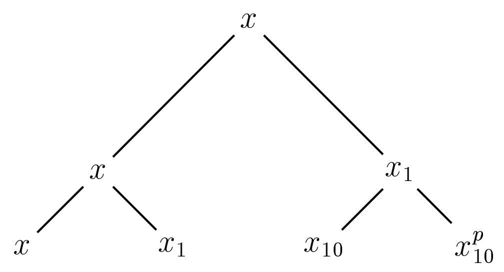
Montrons par induction sur $\deg_X R$ qu'il existe $S \in K[X,Y]$ tel que $\deg_X(R - SP_n) \leq 1$: supposons que $\deg_X R = p^{n+1}$. Alors il existe $R' \in K[X,Y]$ tel que $\deg_X R' \leq p^n$ et $R(X,Y) = R'(X,Y) + aX^{p^{n+1}}$. Or $(X^p)^{p^n} = (X + P_n(X,Y) - bQ_n(Y))^{p^n}$. D'où

$$R(X,Y) = R'(X,Y) + a(X + P_n(X,Y) - bQ_n(Y))^{p^n}$$

et donc $\deg_X(R - aP_n^{p^n}) \leq p^n$.

Soit $S \in K[X,Y]$ tel que $\deg_X(R - SP_n) \leq 1$. Alors $R - SP_n = 0$ puisque $(R - SP_n)(x,y) = 0$, $x \notin K[y]$ et $y \notin \bar{K}$. $\triangleleft$

Reprenons la preuve de (3.5.14) : soit τ un endomorphisme non nul de H. D'après la proposition 3.4.4 τ s'étend en un endomorphisme de $(L,+)$.
Par compacité il existe $m > 0$ tel que $\tau(H_m) \subseteq H_2$.



Groupe H_2

Par ailleurs il existe $n \geq m$ et R un p-polynôme de $K[X_{=n+1}]$, tels que pour tout $x \in L$, $\tau(x) = R(x_{=n+1})$ (3.3.1).

On a alors S un p-polynôme de $K[X,Y]$ tel que pour tout $x \in H_{n+1}$, $\tau(x) = S(x,y)$ où $y := x_{1\bar{0}(n)}$. Par le même type de preuve que celle de (3.5.15), on peut supposer que $\deg_Y(S) < \deg_Y(P_n)$.

Ceci donne pour tout $x \in H_{n+1}$

$$\tau(x) = \sum_{i=0}^{l} a_i x^{p^i} + \sum_{j=0}^{k} c_j y^{p^j} \text{ tel que } p^k < \deg Q_n.$$

Par ailleurs comme $\tau(H_{n+1}) \subseteq H_1$ on a sur H_{n+1}

$$\tau = \tau^p + b(f_1 \circ \tau)^p.$$

D'où

$$f_0 \circ \tau = \tau \text{ et}$$

$$f_i \circ \tau = 0 \text{ pour tout } i \in p^\nu \setminus \{0,1\}.$$

D'autre part (cela ne nous servira que pour $p = 2$), comme $\tau(H_{n+1}) \subseteq H_2$ et par définition de G_1, on a sur H_{n+1}

$$f_1 \circ f_1 \circ \tau = (f_0 \circ f_1 \circ \tau)^p.$$

On se place sur H_{n+2}, de façon que $y\ (= x_{1\bar{0}(n)}) = y_0^p + by_0^{p^2}$ et $x = x^p + bx_1^p$.

On calcule $f_0 \circ \tau$: pour tout $x \in H_{n+2}$,

$$f_0 \circ \tau(x) = a_{0,0}x + a_{0,p-1}bx_1 + \sum_{i=1}^{l} a_{i,0}x^{p^{i-1}} + c_{0,0}y_0 + c_{0,p-1}by_0^p + \sum_{j=1}^{k} c_{j,0}y^{p^{j-1}}.$$

(Ce sont toujours les notations suivantes : $a_{0,0} = f_0(a_0)$, $a_{0,p-1} = f_{p-1}(a_0)$,.... (voir 3.1.2)).

Il existe $Q'_{n+1} \in K[Y]$ tel que $Q_{n+1}(Y) = Q_0(Q'_{n+1}(Y)) = (Q'_{n+1}(Y))^p$. Ainsi x_1 ($= f_1(x)) = Q'_{n+1}(y_0)$.

En remplaçant, y par $y_0^p + by_0^{p^2}$ et x_1 par $Q'_{n+1}(y_0)$, on obtient :

$$\begin{aligned} f_0 \circ \tau(x) &= a_{0,0}x + a_{0,p-1}bQ'_{n+1}(y_0) + \sum_{i=1}^{l} a_{i,0}x^{p^{i-1}} \\ &\quad + b_{0,0}y_0 + c_{0,p-1}by_0^p + \sum_{j=1}^{k} c_{j,0}(y_0^p + by_0^{p^2})^{p^{j-1}}. \end{aligned}$$

Alors du fait que $f_0 \circ \tau = \tau$, on en déduit que pour tout $x \in H_{n+2}$,

$$T(x, x_{1\bar{0}(n+1)}) = 0$$

avec

$$\begin{aligned} T(X,Y) &= \sum_{i=0}^{l} a_i X^{p^i} - (a_{0,0}X + \sum_{i=1}^{l} a_{i,0}X^{p^{i-1}}) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k} c_j (Y^p + bY^{p^2})^{p^j} \\ &\quad - (a_{0,p-1}bQ'_{n+1}(Y) + c_{0,0}Y + c_{0,p-1}bY^p + \sum_{j=1}^{k} c_{j,0}(Y^p + bY^{p^2})^{p^{j-1}}). \end{aligned}$$

Comme $p^k < \deg Q_n$, on a $\deg_Y(T) \leq \max\{p^{k+2}, \deg Q'_{n+1}\} < \deg(Q_{n+1}) = p^2 \deg(Q_n)$ donc T est nul (3.5.15).

La nullité de T implique que pour tout $x \in H_{n+2}$, $\tau(x) = a_0 x + \sum_{j=0}^{k} c_j y^{p^j}$ avec $a_0 = a_{0,0}$.

Nous allons maintenant montrer que $a_{0,p-1}$ est nul ainsi la nullité de T impliquera que $\tau(x) = a_0 x$.
Pour $p > 2$, c'est très simple : il suffit de considérer $f_{p-1} \circ \tau$ qui est nul. On a pour pour tout $x \in H_{n+2}$,

$$f_{p-1} \circ \tau(x) = a_{0,p-1}x + a_{0,p-2}x_1 + \text{termes en } y_0 \text{ de degré } < \deg(Q_{n+1}).$$

Toujours par (3.5.15) $a_{0,p-1} = 0$.

Pour $p = 2$, on se place sur H_{n+3}, ainsi on a $y_0 = y_{00}^p + b y_{00}^{p^2}$ et on utilise la relation suivante :

$$f_1 \circ f_1 \circ \tau = (f_0 \circ f_1 \circ \tau)^p.$$

On a

$$f_1 \circ \tau(x) = a_{0,1}x + a_{0,0}x_1 + c_{0,1}y_0 + c_{0,0}y_0^p + \sum_{j=1}^{k} c_{j,1} y^{p^{j-1}}.$$

En remplaçant, y par $y_0^p + b y_0^{p^2}$ et x_1 par $Q'_{n+1}(y_0)$ on obtient :

$$f_1 \circ \tau(x) = a_{0,1}x + S(y_0)$$

où S est un p-polynôme de $K[Y]$ de degré strictement inférieur à celui de Q_{n+1}. On calcule $f_1 \circ f_1 \circ \tau$ en remplaçant y_0 par $y_{00}^p + b y_{00}^{p^2}$, on obtient ainsi :

$$f_1 \circ f_1 \circ \tau(x) = a_{0,11}x + a_{0,10}x_1 + S_1(y_{00}).$$

avec $p \deg(S_1) < \deg(Q_{n+2})$. De même on a :

$$f_0 \circ f_1 \circ \tau(x) = a_{0,10}x + a_{0,11}bx_1 + S_0(y_{00}).$$

avec $p \deg(S_0) < \deg(Q_{n+2})$. D'où

$$(f_0 \circ f_1 \circ \tau(x))^p = a_{0,10}^p x^p + a_{0,11}^p b^p x_1^p + S_0^p(y_{00}).$$

On a d'une part $x_1 = Q'_{n+2}(y_{00})$ avec $\deg(Q_{n+2}) = p \deg(Q'_{n+2})$ et d'autre part $bx_1^p = x - x^p$. Avec ces relations et l'équation $f_1 \circ f_1 \circ \tau = (f_0 \circ f_1 \circ \tau)^p$ on en déduit l'équation suivante sur H_{n+3} :

$$a_{0,11}x + a_{0,10}Q'_{n+2}(y_{00}) + S_1(y_{00}) = a_{0,10}^p x^p + b a_{0,11}^p (x - x^p) + S_0^p(y_{00}).$$

Les degrés des polynômes Q'_{n+2}, S_1 et S_0^p sont strictement inférieurs à celui de Q_{n+2}, donc le polynôme $a_{0,11}X - a_{0,10}^p X^p - b a_{0,11}^p (X - X^p)$ est nul. D'où $a_{0,10}^p = b a_{0,11}^p$ (3.5.15).

Pour tout $i \in 2^\nu \setminus \{0,1\}$, en calculant $f_i \circ f_1 \circ \tau$ on obtient $a_{0,1\frown i} = 0$ (3.5.15). Ainsi $a_{0,1} = a_{0,10}^p + ba_{0,11}^p = 2a_{0,10}^p = 0$.

On a donc montré que pour tout p, $a_{0,p-1} = 0$ et donc que le terme en x_1 (qui vaut $a_{0,p-1}bx_1 = a_{0,p-1}bQ'_{n+1}(y_0)$) dans $f_0 \circ \tau$ disparaît. On en déduit par nullité de T que $\tau(x) = a_0 x$ sur H_{n+2} avec $a_0 = a_{0,0}$.

Maintenant nous utilisons le fait que $\tau = \tau^p + b(f_1 \circ \tau)^p$ sur H_{n+2} :

$$\begin{aligned} a_0 x &= (a_0 x)^p + b(a_{0,1}x + a_{0,0}x_1)^p \\ &= a_0^p x^p + ba_{0,1}^p x^p + a_0^p(bx_1^p) \\ &= a_0^p x^p + ba_{0,1}^p x^p + a_0^p(x - x^p). \end{aligned}$$

D'où $a_0 = a_0^p$ et donc $a_0 \in \mathbb{F}_p$. ◁

Corollaire 3.5.16. *Le groupe H est un exemple de sous-groupe additif minimal $\mathcal{M}$-définissable sur $\emptyset$ localement modulaire dont le corps des quasi-endomorphismes n'est pas un corps de fractions de l'anneau des endomorphismes.*

▷ Le groupe H est définissablement isogène à G_1 donc il est localement modulaire et a même corps de quasi-endomorphismes (3.5.2). Par (3.4.17), ce corps est infini (il contient $\mathbb{F}_p(X)$) alors que l'anneau des endomorphismes définissables de H est réduit à $\mathbb{F}_p$ (3.5.14). ◁

Tout sous-groupe minimal additif non localement modulaire est définissablement isogène à $(L^{p^\infty}, +)$ (3.1.25) dont le corps de quasi- endomorphismes est l'unique corps de fractions de l'anneau d'endomorphismes. Voici un résultat du même type pour tous les sous-groupes minimaux additifs dont la clôture algébrique du vide est finie :

Proposition 3.5.17. *Soit G un sous-groupe minimal additif $\mathcal{M}$-définissable sur k_0. Si $G_{k_0} = G \cap k_0$ est fini alors il existe un sous-groupe minimal additif H tel que G est définissablement isogène à H et tel que $\mathrm{QsE}_{k_0}(H) = \mathrm{End}_{k_0}(H)$.*

▷ G_{k_0} est fini donc k_0-définissable. Soit P le polynôme ayant comme ensemble de racines G_{k_0}. Alors P est un p-polynôme de $k_0[X]$ (3.2.4). Soit $H := P(G)$. Le p-polynôme P définit une isogénie ϕ de G sur H. Donc H est minimal et $H_{k_0} = \{0\}$ car $G_{k_0} = \ker \phi$. Donc $\mathrm{QsE}_{k_0}(H) = \mathrm{End}_{k_0}(H)$. ◁

Question 3.5.18. Nous ne savons pas si les hypothèses de la proposition précédente sont nécessaires et donc si tout sous-groupe additif minimal est définissablement isogène à un sous-groupe additif minimal dont le corps de quasi-endomorphismes est un corps de fractions de l'anneau des endomorphismes ?

3.5.4 Construction de sous-groupes minimaux additifs et $\aleph_0$-catégoriques

Nous reprenons la construction de groupes de RT = 1 de la proposition 3.4.18. Le lemme suivant montre que l'on peut choisir ψ tel que $\mathrm{acl}(\emptyset) \cap G_\psi = \{0\}$, ainsi $\mathrm{QsE}(G_\psi) = \mathbb{F}_p$, et par (1.3.6), la structure induite sur G_ψ est exactement sa structure de $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel, et donc G_ψ est $\aleph_0$-catégorique.

Lemme 3.5.19. *Il existe une application ϕ de ω dans ω telle que si ψ est une autre application de ω dans ω telle que $\psi(n) \neq \phi(n)$ pour tout $n \in \omega$ alors* $\mathrm{acl}(\emptyset) \cap G_\psi = \{0\}$.

▷ Soit (a_n) une énumération de $\mathrm{acl}(\emptyset) = \mathbb{F}_p(B)^{sep}$. On construit ϕ par induction : pour $n \in \omega$, on suppose que ϕ est construit sur l'ensemble n.

Ou bien $a_{n,\bar{0}(n)01} = 0$ et dans ce cas on définit $\phi(n) = 0$.

Ou bien $a_{n,\bar{0}(n)01} \neq 0$. Alors il existe au plus un entier l tel que $a_{n,\bar{0}(n)1} = a_{n,\bar{0}(n)0}^{p^l}$. Sinon si pour $l_1 < l_2$, $a_{n,\bar{0}(n)1} = a_{n,\bar{0}(n)0}^{p^{l_1}} = a_{n,\bar{0}(n)0}^{p^{l_2}}$ alors $a_{n,\bar{0}(n)0} = a_{n,\bar{0}(n)0}^{p^{l_2-l_1}}$ d'où $a_{n,\bar{0}(n)01} = 0$. Si l existe on pose $\phi(n) = l$ sinon on pose $\phi(n) = 0$.

Soit ψ une application de ω dans ω. Si il existe n tel que $a_n \in G_\psi$, alors $a_{n,\bar{0}(n)01} = 0$ ou $a_{n,\bar{0}(n)1} = a_{n,\bar{0}(n)0}^{p^{\phi(n)}}$. Si $a_{n,\bar{0}(n)01} = 0$ on vérifie alors que $a_{n,\bar{0}(n)00} = 0$ et donc par induction que $a_n = 0$. Sinon $\psi(n) = \phi(n)$. ◁

Corollaire 3.5.20. *Pour tout entier $m > 0$, il existe $2^{\aleph_0}$ sous-groupes minimaux additifs $\bigwedge\!\!\bigwedge$-définissables sur $\emptyset$ $\aleph_0$-catégoriques et deux à deux orthogonaux qui ont tous exactement comme structure induite, une structure de $\mathbb{F}_{p^m}$-espace vectoriel et qui ont tous une clôture algébrique du vide triviale.*

▷ Reprenons la preuve de (3.4.23) en ajoutant la condition supplémentaire suivante sur les suites p_n et q_n : pour tout entier n, $p_n > \phi(n)$ et $q_n > \phi(n)$ (où ϕ est l'application du lemme 3.5.19).

Les $G_{m\psi_\alpha}$ sont des sous-groupes minimaux deux à deux orthogonaux dont l'anneau des endomorphismes est réduit à F_{p^m}. Par (3.5.19) pour tout α, $G_{m\psi_\alpha} \cap \mathrm{acl}(\emptyset) = \{0\}$. Donc pour tout α le corps de quasi-endomorphismes de G_{ψ_α} est réduit à $\mathbb{F}_{p^m}$ et par (1.3.6) $G_{m\psi_\alpha}$ a pour structure induite une structure de $\mathbb{F}_{p^m}$-espace vectoriel. ◁

Remarque. Deux groupes minimaux localement modulaires de clôture algébrique du vide réduite à $\{0\}$ sont non orthogonaux si et seulement si ils sont définissablement isomorphes (1.3.9). Le corollaire précédent est donc équivalent à l'existence de $2^{\aleph_0}$ sous-groupes non définissablement isomorphes de $(L, +)$ ayant ces propriétés.

3.6 Sous-groupes additifs de rang ω

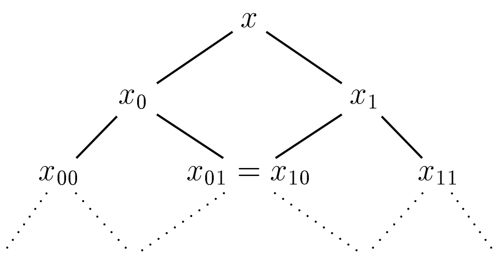
Dans [CCSSW] il est construit des types triviaux dans L de rang U égal à ω. Nous donnons ici une construction de types non triviaux dans L de rang U égal à ω. On utilise pour cela un sous-groupe de $(L, +)$ que l'on appelle le grill et qui est d'ailleurs un candidat possible pour un tel type mais dont on ne sait s'il est rangé.

Notre construction montre qu'il existe une infinité de sous-groupes additifs de rang U égal à ω dont les types génériques sont deux à deux orthogonaux (3.6.6). Certains sont 1-basés d'autres non (3.6.7 et 3.6.8). Il existe ainsi pour tous entiers n et m des sous-groupes additifs de rang égal à $\omega \cdot n + m$ (3.6.10). Par contre nous ne savons pas en construire de rang égal à ω^2.

Nous fixons pour cette partie une sous-structure élémentaire dénombrable K de L sur laquelle tous les groupes et types seront définis. On peut prendre pour K le modèle premier $\mathbb{F}_p(B)^{sep}$.

Définition. Le grill est défini de la manière suivante : $x \in Grill$ si et seulement si pour tout n, pour tout $i \in (p^\nu)^{<\omega}$, $x_{i01} = x_{i10}$ et si i n'est pas une suite de $0, 1 \in p^\nu$ alors $x_i = 0$ (c'est-à-dire si $i \notin \{0,1\}^{<\omega}$). (Rappelons que $x_i = f_i(x)$, $x_{i01} = f_1 \circ f_0(x_i)$ et $x_{i10} = f_0 \circ f_1(x_i)$ (3.1.2).)

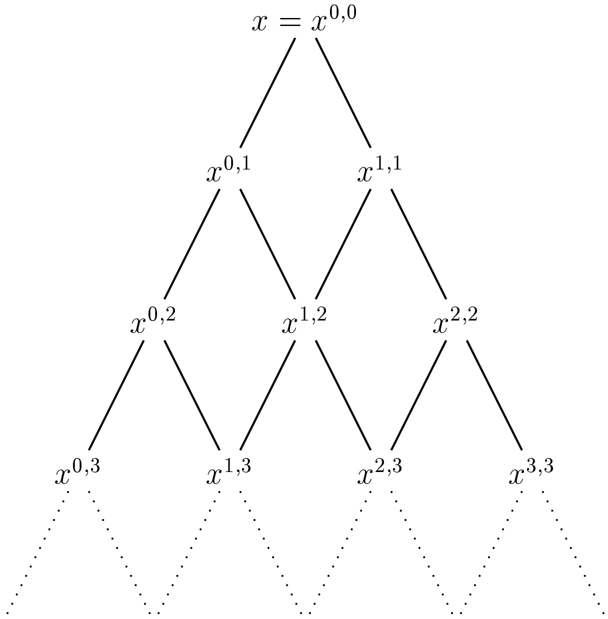
$Grill$:



Par la définition du grill, pour tout $n \in \omega$ et pour tout $i \in p^{\nu n}$, si $x \in Grill$ alors ou bien $x_i = 0$, ou bien x_i est égal à l'un des éléments $f_1^j \circ f_0^{n-j}(x)$ pour $j \leq n$.

Par la suite on ne s'interesse donc qu'aux indices dans $\{0,1\}^{<\omega}$. Pour tout $x \in Grill$ et toute hauteur n, on note $x^{0,n}, \ldots, x^{n,n}$ les $n+1$ composantes (de gauche à droite) de x à hauteur n susceptibles d'être algébriquement indépendantes : c'est-à-dire pour tout $j \leq n$, $x^{j,n} := f_1^j \circ f_0^{n-j}(x)$. En fait le grill n'impose pas de relation algébrique entre les éléments $x^{0,n}, \ldots, x^{n,n}$.

Voici l'arbre des composantes du grill avec ces notations :



Par les remarques précédentes, on voit facilement que l'idéal de $K[X_\infty]$, $I(Grill)$ correspond au type complet p_{Grill} au-dessus de K, défini par $x \in Grill$ et pour tout n, les composantes $x^{0,n}, \dots , x^{n,n}$ sont algébriquement indépendantes au-dessus de K. Le grill est donc un groupe connexe dont le type générique est p_{Grill}.

Remarque 3.6.1. Soit $a \models p_{Grill}$. Pour tout $n \in \omega$, les éléments $a^{0,n}, \dots , a^{n,n}$ sont algébriquement indépendants mais ne sont pas indépendants au sens de la théorie des modèles si $n \geq 3$. En effet pour tout $0 \leq j \leq j' \leq n$,

$$a^{j,n}, \dots , a^{j',n} \in K\!<\!a^{j,n}, a^{j',n}\!>$$

et en fait que pour tout $m \geq n$ et $k \in \{j, \dots , j' + m - n\}$,

$$a^{k,m} \in K\!<\!a^{j,n}, a^{j',n}\!>.$$

Par contre on peut démontrer, par un simple argument de compacité, que pour tout $0 \leq j < j' \leq n$, $a^{j,n}$ n'est pas algébrique au sens de la théorie des modèles sur $K \cup \{a^{j+1,n}, \dots , a^{n,n}\}$ et $a^{j',n}$ n'est pas non plus algébrique au sens de la théorie des modèles sur $K \cup \{a^{0,n}, \dots , a^{j'-1,n}\}$.

Lemme 3.6.2. *Le grill n'est pas de rang U fini et pour tout $a \models p_{Grill}$ et tout $0 \leq j \leq j' \leq n$,* $\mathrm{RU}(a/K \cup \{a^{j,n}, a^{j',n}\}) = n - (j' - j) = \mathrm{RT}(a/K\!<\!a^{j,n}, a^{j',n}\!>)$

$\triangleright$ Soit $n \in \omega$ et $a \models p_{Grill}$.
Par (3.6.1), pour tout $m \geq n$,

$$\deg tr(K(a_{=m})/K\!<\!a^{j,n}, a^{j',n}\!>) \leq n - (j' - j).$$

Donc

$$\mathrm{RU}(a/K \cup \{a^{j,n}, a^{j',n}\}) \leq \mathrm{RT}(a/K\!<\!a^{j,n}, a^{j',n}\!>\}) \leq n - (j' - j).$$

Réciproquement montrons par induction sur $0 \leq n - j' \leq n$ que

$$\mathrm{RU}(a/K, a^{0,n}, \dots , a^{j',n}) \geq n - j'.$$

Pour $n - j' = 0$ c'est évident. Supposons le résultat vrai pour $n - j' < n$. Comme $a^{j',n}$ est définissable sur a mais n'est pas algébrique (au sens de la théorie des modèles) sur $K \cup \{a^{0,n}, \dots , a^{j'-1,n}\}$ (3.6.1), par symétrie de la déviation, $\mathrm{tp}(a/K, a^{0,n}, \dots , a^{j',n})$ dévie sur $K, a^{0,n}, \dots , a^{j'-1,n}$. Donc

$$\mathrm{RU}(a/K, a^{0,n}, \dots , a^{j'-1,n}) > \mathrm{RU}(a/K, a^{0,n}, \dots , a^{j',n}) \geq n - j'.$$

Donc pour tout $j' \leq n$, $\mathrm{RU}(a/K, a^{0,n}, \dots , a^{j',n}) \geq n - j'$. Par le même type d'induction on obtient que pour tout $j \leq j' \leq n$, $\mathrm{RU}(a/K \cup \{a^{j,n}, \dots , a^{j',n}\}) \geq n - (j' - j)$. $\triangleleft$

Remarque 3.6.3. a réalise une extension déviante de p_{Grill} si et seulement si pour un n il y a une relation algébrique entre les éléments $a^{0,n}, \dots , a^{n,n}$. Pour montrer que le *grill* est de rang U égal à ω, il suffirait donc d'après ce qui précède de montrer que si on a une telle relation alors un $a^{j,m}$ est algébrique.

Pour obtenir un groupe de rang U égal à ω, on va se baser sur le grill mais en ajoutant des étapes de construction telles que l'on ait la propriété ci-dessus. C'est l'idée que l'on trouve dans [CCSSW, section 4 Theorem 1] : les auteurs construisent un type de rang U égal à ω à partir d'un seul type minimal de rang de transcendance 1 qui est "fortement" trivial (c'est-à-dire sa prégéométrie correspond à celle de l'ensemble infini avec comme seule structure l'égalité). Ils utilisent cette dernière propriété. On ne peut donc pas faire exactement le même preuve pour obtenir un groupe. Nous allons utiliser une infinité de types additifs de rang de transcendance 1 et deux à deux orthogonaux.

Nous avons besoin du petit lemme suivant :

Lemme 3.6.4. *Soient $p_0, \dots, p_n$ des types minimaux de rang de transcendance 1 et deux à deux orthogonaux.*

Alors pour tout $Q \in K[X_0, \dots, X_n, \bar{Y}]$ on a

$$p_0(x_0) \bigwedge \dots \bigwedge p_n(x_n) \;\vdash\; \Big(Q(X_0, \dots, X_n, \bar{y}) \neq 0 \bigwedge Q(x_0, \dots, x_n, \bar{y}) = 0\Big) \Rightarrow \bigvee_{i=0}^{n} \text{"}x_i \in \operatorname{acl}(\bar{y})\text{"}.$$

Ci-dessus il suffit d'une formule pour témoigner de l'algébricité de x_i sur $\bar{y}$, car la disjonction (infinie) de formules "$x_i \in \operatorname{acl}(\bar{y})$" est équivalente dans un fermé à une seule formule.

Par compacité il existe $m(Q)$ tel que l'on ait la même propriété en remplaçant les p_i par $p_{i,m(Q)}$ (voir notation 3.1.9).

Afin d'avoir par la suite une description simple des déviations du type de $\mathrm{RU} = \omega$ construit, on remarque aussi que l'on peut choisir $m(Q)$ tel que pour tout $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ l'on ait :

$$\bigwedge_{i \in I} p_{i,m(Q)}(x_i) \;\vdash\; \Big(Q((X_i)_{i\in I}, (x_j)_{j\notin I}, \bar{y}) \neq 0 \bigwedge Q(x_0, \dots, x_n, \bar{y}) = 0\Big) \Rightarrow \bigvee_{i \in I} \text{"}x_i \in \operatorname{acl}(\bar{y} \cup \{x_j / j \notin I\})\text{"}.$$

(La notation $Q((X_i)_{i\in I}, (x_j)_{j\notin I}, \bar{y})$ signifie que l'on considère le polynôme Q où l'on a remplacé pour tout $j \notin I$, la variable X_j par la constante x_j et les variables $\bar{Y}$ par les constantes $\bar{y}$.)

$\triangleright$ On ne doit démontrer que la première assertion. La suite est une conséquence immédiate du fait que être algébrique s'écrit par une disjonction de formules.

On montre par induction sur $j \leq n$ que si aucun des x_i n'est dans $\operatorname{acl}(\bar{y})$ alors $x_0, \dots, x_j$ est une suite indépendante au-dessus de $\bar{y}$: en effet du fait de l'orthogonalité des types si $x_0, \dots, x_j$ est une suite indépendante au-dessus de $\bar{y}$ alors $\operatorname{tp}(x_0, \dots, x_j/\bar{y})$ est orthogonal à $\operatorname{tp}(x_{j+1}/\bar{y})$. $\triangleleft$

Proposition 3.6.5. *A partir d'une infinité de types minimaux de rang de transcendance 1 et deux à deux orthogonaux on peut construire un type de rang U égal à ω. De plus si ces types sont additifs la construction donne un type additif qui sera le générique d'un sous-groupe de $(L, +)$ de rang U égal à ω. Du fait qu'il existe une infinité de types* *minimaux additifs de rang de transcendance* 1 *deux à deux orthogonaux, il existe donc des sous-groupes de* $(L, +)$ *de rang* U *égal à* ω.

▷ Nous pourrions écrire la preuve de la même façon que celles de [CW 99], en remplaçant l'étape qui consiste à relier les éléments algébriquement indépendants par une étape du grill.

Pour simplifier on suppose que l'on part d'une infinité $(p_j)_{j\in\omega}$ de types minimaux sur K de RT $= 1$ et 2 à 2 orthogonaux tels que pour tout $j, n \in \omega$, si $x \models p_j$ alors pour tout $i \in (p^\nu)^{\leq n}$, $x_i \in K[x_{\bar{0}(n)}]$.
Cela ne pose pas de problème car les exemples que l'on a construits sont ainsi (3.4.15).

Cette hypothèse supplémentaire permet de commencer par définir simplement un type dépendant d'un paramètre tel que quelque soit la valeur de ce paramètre ce type ait des propriétés analogues à celle du type générique du grill dans le lemme 3.6.2, et ensuite de définir par induction ce paramètre tel que l'on ait alors la propriété supplémentaire de la remarque précédente (3.6.3).

Pour tout $j, n \in \omega$, on note $p_{j,n}$ le type p_j restreint à la hauteur n (voir 3.1.9).

Soit β une application de ω dans ω. Nous allons définir à partir de la famille des p_j un type p_β : on commence par $x \models p_{0,\beta(0)}$, ensuite on ajoute une première étape du grill, on impose ensuite aux deux nouveaux éléments y, z que $y \models p_{0,\beta(1)}$ et $z \models p_{1,\beta(1)}$ et ainsi de suite. Plus précisément, à partir de β, définissons pour tout $l \leq n$, $\gamma(l,n) \in \{0,1\}^{<\omega}$. Soit $\gamma(0,0) = \emptyset$ et pour $l \leq n$, $\gamma(l, n+1) = \gamma(l,n)\ \bar{0}(\beta(n)+1)$ et $\gamma(n+1, n+1) = \gamma(n,n)\ \bar{0}(\beta(n))\ 1$.

p_β est défini par les relations suivantes :
pour tout $l \leq n$,

$$x_{\gamma(l,n)} \models p_{l,\beta(n)} \text{ et } x_{\gamma(l,n)\bar{0}(\beta(n))} = x^p_{\gamma(l,n+1)} + bx^p_{\gamma(l+1,n+1)},$$

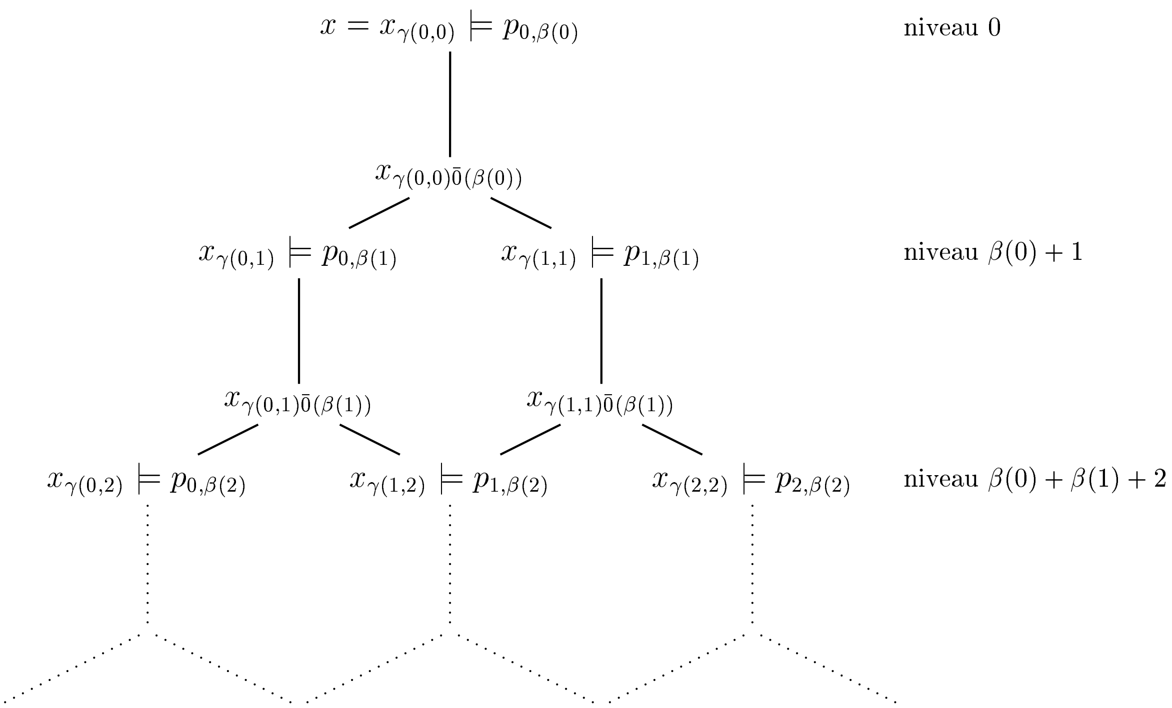
et pour tout n,

$$x_{\gamma(0,n)}, \dots, x_{\gamma(n,n)} \text{ sont algébriquement indépendants sur K.}$$

Remarquons que par la dernière hypothèse sur la famille des p_i, pour tout $l \leq n$ et $i \in (p^\nu)^{\leq\beta(n)}$,

$$x_{\gamma(l,n)i} = f_i(x_{\gamma(l,n)}) \in K[x_{\gamma(l,n)\bar{0}(n)}].$$

Voici l'arbre des p-composantes de p_β :



Dans le cas où tous les types p_j sont additifs alors p_β est le type générique du sous-groupe G_β défini simplement par les relations suivantes :
pour tout $l \leq n$,

$$x_{\gamma(l,n)} \in V(I(p_{l,\beta(n)})) \text{ et } x_{\gamma(l,n)\bar{0}(\beta(n))} = x^p_{\gamma(l,n+1)} + bx^p_{\gamma(l+1,n+1)}.$$

En fait, pour $x \models p_\beta$, les éléments $x_{\gamma(0,n)}, \ldots, x_{\gamma(n,n)}$ jouent le même rôle que les éléments $x^{0,n}, \ldots, x^{n,n}$ dans le grill : pour tout $a \models p_\beta$ et tout $j \leq j' \leq n$, $\mathrm{RU}(a/K \cup \{a_{\gamma(j,n)}, a_{\gamma(j',n)}\}) = n - (j'-j) = \mathrm{RT}(a/K{<}a_{\gamma(l,n)}, a_{\gamma(j',n)}{>})$ et donc $\mathrm{RU}(p_\beta) \geq \omega$.

La preuve est la même que celle du lemme 3.6.2.

Nous allons voir maintenant que l'on peut définir une application β par induction de façon que $\mathrm{RU}(p_\beta) \leq \omega$.

On note p^n_β le type p_β restreint à la hauteur $\sum_{i=0}^{n-1}(\beta(i)+1)$ (qui est égale à la longueur de $\gamma(0,n)$). (Avec la notation 3.1.9, $p^n_\beta = p_{\beta,\sum_{i=0}^{n-1}(\beta(i)+1)}$.)

On remarque tout d'abord que p^n_β ne dépend que de la valeur de $\beta_{|n}$ et que pour tout $l \leq m \leq n$, il existe $Q_{\beta_{|n},l,m} \in K[X_0, \ldots, X_n]$ tel que pour tout $x \models p^n_\beta$

$$x_{\gamma(l,m)} = Q_{\beta_{|n},l,m}(x_{\gamma(0,n)}, \ldots, x_{\gamma(n,n)}).$$

Nous voulons construire β tel que s'il y a une relation algébrique à un niveau de l'arbre alors il existe $l \leq n$ tel que $a_{\gamma(l,n)}$ est algébrique. Soit $\bar{Y}$ un uple infini dénombrable de variables et $(P_n)_{n\in\omega}$ une énumération de l'ensemble dénombrable de polynômes

$$\bigcup_{m\in\omega} K[X_{0,m}, \ldots, X_{m,m}, \bar{Y}].$$

On choisit cette énumération telle que pour tout entier n,

$$P_n \in K[X_{0,m}, \ldots, X_{m,m}, \bar{Y}] \text{ avec } m \leq n.$$

On définit alors β par induction de telle manière que pour tout $n \in \omega$, $\bar{c} \in L$, et $a \models p_\beta^{n+1}$, si $P_n(a_{\gamma(0,m)}, \ldots, a_{\gamma(m,m)}, \bar{c}) = 0$ et $P_n(X_{0,m}, \ldots, X_{m,m}, \bar{c}) \neq 0$ alors il existe $l \leq n$ tel que $a_{\gamma(l,n)}$ est algébrique sur $K(\bar{c})$.

Pour 0 il n'y a rien à faire, on peut choisir $\beta(0) = 0$.
Supposons β défini jusqu'à $n-1$ et définissons $\beta(n)$: on utilise

$$R_n(X_0, \ldots, X_n, \bar{Y}) := P_n(Q_{\beta_{|n},0,m}(X_0, \ldots, X_n), \ldots, Q_{\beta_{|n},m,m}(X_0, \ldots, X_n), \bar{Y}).$$

et l'orthogonalité des types $p_0, \ldots, p_n$. On pose $\beta(n) = m(R_n)$ défini par le lemme 3.6.4.

On vérifie que si $a \models p_\beta^{n+1}$ tel que

$$P_n(a_{\gamma(0,m)}, \ldots, a_{\gamma(m,m)}, \bar{c}) = 0 \text{ et } P_n(X_{0,m}, \ldots, X_{m,m}, \bar{c}) \neq 0$$

alors il existe $l \leq n$ tel que $a_{\gamma(l,n)}$ est algébrique sur $K(c)$. En effet dans ce cas on a d'une part $R_n(a_{\gamma(0,n)}, \ldots, a_{\gamma(n,n)}, \bar{c}) = 0$ et d'autre part $R_n(X_0, \ldots, X_n, \bar{c}) \neq 0$ car si a' réalise p_β^{n+1} tel que $a'_{\gamma(0,m)}, \ldots, a'_{\gamma(m,m)}$ sont algébriquement indépendants au-dessus de $K(\bar{c})$ alors

$$R_n(a'_{\gamma(0,n)}, \ldots, a'_{\gamma(n,n)}, \bar{c}) = P_n(a'_{\gamma(0,m)}, \ldots, a'_{\gamma(m,m)}, \bar{c}) \neq 0.$$

On peut donc appliquer le lemme 3.6.4.

β ainsi défini, p_β est de RU $\leq \omega$. En effet si a réalise une extension déviante de p_β sur L, alors il existe un entier m tel qu'il y a une relation algébrique entre $a_{\gamma(0,m)}, \ldots, a_{\gamma(m,m)}$ au-dessus de L.

Donc il existe $n \geq m$ et $\bar{c} \in L$ tel que $P_n(a_{\gamma(0,m)}, \ldots, a_{\gamma(m,m)}, \bar{c}) = 0$.

On en déduit donc par la définition de β qu'il existe $l \leq n$ tel que $a_{\gamma(l,n)}$ est algébrique sur $K, \bar{c}$ et donc que $a_{\gamma(l,n)} \in L$. D'où

$$\mathrm{RU}(a/L) \leq \mathrm{RU}(a/K, a_{\gamma(l,n)}) \leq n.$$

Le type p_β est donc de rang U égal à ω. Rappelons que si l'on a choisit pour famille des p_i des types additifs, alors p_β est un type additf et est le génerique du groupe G_β connexe de rang ω.

Donnons maintenant une description des extensions déviantes de p_β, en utilisant la condition supplémentaire sur $m(R_n)$ définie dans le lemme 3.6.4. On montre alors que pour tout ensemble de paramètres C algébriquement clos et toute réalisation a de p_β, la description du type de a sur C est la donnée des éléments $a_{\gamma(l,n)}$ appartenant à C. Pour les types dans G_β (si nous partons de types additifs) on a la même description.

Soient a et b deux réalisations de p_β et C algébriquement clos, tels que pour tout $l \leq n$, $a_{\gamma(l,n)} \in C$ si et seulement si $b_{\gamma(l,n)} \in C$ et dans ce cas $a_{\gamma(l,n)} = b_{\gamma(l,n)}$. Supposons que a et b n'ont pas même type au-dessus de C. Dans ce cas il existe $\bar{c} \in C$ et P_n tels que $P_n(a_{\gamma(0,m)}, \dots, a_{\gamma(m,m)}, \bar{c}) = 0$ et $P_n(b_{\gamma(0,m)}, \dots, b_{\gamma(m,m)}, \bar{c}) \neq 0$.

Soit R_n le polynôme associé à P_n et $I := \{i;\ a_{\gamma(i,n)} \notin C\}$.
On a
$$R_n(a_{\gamma(0,n)}, \dots, a_{\gamma(n,n)}, \bar{c}) = P_n(a_{\gamma(0,m)}, \dots, a_{\gamma(m,m)}, \bar{c}) = 0$$
et
$$R_n((X_{i,n})_{i\in I}, (a_{\gamma(i,n)})_{i\notin I}, \bar{c}) \neq 0$$
car
$$R_n(b_{\gamma(0,n)}, \dots, b_{\gamma(n,n)}, \bar{c}) = P_n(b_{\gamma(0,m)}, \dots, b_{\gamma(m,m)}, \bar{c}) \neq 0.$$
D'après le lemme 3.6.4, il existe $i \in I$ tel que $a_{\gamma(i,n)} \in \mathrm{acl}(C \cup \{a_{\gamma(j,n)};\ j \notin I\} = C$. Ce qui est impossible par définition de I. $\triangleleft$

Proposition 3.6.6. *Il existe une infinité de sous-groupes additifs définis sur le vide de rang U égal à ω dont les types génériques sont deux à deux orthogonaux.*

$\triangleright$ Il suffit de considérer une partition infinie d'un ensemble infini de types additifs de $RT = 1$, deux à deux orthogonaux et définis sur le vide (3.4.15), et ainsi de construire une infinité de types $(p_{\beta_s})_{s\in\omega}$ de la même manière que dans la proposition 3.6.5. Dans cette construction on peut alors imposer à l'aide du lemme 3.6.4 (et en utilisant le même procédé que dans la preuve de (3.6.5)) la condition suivante : pour tout $s, s' \in \omega$ et tout ensemble de paramètres C, si a_s réalise p_{β_s}, $a_{s'}$ réalise $p_{\beta_{s'}}$ et s'il y a une relation algébrique à hauteur m entre a_s et $a_{s'}$ au-dessus de C, alors une des composantes de a_s ou $a_{s'}$ est algébrique sur C. Ainsi si a_s réalise l'extension non déviante de p_{β_s} et $a_{s'}$ réalise l'extension non déviante de $p_{\beta_{s'}}$ alors a_s et $a_{s'}$ sont indépendants au-dessus de C. $\triangleleft$

Corollaire 3.6.7. *Il existe des sous-groupes de $(L, +)$ de rang U égal à ω non 1-basés.*

$\triangleright$ Si dans la proposition 3.6.5 p_0 est le type générique de $(L^{p^\infty}, +)$ alors L^{p^∞} est un sous-groupe de G_β et donc G_β n'est pas 1-basé. $\triangleleft$

Proposition 3.6.8. *Il existe des sous-groupes de $(L, +)$ de rang U égal à ω et 1-basés.*

Pour montrer cette dernière proposition, nous allons utiliser une infinité de sous-groupes minimaux de $(L, +)$ de RT $= 1$, deux à deux orthogonaux, localement modulaires tels que leurs clôtures algébriques du vide sont réduites à $\{0\}$ et leurs corps de quasi-endomorphismes sont réduits à $\mathbb{F}_p$. Nous fixons pour la suite une suite infinie $(H_i)_{i\in\omega}$ de tels groupes, en prenant ces groupes parmi ceux du corollaire 3.5.20. Pour tout i soit p_i le type générique de H_i. Le lemme suivant qui est une généralisation du lemme 3.6.4 permet de montrer la proposition.

Lemme 3.6.9. *Pour tout* $Q \in K[X_0^0, \dots, X_0^l, \dots, X_n^0, \dots, X_n^l, \bar{Y}]$ *on a*

$$\bigwedge_{j\in\{0,\dots,l\}} \bigwedge_{i\in\{0,\dots,n\}} p_i(x_i^j) \vdash \big(Q((X_i^j), \bar{y}) \neq 0 \bigwedge Q((x_i^j), \bar{y}) = 0\big)$$
$$\Rightarrow \bigvee_{i=0}^n \text{"}CL(x_i^0, \dots, x_i^l) \in \mathrm{acl}(\bar{y})\text{"}.$$

"$CL(x^0,\dots,x^l)\in \mathrm{acl}(\bar y)$" signifie qu'il existe une combinaison linéaire non nulle de $x^0,\dots,x^l$ appartenant à $\mathrm{acl}(\bar y)$, c'est à dire il existe $(\lambda_0,\dots,\lambda_l)\in \mathbb{F}_p^{l+1}\setminus\{(0,\dots,0)\})$ tels que $\lambda_0x^0+\ldots+\lambda_lx^l\in \mathrm{acl}(\bar y)$. Par compacité il existe $k(Q)$ tel que l'on ait la même propriété en remplaçant les p_i par $p_{i,k(Q)} := p_{i|k(Q)}$.

En fait il nous faut plus pour montrer la proposition.

On choisit par compacité $k(Q)$ tel que pour tout $J_0\subseteq\{0,\dots,l\},\dots,J_n\subseteq\{0,\dots,l\}$ et tout $\lambda_{i,j,j'}\in\mathbb{F}_p$ pour $i\in\{0,\dots,n\}$, $j'\in J_i$ et $j\in\{0,\dots,l\}\setminus J_i$, si l'on note $Q'((Z_i^j),\bar Y)$ le polynôme Q où l'on a remplacé les variables X_i^j par Z_i^j si $j\in J_i$ et par $Z_i^j+\sum_{j'\in J_i}\lambda_{i,j,j'}Z_i^{j'}$ sinon, alors :

$$\bigwedge_{i=0}^n\bigwedge_{j\in J_i}p_{i,k(Q)}(z_i^j)\vdash\big(Q'((Z_i^j)_{i\in I,j\in J_i},(z_i^j)_{i\in I,j\notin J_i},\bar y)\neq 0\bigwedge Q'((z_i^j),\bar y)=0\big)$$

$$\Rightarrow \bigvee_{i=0}^n \text{"}CL((z_i^j)_{j\in J_i})\in \mathrm{acl}(\bar y\cup\{z_k^j/k\in\{0,\dots,n\}\ \textit{et}\ j\notin J_k\})\text{"}.$$

On peut remarquer que si $l=0$ c'est simplement le lemme 3.6.4

▷ La preuve se fait de la même manière que dans le lemme 3.6.4. Si on suppose que pour tout i il n'y a pas de combinaison linéaire non nulle de $x_i^0,\dots,x_i^l$ dans $\mathrm{acl}(\bar y)$ alors par le choix des types p_i, pour tout i, les $x_i^0,\dots,x_i^l$ sont indépendants au-dessus de $\mathrm{acl}(\bar y)$ et donc les types $\mathrm{tp}(x_i^0,\dots,x_i^l/\bar y)$ sont deux à deux orthogonaux. Ils ne peut donc pas y avoir de relations algébriques entre eux.

Pour le choix de $k(Q)$ c'est une simple coséquence du fait que les deuxièmes parties sont des disjonctions. ◁

▷ **Preuve de la proposition 3.6.8**

Nous conservons les notations de la preuve de la proposition 3.6.5. Nous commençons par la même construction de types p_β qui sont génériques de groupes G_β.

Pour définir β par induction, nous prenons ici une énumération $(P_n)_{n\in\omega}$ de l'ensemble dénombrable de polynômes

$$\bigcup_{l\in\omega}\bigcup_{m\in\omega}K[X_{0,m}^0,\dots,X_{0,m}^l,\dots,X_{m,m}^0,\dots,X_{m,m}^l,\bar Y]$$

On choisit cette énumération telle que pour tout entier n,

$$P_n\in K[X_{0,m}^0,\dots,X_{0,m}^l,\dots,X_{m,m}^0,\dots,X_{m,m}^l,\bar Y]\text{ avec } m\leq n \text{ et } l\in\omega.$$

On définit alors β par induction de la façon suivante :

On pose $\beta(0):=k(P_0)$ défini par le lemme 3.6.9.

Si β est défini sur n on pose $\beta(n):=k(R_n)$ défini par le lemme 3.6.9, où R_n est le polynôme P_n dans lequel on a remplacé les variables $X_{i,m}^j$ par

$$Q_{\beta_{|n},i,m}(X_0^j,\dots,X_n^j).$$

De la même façon que dans la proposition 3.6.5, on montre que p_β est de $\mathrm{RU}=\omega$, mais avec les conditions imposées par le lemme 3.6.9, on a, pour tout $l\in\omega$, une description simple des types dans $(G_\beta)^{l+1}$. Nous montrons que si $(a^0, \ldots, a^l) \in G_\beta$ et C est un ensemble de paramètres algébriquement clos alors le type de $(a^0, \ldots, a^l)$ sur C est donné par la connaissance, pour tout $n \in \omega$ et $i \in \{0, \ldots, n\}$, des $\mathbb{F}_p$-espace vectoriels engendrés par $a^0_{\gamma(i,n)}, \ldots, a^l_{\gamma(i,n)}$ au-dessus de C (la connaissance signifie la connaissance des relations linéaires au-dessus de C entre les $a^0_{\gamma(i,n)}, \ldots, a^l_{\gamma(i,n)}$). En effet si on a $a = (a^0, \ldots, a^l) \in (G_\beta)^{l+1}$ et $b = (b^0, \ldots, b^l) \in (G_\beta)^{l+1}$ ayant des espaces vectoriels se correspondant au-dessus de C et si on suppose qu'ils n'ont pas même type au-dessus de C alors il existe par exemple une relation algébrique au-dessus de C satisfaite par a_∞ et non satisfaite par b_∞. Donc il existe $n \in \omega$ et $\bar{c} \in C$ tels que $P_n((a^j_{\gamma(i,m)}), \bar{c}) = 0$ et $P_n((b^j_{\gamma(i,m)}), \bar{c}) \neq 0$. Considérons le polynôme R_n associé à P_n. Donc $R_n((a^j_{\gamma(i,n)}), \bar{c}) = 0$ et $R_n((b^j_{\gamma(i,n)}), \bar{c}) \neq 0$. Pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, soit $J_i \subseteq \{0, \ldots, l\}$ tel que $(a^j_{\gamma(i,n)})_{j \in J_i}$ est une base de l'espace vectoriel engendré par $a^0_{\gamma(i,n)}, \ldots, a^l_{\gamma(i,n)}$ au-dessus de C. Donc pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, $(b^j_{\gamma(i,n)})_{j \in J_i}$ est une base de l'espace vectoriel engendré par $b^0_{\gamma(i,n)}, \ldots, b^l_{\gamma(i,n)}$ au-dessus de C. De plus il existe $\lambda_{i,j,j'} \in \mathbb{F}_p$ pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, $j' \in J_i$ et $j \in \{0, \ldots, l\} \setminus J_i$ tels que pour tout i et $j \notin J_i$,

$$a^j_{\gamma(i,n)} - \sum_{j' \in J_i} \lambda_{i,j,j'} a^{j'}_{\gamma(i,n)} = b^j_{\gamma(i,n)} - \sum_{j' \in J_i} \lambda_{i,j,j'} b^{j'}_{\gamma(i,n)} = c^j_i \in C.$$

Maintenant on utilise la définition de R'_n correspondant à R_n dans le lemme 3.6.9.

Si l'on définit pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ et $j \in \{0, \ldots, l\}$, a'^j_i par $a^j_{\gamma(i,n)}$ si $j \in J_i$ et par c^j_i sinon, et de la même manière (b'^j_i), on a alors

$$R'_n((a'^j_i), \bar{c}) = P_n((a^j_{\gamma(i,m)}), \bar{c}) = 0$$

et

$$R'_n((b'^j_i), \bar{c}) = P_n((b^j_{\gamma(i,m)}), \bar{c}) \neq 0.$$

On peut donc appliquer le lemme et on en déduit qu'il y a pour un i une combinaison linéaire non nulle de $(a^j_{\gamma(i,n)})_{j \in J_i}$ dans C. Ce qui contredit la définition de J_i.

Cette description des types implique que pour tout $a \in (G_\beta)^{l+1}$ et tout C ensemble de paramètres, la base canonique du type de a sur C est dans la clôture algébrique de a. Le groupe G_β est donc 1-basé (1.1.9). $\triangleleft$

Remarque. A un type p de rang U égal à ω, on peut associer une prégéométrie : il suffit de prendre comme relation de dépendance la déviation. Dans le cas où p est 1-basé alors la prégéométrie est nécessairement localement modulaire. Dans la construction précédente du groupe 1-basé G_β, la prégéométrie associée à p_β est la suivante : une suite $a^0, \ldots, a^l$ n'est pas libre si et seulement si il existe des entiers $i \leq n$ tels que la suite $a^0_{\gamma(i,n)}, \ldots, a^l_{\gamma(i,n)}$ est linéairement dépendante sur $\mathbb{F}_p$. Cette prégéométrie est donc une "limite" d'espaces vectoriels sur $\mathbb{F}_p$.

Proposition 3.6.10. *Pour tout entier n et m il existe des sous- groupes additifs de rang U égal à $\omega \cdot n + m$.*

$\triangleright$ Il suffit d'utiliser un sous-groupe additif G de rang égal à ω et un sous-groupe additif H de rang égal à 1. Alors $G^{\times n} \times H^{\times m}$ est de rang $\omega \cdot n + m$. A l'aide des bijections λ_k, on peut se ramener à un sous-groupe de $(L, +)$. $\triangleleft$

Question 3.6.11. Existe-il des groupes de rang U égal à ω^2 ?

Bibliographie

[Ba 91] E.R. BAISALOV. « An example of a theory that solves a problem of B.S. Baizhanov ». *Algebra and Logic*, 30 :9–9, 1991.

[BMMN] M. BHATTACHARJEE, D. MACPHERSON, R.G. MOELLER, et P.M. NEUMANN. *Notes on infinite permutation groups.* Lecture Notes in Mathematics 1698. Springer, 1998.

[Bo 97] E. BOUSCAREN. « An introduction to independance and local modularity ». Dans *Algebraic Model Theory*, NATO ASI Series 496, pages 1–24. Kluwer Academic Publishers, 1997.

[BD1] E. BOUSCAREN et F. DELON. « Groups definable in separably closed fields ». à paraitre dans TAMS.

[BD2] E. BOUSCAREN et F. DELON. « Minimal groups in separably closed fields ». à paraitre dans Journal of Symbolic Logic.

[Bu 96] S. BUECHLER. *Essential Stability Theory.* Springer, 1996.

[CCSSW] Z. CHATZIDAKIS, G. CHERLIN, S. SHELAH, G. SROUR, et C. WOOD. « Orthogonality of types in separably closed fields ». Dans *Classification Theory - Proc. of the 1985 Chicago Conference*, Lecture Notes in Mathematics 1292. Springer, 1987.

[CW 99] Z. CHATZIDAKIS et C. WOOD. « Minimal types in separably closed fields ». *Journal of Symbolic logic*, 65(3) :1443–1450, 2000.

[CHL] G.L. CHERLIN, L. HARRINGTON, et A.H. LACHLAN. « ω-categorical, ω-stable structures ». *Annals of Pure and Applied Logic*, 28 :103–135, 1986.

[Co 89] D.E. COHEN. *Combinatorial Group Theory : a topological approach.* London Mathematical Society Student Text 14. cambridge, 1989.

[Co 71] P.M. COHN. *Free Rings and their Relations.* Academic Press, 1971.

[DDP] P. DELLUNDE, F. DELON, et F. POINT. « The theory of modules of separably closed fields 1». preprint, 2001.

[De 88] F. DELON. « Idéaux et types sur les corps séparablement clos ». *Supplément au Bulletin de la SMF*, Mémoire 33 :Tome 116, 1988.

[De 98] F. DELON. Separably closed fields. Dans E. BOUSCAREN, éditeur, *Model Theory and Algebraic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics 1696. Springer-Verlag, 1998.

[DNT 86] J.D. Dixon, P.M. Neumann, et S. Thomas. « Subgroups of small index in infinite symmetric groups ». *Bulletin of the London Mathematical Society*, 18 :580–586, 1986.

[Er 67] Y. Ershov. « Fields with a solvable theory ». *Sov. Math. Dokl.*, 8 :575–576, 1967.

[GR 90] H.B. Gute et K.K. Reuter. « The last word on elimination of quantifiers in modules ». *The Journal of Symbolic Logic*, 55(2) :670–673, 1990.

[Hi 74] P.J. Higgins. *An introduction to topological groups.* London Math. Soc. Lecture Notes 152. Cambridge, 1974.

[Ho 93] W. Hodges. *Model Theory.* Cambridge, 1993.

[Hr 85] E. Hrushovski. « Locally modular regular types ». Dans J.J. Baldwin, éditeur, *Classification Theory, Proceedings, Chicago.* Springer, 1985.

[Hr 92a] E. Hrushovski. « Strongly minimal expansions of algebraically closed fields ». *Israel Journal of Mathematics*, 79 :129–151, 1992.

[Hr 92b] E. Hrushovski. « Unimodular minimal structures ». *The Journal of the London Mathematical Society*, 46(3) :385–396, 1992.

[Hr 93] E. Hrushovski. « A new strongly minimal set ». *Annals of Pure and Applied Logic*, 62 :147–166, 1993.

[Hr 94] E. Hrushovski. « Finitely Axiomatizable $\aleph_1$-categorical Theories ». *The Journal of Symbolic Logic*, 59(3) :838–844, 1994.

[Hr 96] E. Hrushovski. « The Mordell-Lang conjecture for function fields ». *Journal of the american mathematical society*, 9 :667–690, 1996.

[HL] E. Hrushovski et J. Loveys. « Strongly and co-strongly minimal abelian structures ». Preprint, 1997.

[HP 87] E. Hrushovski et A. Pillay. « Weakly normal groups ». Dans *Logic Colloquium 85*, pages 233–244. North-Holland, 1987.

[HZ 96] E. Hrushovski et B. Zilber. « Zariski geometries ». *Journal of the american mathematical society*, 9(1) :1–56, 1996.

[Hu 87] J.E. Humphreys. *Linear Algebraic Groups.* Graduate texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1987.

[Iv 89] A.A. Ivanov. « The problem of finite axiomatizability for strongly minimal theories of graphs ». *Algebra and Logic*, 28 :183–194, 1989.

[Iv 93] A.A. Ivanov. « Strongly minimal structures with disintegrated algebraic closure and structures of bounded valency ». Dans M. Weese et H. Wolter, éditeurs, *Proceedings of the Tenth Easter Conference on Model Theory*, 1993.

[L 58] S. Lang. *Introduction to algebraic geometry.* Interscience publisher, 1958.

[La 82] D. Lascar. « On the Category of Models of a Complete Theory ». *The Journal of Symbolic Logic*, 47(2) :249–266, 1982.

[La 86] D. LASCAR. *Stabilité en théorie des modèles.* Cabay Libraire-Editeur, 1986.

[La 91] D. LASCAR. « Autour de la propriété du petit indice ». *Proceedings of the London Mathematical Society*, 62(3) :25–53, 1991.

[Lo 90] J. LOVEYS. « Weakly minimal groups of unbounded exponent ». *The journal of symbolic logic*, 55(3) :928–937, 1990.

[Ma 98] D. MARKER. Zariski Geometries. Dans E. BOUSCAREN, éditeur, *Model Theory and Algebraic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics 1696. Springer-Verlag, 1998.

[Me 94] M. MESSMER. « Groups and fields interpretable in separably closed fields ». *TAMS*, 344 :361–377, 1994.

[Me 96] M. MESSMER. Some model theory of separably closed fields. Dans *Model Theory of Fields*, Lecture Notes in Logic 5. Springer, 1996.

[Pe 80] M.G. PERETYAT'KIN. « Example of an omega-one-categorical complete finitely axiomatizable theory ». *Algebra and Logic*, 19 :202–229, 1980.

[Pe 91] M.G. PERETYAT'KIN. « Uncountably categorical quasisuccession of Morley rank 2 ». *Algebra and Logic*, 30 :51–61, 1991.

[Pi 83] A. PILLAY. *An introduction to stability theory.* Oxford University Press, 1983.

[Pi 96] A. PILLAY. *Geometric Stability Theory.* Oxford University Press, 1996.

[Po 73] B. POIZAT. « ALGÈBRE - Sur les extensions algébriques de degré infini ». *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 276 :101–103, 1973.

[Po 85] B. POIZAT. *Cours de théorie des modèles.* Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, Villeurbanne, 1985.

[Po 87] B. POIZAT. *Groupes stables.* Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, Villeurbanne, 1987.

[Re 75] J. REINEKE. « Minimale Gruppen ». *Zeitschrift für Mathematische Logik*, 21 :357–359, 1975.

[Wa 97] F. WAGNER. *Stable Groups.* LMS 240. Cambridge University Press, 1997.

[Wo 79] C. WOOD. « Notes on the stability of separably closed fields ». *The journal of symbolic logic*, 44(3) :412–416, 1979.

[Zi 84] M. ZIEGLER. « Model theory of modules ». *Annals of Pure and Applied Logic*, 26 :149–213, 1984.

[Zil 81] B. ZIL'BER. « On the finite axiomatizability problem of theories categorical in all finite powers ». Dans *Investigations in Theoritical Programming*, pages 69–74. Kazakh. Gos. University, Alma-Ata, 1981.