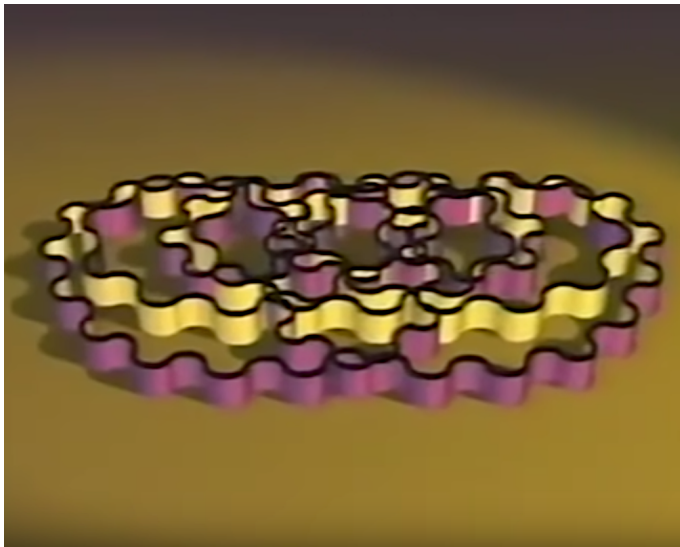


# CM 1 : La théorie des corrugations



## Les immersions du cercle

On note  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  le cercle. Notons qu'une application  $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$  n'est rien d'autre qu'une application 1-périodique de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

## Les immersions du cercle

On note  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  le cercle. Notons qu'une application  $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$  n'est rien d'autre qu'une application 1-périodique de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition.** – Une application  $\gamma : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n$ , est dite *régulière* si pour tout  $x$  de  $\mathbb{S}^1$  on a  $\gamma'(x) \neq 0$ . On dit aussi que  $\gamma$  est une *immersion* de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

## Les immersions du cercle

On note  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  le cercle. Notons qu'une application  $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$  n'est rien d'autre qu'une application 1-périodique de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition.** – Une application  $\gamma : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n$ , est dite *régulière* si pour tout  $x$  de  $\mathbb{S}^1$  on a  $\gamma'(x) \neq 0$ . On dit aussi que  $\gamma$  est une *immersion* de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

On note  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$  l'ensemble des immersions de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{R}^n$ . C'est un sous-ensemble de l'espace vectoriel  $C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ . Muni la norme  $C^1$  définie par

$$\|\gamma\|_{C^1} = \|\gamma'\|_{\infty} + \|\gamma\|_{\infty}.$$

l'espace vectoriel  $C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$  est un espace de Banach et  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$  un ouvert de cet espace de Banach.

## Les immersions du cercle

On note  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  le cercle. Notons qu'une application  $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$  n'est rien d'autre qu'une application 1-périodique de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition.** – Une application  $\gamma : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n$ , est dite *régulière* si pour tout  $x$  de  $\mathbb{S}^1$  on a  $\gamma'(x) \neq 0$ . On dit aussi que  $\gamma$  est une *immersion* de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

On note  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$  l'ensemble des immersions de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{R}^n$ . C'est un sous-ensemble de l'espace vectoriel  $C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ . Muni la norme  $C^1$  définie par

$$\|\gamma\|_{C^1} = \|\gamma'\|_{\infty} + \|\gamma\|_{\infty}.$$

l'espace vectoriel  $C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$  est un espace de Banach et  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$  un ouvert de cet espace de Banach.

**Remarque.**– On notera souvent  $\|\cdot\|_{C^0}$  plutôt que  $\|\cdot\|_{\infty}$ .

# Les immersions du cercle

**Définition.**— Soient  $\gamma_0, \gamma_1 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$  deux immersions, une *homotopie régulière* joignant  $\gamma_0$  à  $\gamma_1$  est une application

$$\begin{array}{ccc} \Gamma : [0, 1] & \xrightarrow{C^0} & I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \\ \mathbf{s} & \longmapsto & \gamma_{\mathbf{s}} \end{array}$$

telle que  $\Gamma_0 = \gamma_0, \Gamma_1 = \gamma_1$ .

# Les immersions du cercle

**Définition.**— Soient  $\gamma_0, \gamma_1 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$  deux immersions, une *homotopie régulière* joignant  $\gamma_0$  à  $\gamma_1$  est une application

$$\begin{array}{ccc} \Gamma : [0, 1] & \xrightarrow{C^0} & I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \\ \mathbf{s} & \longmapsto & \gamma_{\mathbf{s}} \end{array}$$

telle que  $\Gamma_0 = \gamma_0, \Gamma_1 = \gamma_1$ .

**Remarque.**— La relation d'homotopie régulière est une relation d'équivalence et les classes d'équivalence s'identifient aux composantes connexes par arcs de l'espace des immersions  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ .

# Les immersions du cercle

**Définition.**— Soient  $\gamma_0, \gamma_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  deux immersions, une *homotopie régulière* joignant  $\gamma_0$  à  $\gamma_1$  est une application

$$\begin{array}{ccc} \Gamma : [0, 1] & \xrightarrow{C^0} & I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \\ s & \longmapsto & \gamma_s \end{array}$$

telle que  $\Gamma_0 = \gamma_0, \Gamma_1 = \gamma_1$ .

**Remarque.**— La relation d'homotopie régulière est une relation d'équivalence et les classes d'équivalence s'identifient aux composantes connexes par arcs de l'espace des immersions  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ .

**Définition.**— Une immersion  $\gamma : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n$ , est dite *paramétrée par la longueur d'arc* si pour tout  $x$  de  $\mathbb{S}^1$  on a  $\|\gamma'(x)\| = 1$ . On note  $I_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$  l'espace des immersions paramétrées par la longueur d'arc.



# Les immersions du cercle

**Proposition.**— *Toute immersion  $\gamma_0 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est régulièrement homotope à une immersion paramétrée par la longueur d'arc.*

# Les immersions du cercle

**Proof.**– Notons

$$L(\gamma_0) = \int_0^1 \|\gamma'_0(x)\| dt$$

la longueur de  $\gamma_0$ . Quitte à effectuer une première homotopie régulière en composant  $\gamma_0$  à gauche par une famille d'homothéties, on peut toujours supposer que la longueur de  $\gamma_0$  est  $L = 1$ . On considère la fonction abscisse curviligne

$$\begin{aligned} S : [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ s &\longmapsto \int_0^s \|\gamma'_0(x)\| dx. \end{aligned}$$

Cette fonction est dérivable et puisque  $S'(s) = \|\gamma'_0(s)\| > 0$ , elle est strictement croissante. C'est donc un difféomorphisme de  $[0, 1]$  dans lui-même.

## Les immersions du cercle

Soit  $\gamma_1 := \gamma_0 \circ S^{-1}$ . Puisque

$$(S^{-1})'(x) = \frac{1}{S'(S^{-1}(x))} = \frac{1}{\|\gamma_0'(S^{-1}(x))\|}$$

on a

$$\gamma_1'(x) = \frac{\gamma_0'(S^{-1}(x))}{\|\gamma_0'(S^{-1}(x))\|}$$

et par conséquent  $\gamma_1$  est paramétrée par la longueur d'arc. Soit  $\varphi_t : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  définie par

$$\varphi_t = tS^{-1} + (1 - t)Id$$

Pour tout  $t \in [0, 1]$ , l'application  $\varphi_t$  est un difféomorphisme puisque

$$\forall x \in [0, 1], \quad \varphi_t'(x) = \frac{1}{\|\gamma_0'(S^{-1}(x))\|} + (1 - t) > 0.$$

Ainsi  $t \mapsto \gamma_t = \gamma_0 \circ \varphi_t$  réalise une homotopie régulière joignant  $\gamma_0$  à  $\gamma_1$ .

□

# Le théorème de Whitney-Graustein

On s'intéresse désormais au cas  $n = 2$ . Si  $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$  est une immersion alors son application tangente fournit une application continue

$$\gamma' : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{R} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

dont on peut calculer le nombre de tours  $N(\gamma')$ . Rappelons que

$$N(\gamma') := \tilde{\mathbf{t}}(1) - \tilde{\mathbf{t}}(0) \in \mathbb{Z}$$

où  $\tilde{\mathbf{t}} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est un relevé de l'application tangente

$$\mathbf{t} := \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

On définit l'indice  $Ind(\gamma)$  de  $\gamma$  comme étant le nombre de tours  $N(\gamma')$ .

# Le théorème de Whitney-Graustein

Puisque  $Ind(\gamma)$  est clairement invariant par homotopie régulière, on a une application :

$$\begin{aligned} Ind : \pi_0 I(S^1, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [\gamma] &\longmapsto Ind(\gamma). \end{aligned}$$

Cette application est surjective comme le montre l'examen des exemples ci-dessous :



$$Ind(\gamma) = -1 \quad Ind(\gamma) = 0 \quad Ind(\gamma) = 1 \quad Ind(\gamma) = 2 \quad Ind(\gamma) = 3$$

# Le théorème de Whitney-Graustein



Hassler Whitney

**Théorème de Whitney-Graustein (1937).** – *Deux immersions  $\gamma_0, \gamma_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  sont régulièrement homotopes si et seulement si elles ont le même indice :  $Ind(\gamma_0) = Ind(\gamma_1)$ . En d'autres termes*

$$\pi_0 I(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z}$$

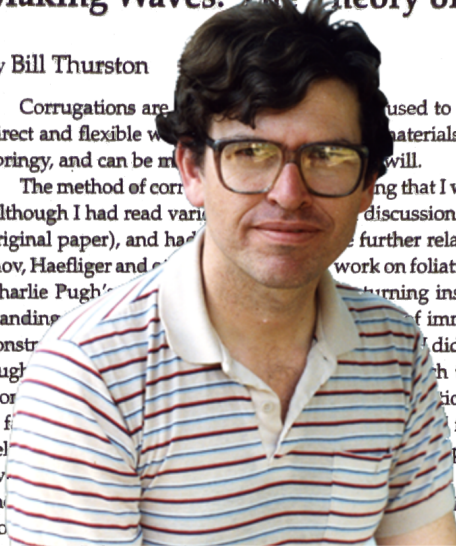
*l'identification étant donnée par l'indice.*

# Making Waves: The Theory of Corrugations

by Bill Thurston

Corrugations are used to create and control immersions in a direct and flexible way. Materials like curves and surfaces are made springy, and can be manipulated as you will.

The method of corrugations was something that I worked out for my own satisfaction. Although I had read various discussions of immersions (including Smale's original paper), and had seen the further related developments of Phillips, Gro-mov, Haefliger and others, I had not seen the work on foliations, and even though I had studied Charlie Pugh's work on turning inside out, I felt a lack in my understanding of immersions of spheres were clear and constrained. I did not have a coherent mental movie. Pugh's work on turning inside out was clear. But I learned from his work that the transition was highly conditioned by what is familiar. It was highly conditioned by what is familiar for me to apprehend at a glance the sequence presented. It was also hard for me, even though I tried to proceed step by step, to assemble the picture with all this external assistance, I was not sufficiently alive and direct.



William Thurston

# Les corrugations de Thurston

- Soient  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  deux immersions du cercle dans le plan, paramétrées par la longueur d'arc et ayant même indice. L'homotopie linéaire

$$s \mapsto \gamma_s = (1 - s)\gamma_0 + s\gamma_1$$

n'est pas régulière en général.



# Les corrugations de Thurston

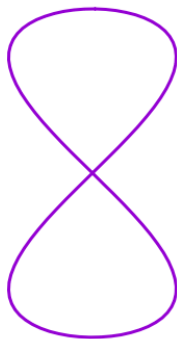
- Soient  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  deux immersions du cercle dans le plan, paramétrées par la longueur d'arc et ayant même indice. L'homotopie linéaire

$$s \longmapsto \gamma_s = (1 - s)\gamma_0 + s\gamma_1$$

n'est pas régulière en général.

- En effet, quand  $s$  varie,  $\gamma'_s(t)$  parcourt la corde  $[\gamma'_0(t), \gamma'_1(t)]$ . Si  $\gamma'_0(t)$  et  $\gamma'_1(t)$  sont antipodaux, cette corde est un diamètre qui contient l'origine.

# Les corrugations de Thurston

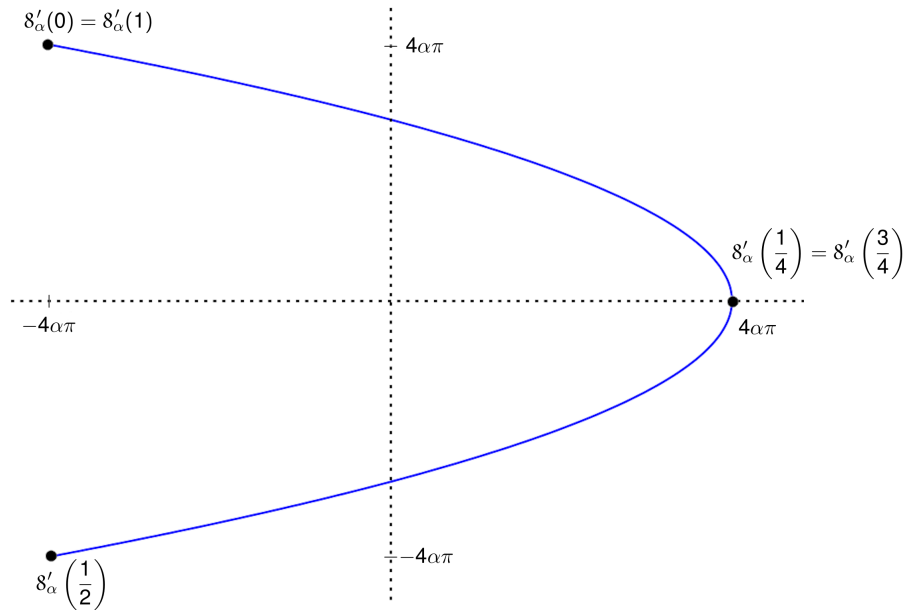


Le support de la courbe  $\delta_\alpha$

**Définition.**— Soit  $\alpha > 0$ . La *courbe en huit* de paramètre  $\alpha$  est la courbe paramétrée  $\delta_\alpha : \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  donnée par

$$\delta_\alpha(t) = -\alpha \sin(4\pi t) + 2i\alpha \sin(2\pi t).$$

# Support de la dérivée



# Corrugations

**Lemme.**– *Pour tout  $t \in \mathbb{S}^1$  on a*

$$\|g'_\alpha(t)\|^2 \geq \sqrt{7}\alpha\pi$$

# Corrugations

**Lemme.**– Pour tout  $t \in \mathbb{S}^1$  on a

$$\|\delta'_\alpha(t)\|^2 \geq \sqrt{7}\alpha\pi$$

**Démonstration.**– En dérivant l'expression de  $\delta_\alpha$  on obtient

$$\delta'_\alpha(t)\mathbf{t}(t) = 4\alpha\pi (-\cos(4\pi t)\mathbf{t}(t) + \cos(2\pi t)\mathbf{n}(t))$$

d'où

$$\|\delta'_\alpha(t)\|^2 = 4\alpha\pi\sqrt{\cos^2(4\pi t) + \cos^2(2\pi t)}.$$

# Corrugations

**Lemme.** – Pour tout  $t \in \mathbb{S}^1$  on a

$$\|g'_\alpha(t)\|^2 \geq \sqrt{7}\alpha\pi$$

**Démonstration.** – En dérivant l'expression de  $\delta_\alpha$  on obtient

$$g'_\alpha(t)\mathbf{t}(t) = 4\alpha\pi (-\cos(4\pi t)\mathbf{t}(t) + \cos(2\pi t)\mathbf{n}(t))$$

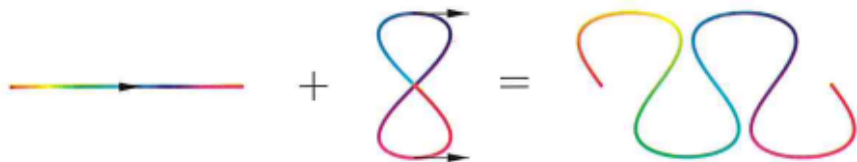
d'où

$$\|g'_\alpha(t)\|^2 = 4\alpha\pi \sqrt{\cos^2(4\pi t) + \cos^2(2\pi t)}.$$

• Or

$$\begin{aligned} \cos^2(2\theta) + \cos^2 \theta &= \cos^2(2\theta) + \frac{\cos(2\theta) + 1}{2} \\ &= \left(\cos(2\theta) + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \geq \frac{7}{16} \quad \square \end{aligned}$$

# Corrugations



**Définition.**— Soient  $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  une immersion et  $\mathbf{t} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  son application tangente. Soient  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $\alpha > 0$ . L'application

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) + \delta_\alpha(Nt)\mathbf{t}(t)$$

est dite *application corruguée* (au sens de Thurston) de  $\gamma$ . Le nombre  $N$  est le *nombre de corrugations* de  $\tilde{\gamma}$ .

# Corrugations

**Lemme.**– *On a :  $\|\tilde{\gamma} - \gamma\|_{C^0} = 2\alpha$ .*



# Corrugations

**Lemme.**– *On a :  $\|\tilde{\gamma} - \gamma\|_{C^0} = 2\alpha$ .*

**Démonstration.**– De

$$\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t) = \delta_\alpha(Nt)\mathbf{t}(t)$$

on déduit

$$\|\tilde{\gamma} - \gamma\|_{C^0} = \|\delta_\alpha\|_{C^0}.$$

# Corrugations

**Lemme.**– On a :  $\|\tilde{\gamma} - \gamma\|_{C^0} = 2\alpha$ .

**Démonstration.**– De

$$\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t) = \delta_\alpha(Nt)\mathbf{t}(t)$$

on déduit

$$\|\tilde{\gamma} - \gamma\|_{C^0} = \|\delta_\alpha\|_{C^0}.$$

• Or

$$\delta_\alpha(t) = -\alpha \sin(4\pi t) + 2i\alpha \sin(2\pi t)$$

donc

$$\|\delta_\alpha(t)\| = \alpha \sqrt{\sin^2(4\pi t) + 4 \sin^2(2\pi t)}$$

# Corrugations

- Il faut donc majorer

$$\begin{aligned}\sin^2(2\theta) + 4 \sin^2 \theta &= 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta \\ &= 4 \sin^2 \theta (\cos^2 \theta + 1) \\ &= 4(1 - \cos^2 \theta)(\cos^2 \theta + 1) \\ &= 4(1 - \cos^4 \theta) \\ &\leq 4.\end{aligned}$$

# Corrugations

- Il faut donc majorer

$$\begin{aligned}\sin^2(2\theta) + 4 \sin^2 \theta &= 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta \\ &= 4 \sin^2 \theta (\cos^2 \theta + 1) \\ &= 4(1 - \cos^2 \theta)(\cos^2 \theta + 1) \\ &= 4(1 - \cos^4 \theta) \\ &\leq 4.\end{aligned}$$

- Ceci montre que

$$\|\delta_\alpha(t)\| \leq 2\alpha$$

et le majorant est trivialement atteint (en  $t = \frac{1}{4}$  par exemple). □

# Corrugations

**Proposition.-** *Si on choisit*

$$N \geq \frac{1}{\pi} \|k\|_{C^0}$$

*où  $k : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  est la courbure (algébrique) de  $\gamma$  alors l'application corruguée  $\tilde{\gamma}$  est une immersion qui est régulièrement homotope à  $\gamma$ .*

# Corrugations

**Proposition.**- *Si on choisit*

$$N \geq \frac{1}{\pi} \|k\|_{C^0}$$

*où  $k : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  est la courbure (algébrique) de  $\gamma$  alors l'application corruguée  $\tilde{\gamma}$  est une immersion qui est régulièrement homotope à  $\gamma$ .*

**Démonstration.**– Montrons d'abord que  $\tilde{\gamma}$  est une immersion. Pour tout  $t \in \mathbb{S}^1$  on a

$$\tilde{\gamma}'(t) = \|\gamma'(t)\| \mathbf{t}(t) + N \delta'_\alpha(Nt) \mathbf{t}(t) + \delta_\alpha(Nt) \mathbf{t}'(t).$$

# Corrugations

**Proposition.**- Si on choisit

$$N \geq \frac{1}{\pi} \|k\|_{C^0}$$

où  $k : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  est la courbure (algébrique) de  $\gamma$  alors l'application corruguée  $\tilde{\gamma}$  est une immersion qui est régulièrement homotope à  $\gamma$ .

**Démonstration.**– Montrons d'abord que  $\tilde{\gamma}$  est une immersion. Pour tout  $t \in \mathbb{S}^1$  on a

$$\tilde{\gamma}'(t) = \|\gamma'(t)\| \mathbf{t}(t) + N \delta'_\alpha(Nt) \mathbf{t}(t) + \delta_\alpha(Nt) \mathbf{t}'(t).$$

• Notons  $\mathbf{n} = i\mathbf{t}$  la normale (algébrique) de  $\gamma$ , on a :

$$\mathbf{t}'(t) = k(t) \mathbf{n}(t).$$

# Corrugations

**Proposition.-** *Si on choisit*

$$N \geq \frac{1}{\pi} \|k\|_{C^0}$$

*où  $k : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  est la courbure (algébrique) de  $\gamma$  alors l'application corruguée  $\tilde{\gamma}$  est une immersion qui est régulièrement homotope à  $\gamma$ .*

**Démonstration.-** Montrons d'abord que  $\tilde{\gamma}$  est une immersion. Pour tout  $t \in \mathbb{S}^1$  on a

$$\tilde{\gamma}'(t) = \|\gamma'(t)\| \mathbf{t}(t) + N \delta'_\alpha(Nt) \mathbf{t}(t) + \delta_\alpha(Nt) \mathbf{t}'(t).$$

• Notons  $\mathbf{n} = i\mathbf{t}$  la normale (algébrique) de  $\gamma$ , on a :

$$\mathbf{t}'(t) = k(t) \mathbf{n}(t).$$

• D'une part en dérivant l'expression de  $\delta_\alpha$  on obtient

$$N \delta'_\alpha(Nt) \mathbf{t}(t) = 4\alpha\pi N (-\cos(4\pi Nt) \mathbf{t}(t) + \cos(2\pi Nt) \mathbf{n}(t)).$$



# Corrugations

- D'autre part

$$\begin{aligned}\delta_\alpha(Nt)\mathbf{t}'(t) &= \delta_\alpha(Nt)k(t)\mathbf{n}(t) \\ &= -\alpha k(t) \sin(4\pi t)\mathbf{n}(t) - 2\alpha k(t) \sin(2\pi t)\mathbf{t}(t)\end{aligned}$$

# Corrugations

- D'autre part

$$\begin{aligned}\delta_\alpha(Nt)\mathbf{t}'(t) &= \delta_\alpha(Nt)k(t)\mathbf{n}(t) \\ &= -\alpha k(t) \sin(4\pi t)\mathbf{n}(t) - 2\alpha k(t) \sin(2\pi t)\mathbf{t}(t)\end{aligned}$$

- Au bilan

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}'(t) &= (\|\gamma'(t)\| - 2\alpha k(t) \sin(2\pi t) - 4\alpha\pi N \cos(4\pi Nt)) \mathbf{t}(t) \\ &\quad + (-\alpha k(t) \sin(4\pi t) + 4\alpha\pi N \cos(2\pi Nt)) \mathbf{n}(t)\end{aligned}$$

# Corrugations

- D'autre part

$$\begin{aligned}\delta_\alpha(Nt)\mathbf{t}'(t) &= \delta_\alpha(Nt)k(t)\mathbf{n}(t) \\ &= -\alpha k(t)\sin(4\pi t)\mathbf{n}(t) - 2\alpha k(t)\sin(2\pi t)\mathbf{t}(t)\end{aligned}$$

- Au bilan

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}'(t) &= (\|\gamma'(t)\| - 2\alpha k(t)\sin(2\pi t) - 4\alpha\pi N\cos(4\pi Nt))\mathbf{t}(t) \\ &\quad + (-\alpha k(t)\sin(4\pi t) + 4\alpha\pi N\cos(2\pi Nt))\mathbf{n}(t)\end{aligned}$$

- Pour tous les  $t$  tels que

$$-k(t)\sin(4\pi t) + 4\pi N\cos(2\pi Nt) \neq 0$$

alors  $\tilde{\gamma}'(t) \neq 0$  et  $\tilde{\gamma}$  est une immersion en  $t$ .

# Corrugations

- Supposons donc que

$$-k(t) \sin(4\pi t) + 4\pi N \cos(2\pi Nt) = 0.$$

c'est-à-dire

$$\cos(2\pi Nt) = \frac{k(t)}{4\pi N} \sin(4\pi t).$$

# Corrugations

- Supposons donc que

$$-k(t) \sin(4\pi t) + 4\pi N \cos(2\pi Nt) = 0.$$

c'est-à-dire

$$\cos(2\pi Nt) = \frac{k(t)}{4\pi N} \sin(4\pi t).$$

- Ceci implique

$$\begin{aligned} \cos(4\pi Nt) &= 2 \cos^2(2\pi Nt) - 1 \\ &= \frac{k^2(t)}{8\pi^2 N^2} \sin^2(4\pi t) - 1 \end{aligned}$$

- La coordonnée en  $\mathbf{t}$  de  $\tilde{\gamma}'(t)$  est

$$[\tilde{\gamma}'(t)]^{\mathbf{t}} = \|\gamma'(t)\| + \alpha A$$

où  $A = -2k(t) \sin(2\pi t) - 4\pi N \cos(4\pi Nt)$ .

# Corrugations

- En remplaçant

$$\begin{aligned}A &= -2k(t) \sin(2\pi t) - 4\pi N \cos(4\pi Nt) \\ &= -2k(t) \sin(2\pi t) - 4\pi N \left( \frac{k^2(t)}{8\pi^2 N^2} \sin^2(4\pi t) - 1 \right) \\ &= 4\pi N - 2k(t) \sin(2\pi t) - \frac{k^2(t)}{2\pi N} \sin^2(4\pi t)\end{aligned}$$

# Corrugations

- En remplaçant

$$\begin{aligned}A &= -2k(t) \sin(2\pi t) - 4\pi N \cos(4\pi Nt) \\ &= -2k(t) \sin(2\pi t) - 4\pi N \left( \frac{k^2(t)}{8\pi^2 N^2} \sin^2(4\pi t) - 1 \right) \\ &= 4\pi N - 2k(t) \sin(2\pi t) - \frac{k^2(t)}{2\pi N} \sin^2(4\pi t)\end{aligned}$$

- Puisque  $N \geq \frac{1}{\pi} \|k\|_{C^0}$ , on peut majorer

$$\| -2k(t) \sin(2\pi t) \| \leq 2\pi N \quad \text{et} \quad \left\| -\frac{k^2(t)}{2\pi N} \sin^2(4\pi t) \right\| \leq \frac{1}{2} \pi N.$$

# Corrugations

- En remplaçant

$$\begin{aligned}A &= -2k(t) \sin(2\pi t) - 4\pi N \cos(4\pi Nt) \\ &= -2k(t) \sin(2\pi t) - 4\pi N \left( \frac{k^2(t)}{8\pi^2 N^2} \sin^2(4\pi t) - 1 \right) \\ &= 4\pi N - 2k(t) \sin(2\pi t) - \frac{k^2(t)}{2\pi N} \sin^2(4\pi t)\end{aligned}$$

- Puisque  $N \geq \frac{1}{\pi} \|k\|_{C^0}$ , on peut majorer

$$\| -2k(t) \sin(2\pi t) \| \leq 2\pi N \quad \text{et} \quad \left\| -\frac{k^2(t)}{2\pi N} \sin^2(4\pi t) \right\| \leq \frac{1}{2}\pi N.$$

- Ainsi

$$\begin{aligned}A &\geq 4\pi N - 2\pi N - \frac{1}{2}\pi N \\ &\geq \frac{3}{2}\pi N\end{aligned}$$



# Corrugations

- La quantité  $A$  est donc strictement positive, la coordonnée en  $\mathbf{t}$  de  $\tilde{\gamma}'$  ne peut s'annuler

$$[\tilde{\gamma}'(\mathbf{t})]^{\mathbf{t}} = \|\gamma'(\mathbf{t})\| + \alpha A > 0.$$

# Corrugations

- La quantité  $A$  est donc strictement positive, la coordonnée en  $\mathbf{t}$  de  $\tilde{\gamma}'$  ne peut s'annuler

$$[\tilde{\gamma}'(\mathbf{t})]^{\mathbf{t}} = \|\gamma'(\mathbf{t})\| + \alpha A > 0.$$

- Ceci montre que  $\tilde{\gamma}$  est une immersion *quelle que soit la valeur de  $\alpha$* .

# Corrugations

- La quantité  $A$  est donc strictement positive, la coordonnée en  $\mathbf{t}$  de  $\tilde{\gamma}'$  ne peut s'annuler

$$[\tilde{\gamma}'(\mathbf{t})]^{\mathbf{t}} = \|\gamma'(\mathbf{t})\| + \alpha A > 0.$$

- Ceci montre que  $\tilde{\gamma}$  est une immersion *quelle que soit la valeur de  $\alpha$* .
- Notons  $\tilde{\gamma}_\alpha$  l'immersion  $\tilde{\gamma}$  afin de souligner la dépendance en  $\alpha$ .  
Puisque  $\tilde{\gamma}_0 = \gamma$ , l'homotopie

$$\mathbf{s} \longmapsto \tilde{\gamma}_{s\alpha}$$

est régulière et joint  $\gamma$  à  $\tilde{\gamma}_\alpha$ . □

# Construction explicite d'homotopies régulières

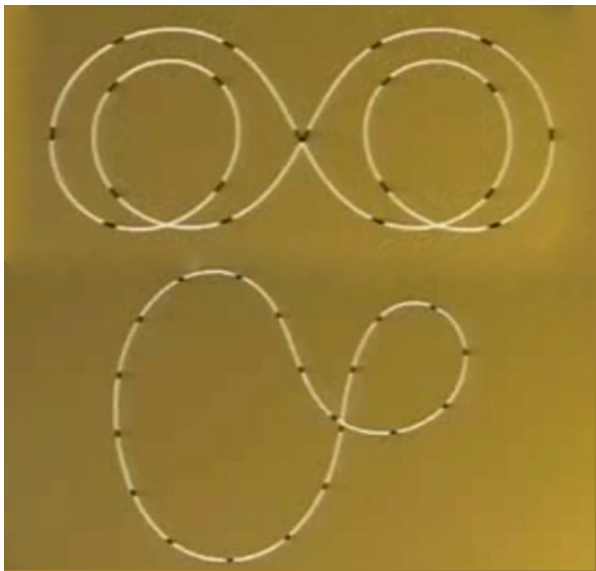


Image : Geometric Center

# Homotopie, étape 0

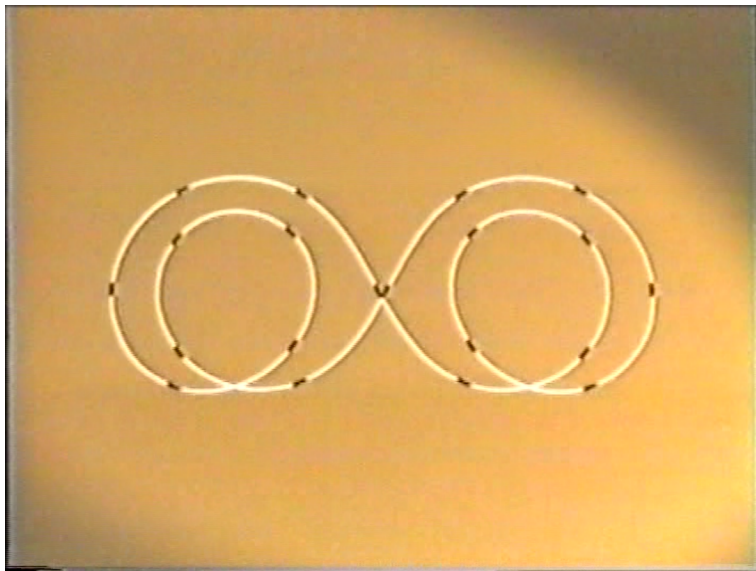
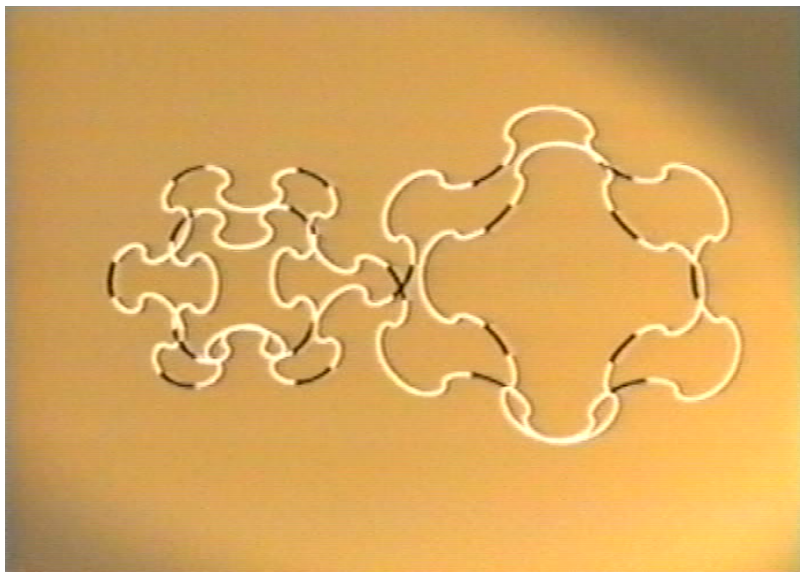


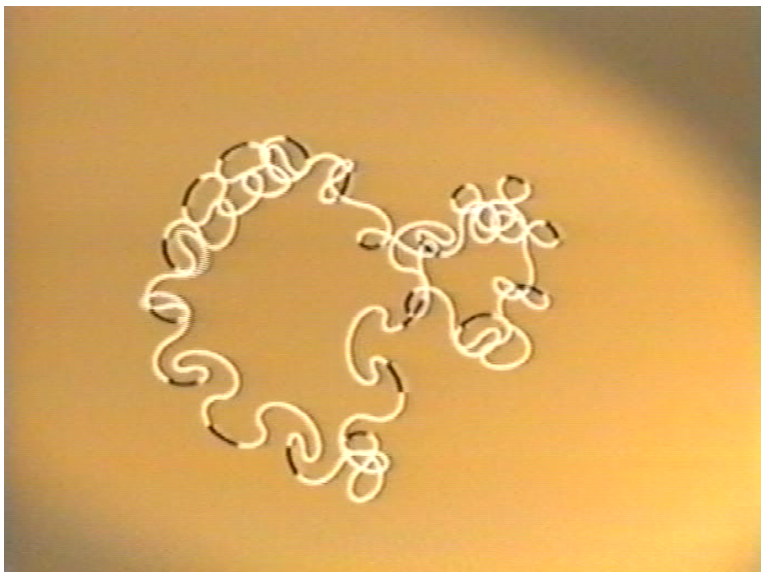
Image : Geometric Center

# Homotopie, étape 1



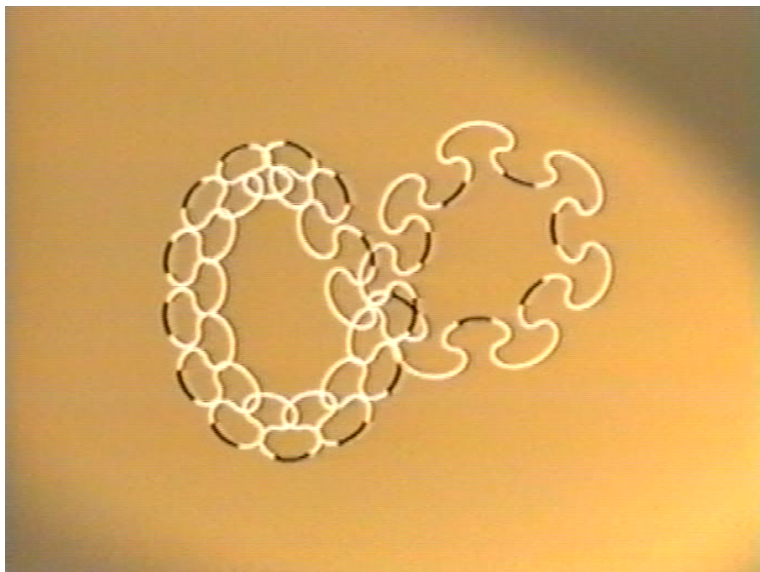
Étape 1 : Création des corrugations

## Homotopie, étape 2



Étape 2 : Interpolation linéaire

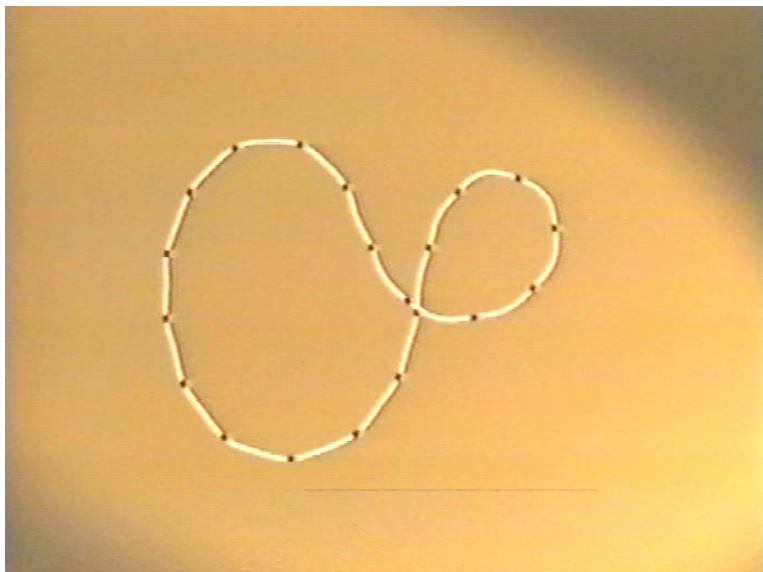
## Homotopie, étape 3



Étape 3 : Repositionnement des corrugations



## Homotopie, étape 4



Étape 4 : Suppression des corrugations

# Les étapes

- **Objectif.**— Étant données  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  ayant même indice, construire une homotopie régulière explicite les joignant.

# Les étapes

- **Objectif.**— Étant données  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  ayant même indice, construire une homotopie régulière explicite les joignant.
- **Étape 1.**— Création des corrugations  $\gamma_0 \longrightarrow \tilde{\gamma}_0$

$$\tilde{\gamma}_0(t) = \gamma_0(t) + \delta_\alpha(Nt)\mathbf{t}_0(t).$$

# Les étapes

- **Objectif.**— Étant données  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  ayant même indice, construire une homotopie régulière explicite les joignant.

- **Étape 1.**— Création des corrugations  $\gamma_0 \longrightarrow \tilde{\gamma}_0$

$$\tilde{\gamma}_0(t) = \gamma_0(t) + \delta_\alpha(Nt)\mathbf{t}_0(t).$$

- **Étape 2.**— Interpolation linéaire  $\tilde{\gamma}_0 \longrightarrow \tilde{\gamma}_{s,0} \longrightarrow \tilde{\gamma}_{1,0}$

$$\tilde{\gamma}_{1,0}(t) = \gamma_1(t) + \delta_\alpha(Nt)\mathbf{t}_0(t)$$

et

$$\tilde{\gamma}_{s,0}(t) = \gamma_s(t) + \delta_\alpha(Nt)\mathbf{t}_0(t)$$

avec

$$\gamma_s(t) = (1 - s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t).$$

# Les étapes

- **Étape 3.**– Repositionnement des corrugations  $\tilde{\gamma}_{1,0} \longrightarrow \tilde{\gamma}_{1,s} \longrightarrow \tilde{\gamma}_1$

$$\tilde{\gamma}_1(t) = \gamma_1(t) + \delta_\alpha(Nt)\mathbf{t}_1(t)$$

et

$$\tilde{\gamma}_{1,s}(t) = \gamma_1(t) + \delta_\alpha(Nt)\mathbf{t}_s(t)$$

avec

$$\mathbf{t}_s(t) = e^{i\theta_s(t)}, \quad \theta_s(t) = (1-s)\theta_0(t) + s\theta_1(t).$$

*Cette homotopie est réalisable si et seulement si  $\text{Ind}(\gamma_0) = \text{Ind}(\gamma_1)$*

# Les étapes

- **Étape 3.**– Repositionnement des corrugations  $\tilde{\gamma}_{1,0} \longrightarrow \tilde{\gamma}_{1,s} \longrightarrow \tilde{\gamma}_1$

$$\tilde{\gamma}_1(t) = \gamma_1(t) + \delta_\alpha(Nt)\mathbf{t}_1(t)$$

et

$$\tilde{\gamma}_{1,s}(t) = \gamma_1(t) + \delta_\alpha(Nt)\mathbf{t}_s(t)$$

avec

$$\mathbf{t}_s(t) = e^{i\theta_s(t)}, \quad \theta_s(t) = (1-s)\theta_0(t) + s\theta_1(t).$$

*Cette homotopie est réalisable si et seulement si  $\text{Ind}(\gamma_0) = \text{Ind}(\gamma_1)$*

- **Étape 4.**– Suppression des corrugations  $\tilde{\gamma}_1 \longrightarrow \gamma_1$ .

# Les étapes

- Les étapes 1 et 4 sont des homotopies régulières si  $N$  est choisi tel que

$$N \geq \frac{1}{\pi} \max\{\|k_0\|_{C^0}, \|k_1\|_{C^0}\} \quad (\text{Cond. 1}).$$

# Les étapes

- Les étapes 1 et 4 sont des homotopies régulières si  $N$  est choisi tel que

$$N \geq \frac{1}{\pi} \max\{\|k_0\|_{C^0}, \|k_1\|_{C^0}\} \quad (\text{Cond. 1}).$$

- Nous allons montrer que les homotopies des étapes 2 et 3 sont elles aussi régulières si on choisit en outre

$$N > \frac{\max\{\|\gamma'_0\|_{C^0}, \|\gamma'_1\|_{C^0}\}}{(\sqrt{7} - 2)\alpha\pi} \quad (\text{Cond. 2})$$

et

$$N > \frac{2\alpha \max\{\|k_0\|_{C^0}, \|k_1\|_{C^0}\} + \|\gamma'_1\|_{C^0}}{\sqrt{7}\alpha\pi} \quad (\text{Cond. 3})$$



## Régularité de l'étape 2

**Proposition.**– Si  $N$  satisfait à (*Cond. 2*) alors l'homotopie

$$\tilde{\gamma}_{s,0}(t) = \gamma_s(t) + \delta_\alpha(Nt)\mathbf{t}_0(t)$$

où

$$\gamma_s(t) = (1 - s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)$$

est régulière.

## Régularité de l'étape 2

**Proposition.**– Si  $N$  satisfait à (*Cond. 2*) alors l'homotopie

$$\tilde{\gamma}_{s,0}(t) = \gamma_s(t) + \delta_\alpha(Nt)\mathbf{t}_0(t)$$

où

$$\gamma_s(t) = (1 - s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)$$

est régulière.

**Démonstration.** – Notons

$$\Phi(t) := \delta_\alpha(Nt)\mathbf{t}_0(t).$$

La dérivation de  $\Phi$  donne

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &= N\delta'_\alpha(Nt)\mathbf{t}_0(t) + \delta_\alpha(Nt)\mathbf{t}'_0(t) \\ &= N\delta'_\alpha(Nt)\mathbf{t}_0(t) + \delta_\alpha(Nt)k_0(t)\mathbf{n}_0(t)\end{aligned}$$

## Régularité de l'étape 2

- Ainsi

$$\|\Phi(t)\| \geq N\|\delta'_\alpha(Nt)\| - \|\delta_\alpha(Nt)k_0(t)\|$$

et on a montré que

$$\|\delta_\alpha(Nt)\| \leq 2\alpha \quad \text{et} \quad \|\delta'_\alpha(Nt)\| \geq \sqrt{7}\alpha\pi.$$

d'où

$$\|\Phi(t)\|_{C^0} \geq \sqrt{7}\alpha\pi N - 2\alpha\|k_0\|_{C^0}$$

## Régularité de l'étape 2

- Ainsi

$$\|\Phi(t)\| \geq N\|\delta'_\alpha(Nt)\| - \|\delta_\alpha(Nt)k_0(t)\|$$

et on a montré que

$$\|\delta_\alpha(Nt)\| \leq 2\alpha \quad \text{et} \quad \|\delta'_\alpha(Nt)\| \geq \sqrt{7}\alpha\pi.$$

d'où

$$\|\Phi(t)\|_{C^0} \geq \sqrt{7}\alpha\pi N - 2\alpha\|k_0\|_{C^0}$$

- Puisque

$$N \geq \frac{1}{\pi} \max\{\|k_0\|_{C^0}, \|k_1\|_{C^0}\}$$

on en déduit

$$\begin{aligned} \|\Phi(t)\|_{C^0} &\geq \sqrt{7}\alpha\pi N - 2\alpha\pi N \\ &\geq (\sqrt{7} - 2)\alpha\pi N \end{aligned}$$

## Régularité de l'étape 2

- Dérivons maintenant l'application  $\tilde{\gamma}_{s,0} = \gamma_s + \Phi$  :

$$\tilde{\gamma}'_{s,0}(t) = \gamma'_s(t) + \Phi'(t)$$

et minorons la norme de cette dérivée

$$\begin{aligned}\|\tilde{\gamma}'_{s,0}(t)\| &\geq \|\Phi'(t)\| - \|\gamma'_s(t)\| \\ &\geq (\sqrt{7} - 2)\alpha\pi\mathbf{N} - \max\{\|\gamma'_0\|_{C^0}, \|\gamma'_1\|_{C^0}\}\end{aligned}$$

## Régularité de l'étape 2

- Dérivons maintenant l'application  $\tilde{\gamma}_{s,0} = \gamma_s + \Phi$  :

$$\tilde{\gamma}'_{s,0}(t) = \gamma'_s(t) + \Phi'(t)$$

et minorons la norme de cette dérivée

$$\begin{aligned}\|\tilde{\gamma}'_{s,0}(t)\| &\geq \|\Phi'(t)\| - \|\gamma'_s(t)\| \\ &\geq (\sqrt{7} - 2)\alpha\pi N - \max\{\|\gamma'_0\|_{C^0}, \|\gamma'_1\|_{C^0}\}\end{aligned}$$

- Puisque  $N$  est tel que

$$N > \frac{\max\{\|\gamma'_0\|_{C^0}, \|\gamma'_1\|_{C^0}\}}{(\sqrt{7} - 2)\alpha\pi}$$

on en déduit

$$\|\tilde{\gamma}'_{s,0}(t)\| > 0.$$



## Régularité de l'étape 3

**Proposition.**– Si  $N$  satisfait à (Cond. 3) alors l'homotopie

$$\tilde{\gamma}_{1,s}(t) = \gamma_1(t) + \delta_\alpha(Nt)\mathbf{t}_s(t)$$

où

$$\mathbf{t}_s(t) = e^{i\theta_s(t)}, \quad \theta_s(t) = (1 - s)\theta_0(t) + s\theta_1(t)$$

est régulière.

## Régularité de l'étape 3

**Proposition.**– Si  $N$  satisfait à (Cond. 3) alors l'homotopie

$$\tilde{\gamma}_{1,s}(t) = \gamma_1(t) + \delta_\alpha(Nt)\mathbf{t}_s(t)$$

où

$$\mathbf{t}_s(t) = e^{i\theta_s(t)}, \quad \theta_s(t) = (1-s)\theta_0(t) + s\theta_1(t)$$

est régulière.

**Démonstration.** – Introduisons l'application

$$\Psi(t) := \delta_\alpha(Nt)\mathbf{t}_s(t).$$

La dérivation de  $\Phi$  donne

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &= N\delta'_\alpha(Nt)\mathbf{t}_s(t) + \delta_\alpha(Nt)\mathbf{t}'_s(t) \\ &= N\delta'_\alpha(Nt)\mathbf{t}_s(t) + \delta_\alpha(Nt)k_s(t)\mathbf{n}_s(t)\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}k_s(t) &= (1-s)\theta'_0(t) + s\theta'_1(t) \\ &= (1-s)k_0(t) + sk_1(t).\end{aligned}$$



## Régularité de l'étape 3

- Puisque

$$\|\delta_\alpha(Nt)\| \leq 2\alpha \quad \text{et} \quad \|\delta'_\alpha(Nt)\| \geq \sqrt{7}\alpha\pi$$

il s'en suit que

$$\begin{aligned} \|\psi'(t)\| &\geq N\|\delta'_\alpha(Nt)\| - \|\delta_\alpha(Nt)k_s(t)\| \\ &\geq \sqrt{7}\alpha\pi N - 2\alpha \max\{\|k_0\|_{C^0}, \|k_1\|_{C^0}\}. \end{aligned}$$

## Régularité de l'étape 3

- Puisque

$$\|g_\alpha(Nt)\| \leq 2\alpha \quad \text{et} \quad \|g'_\alpha(Nt)\| \geq \sqrt{7}\alpha\pi$$

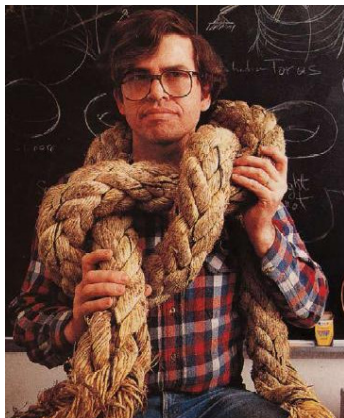
il s'en suit que

$$\begin{aligned}\|\Psi'(t)\| &\geq N\|g'_\alpha(Nt)\| - \|g_\alpha(Nt)k_s(t)\| \\ &\geq \sqrt{7}\alpha\pi N - 2\alpha \max\{\|k_0\|_{C^0}, \|k_1\|_{C^0}\}.\end{aligned}$$

- De l'égalité  $\tilde{\gamma}'_{1,s}(t) = \gamma'_1(t) + \Psi'(t)$  on déduit

$$\begin{aligned}\|\tilde{\gamma}'_{1,s}(t)\| &\geq \|\Psi'(t)\| - \|\gamma'_1(t)\| \\ &\geq \sqrt{7}\alpha\pi N - 2\alpha \max\{\|k_0\|_{C^0}, \|k_1\|_{C^0}\} - \|\gamma_1\|_{C^0}\end{aligned}$$

et le minorant est strictement positif si  $N$  satisfait à (*Cond. 3*). □



William Thurston en difficulté face à une corrugation sauvage

Les corrugations introduites par Thurston permettent non seulement de démontrer le théorème de Whitney-Graustein mais aussi de trouver explicitement les homotopies entre les courbes de même indice.

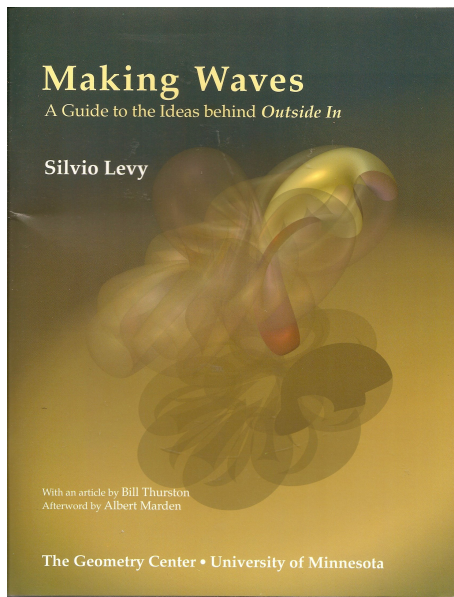
# Épilogue



Image : Geometric Center

Les corrugations seront utilisées par Thurston pour construire un retournement explicite de la sphère.

Cette histoire est racontée ici



*Silvio Levy*



*That's all Folks!*

William Thurston