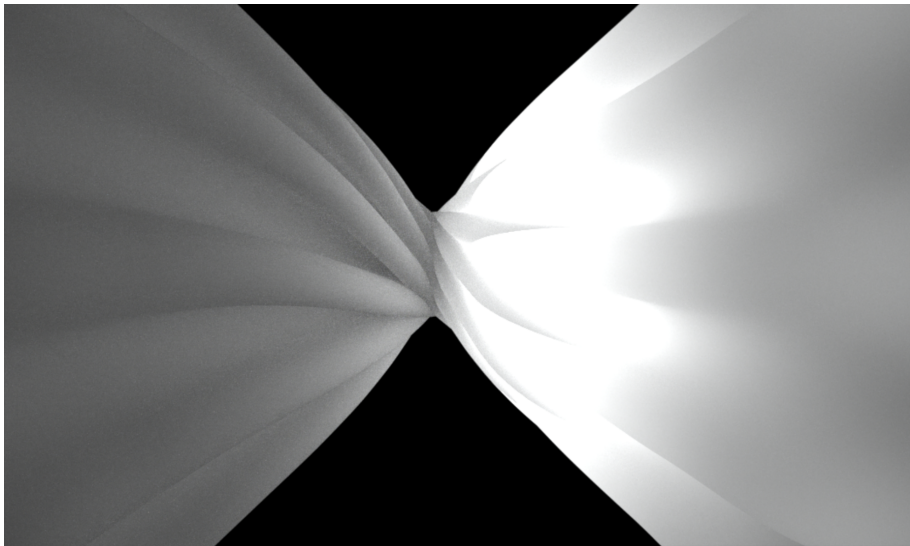


CM 2 : L'intégration convexe



Un problème introductif

Problème.— Soit

$$\begin{aligned} f_0 : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (0, 0, t) \end{aligned}$$

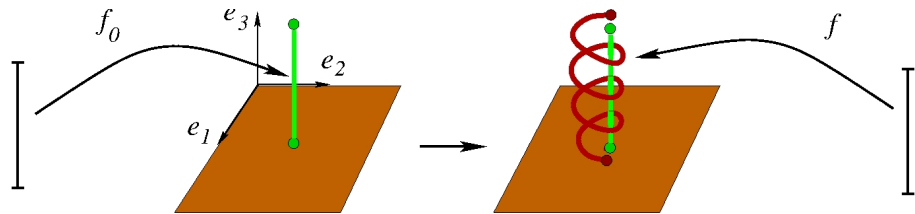
l'application linéaire envoyant le segment $[0, 1]$ verticalement dans \mathbb{R}^3 .

On cherche $f : [0, 1] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^3$ telle que :

- i) $\forall t \in [0, 1], |\cos(f'(t), e_3)| < \epsilon$
- ii) $\|f - f_0\|_{C^0} < \delta$

où $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$ sont donnés.

Un exemple introductif



L'image de f_0 est le segment vertical (vert), la solution f est l'hélice (rouge).

Un exemple introductif

Solution.– On considère l'hélice

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \begin{cases} \delta \cos 2\pi Nt \\ \delta \sin 2\pi Nt \\ t \end{cases} \end{aligned}$$

où $N \in \mathbb{N}^*$ est le nombre de boucle. On a

$$\left\langle \frac{f'}{\|f'\|}, e_3 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 N^2 \delta^2}}.$$

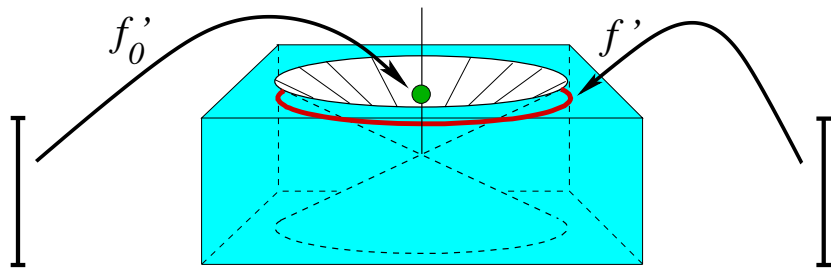
et par conséquent, si N est suffisamment grand, f satisfait aux conditions *i* et *ii*.

Un exemple introductif

Reformulation.— La condition (i) signifie que l'image de f' est incluse dans le cône :

$$\mathcal{R} = \{v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \mid \left| \left\langle \frac{v}{|v|}, e_3 \right\rangle \right| < \epsilon\} \cup \{O\}.$$

Par extension, le cône \mathcal{R} est appelé la *relation différentielle* du problème.



Un exemple introductif

La C^0 -proximité exprimée par la condition (ii) s'obtient comme conséquence d'une propriété géométrique de la dérivée de f . En effet, l'image de f' est un cercle inclus dans le cône et dont le centre est l'image de l'application constante f'_0 . Par conséquent, la moyenne de f' pour chaque boucle de f est $f'_0(t)$:

$$\frac{1}{\text{Long}(I_k)} \int_{I_k} f'(u) du = f'_0(t)$$

où $I_k = [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]$ est la préimage d'une boucle par f . Après intégration, les deux applications obtenues seront donc proches l'une de l'autre.

La question fondamentale de l'intégration convexe

Question Fondamentale de l'IC (QFIC).— Soient $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3$ un sous-ensemble connexe par arcs (=la relation différentielle) et $f_0 : [0, 1] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^3$ une application telle que

$$\forall t \in [0, 1], \quad f_0'(t) \in \text{IntConv}(\mathcal{R})$$

où $\text{IntConv}(\mathcal{R})$ désigne l'intérieur de l'enveloppe convexe de \mathcal{R} .

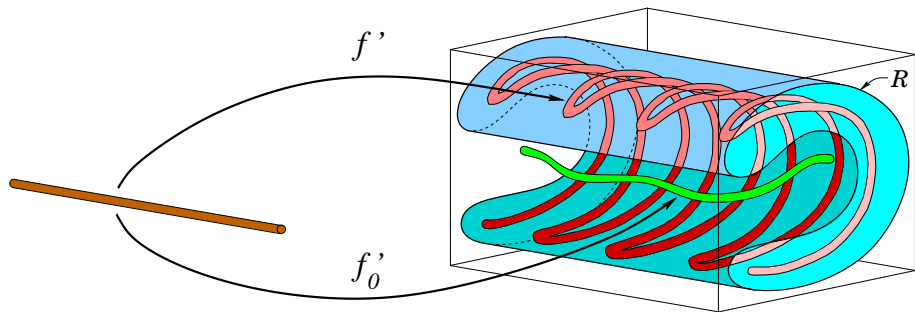
Existe-t-il $f : [0, 1] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^3$ telle que :

- i) $\forall t \in [0, 1], \quad f'(t) \in \mathcal{R}$
- ii) $\|f - f_0\|_{C^0} < \delta$

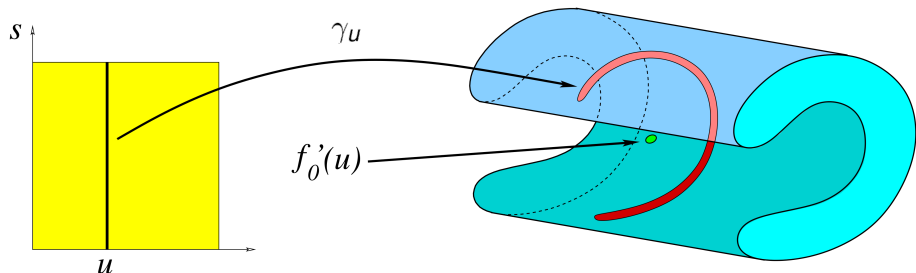
où $\delta > 0$ est donnée ?

La question fondamentale de l'intégration convexe

Idée.— Construire f tel que f' se comporte comme suggéré dans le dessin :



Deux exemples introductifs



Afin de construire formellement une solution f au problème, on choisit une famille continue $(\gamma_u)_{u \in [0,1]}$ de lacets \mathcal{R} :

$$\begin{array}{ccc} \gamma_u : \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathcal{R} \\ s & \longmapsto & \gamma_u(s) \end{array}$$

telle que

$$\forall u \in [0, 1], \quad \int_{[0,1]} \gamma(u, s) ds = f'_0(u)$$

i.e la moyenne $\bar{\gamma}_u$ du lacet γ_u est $f'_0(u)$.

Le procédé de corrugation de Theillière

On définit alors f par la formule :

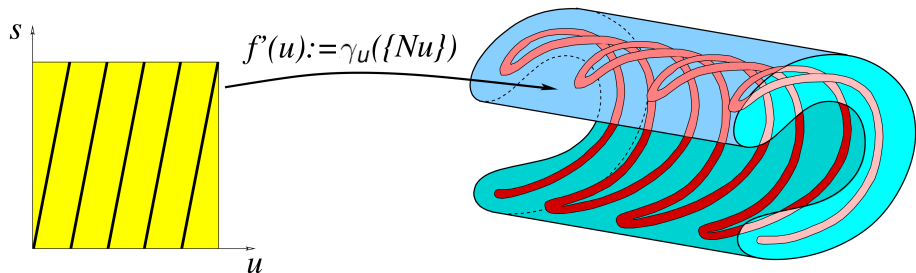
$$f(t) := f_0(t) + \frac{1}{N} \int_0^{Nt} (\gamma(t, s) - \bar{\gamma}_t) ds$$

où

$$\bar{\gamma}_t = \int_0^1 \gamma(t, s) ds.$$

Définition.— On dit alors que f est obtenu à partir de f_0 par *procédé de corrugation* (de Theillière). On note $f = CP(f_0, \gamma, N)$.

Le procédé de corrugation de Theillière



Proposition.— Soit $f = CP(f_0, \gamma, N)$. On a

$$i) \|f - f_0\|_{C^0} = O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$ii) f'(t) = \gamma(\{Nt\}, t) + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

Démonstration de la proposition

- Point i) : On a

$$\begin{aligned} f(t) - f_0(t) &= \frac{1}{N} \int_0^{Nt} (\gamma(t, s) - \bar{\gamma}(t)) ds \\ &= \frac{1}{N} \int_{\lfloor Nt \rfloor}^{Nt} (\gamma(t, s) - \bar{\gamma}(t)) ds \end{aligned}$$

car, par 1-périodicité,

$$\int_k^{k+1} (\gamma(t, s) - \bar{\gamma}(t)) ds = 0.$$

Démonstration de la proposition

- Point i) : On a

$$\begin{aligned}f(t) - f_0(t) &= \frac{1}{N} \int_0^{Nt} (\gamma(t, s) - \bar{\gamma}(t)) ds \\ &= \frac{1}{N} \int_{\lfloor Nt \rfloor}^{Nt} (\gamma(t, s) - \bar{\gamma}(t)) ds\end{aligned}$$

car, par 1-périodicité,

$$\int_k^{k+1} (\gamma(t, s) - \bar{\gamma}(t)) ds = 0.$$

Ainsi

$$\|f(t) - f_0(t)\| \leq \frac{1}{N} \int_{\lfloor Nt \rfloor}^{Nt} \|\gamma(t, s) - \bar{\gamma}(t)\| ds = O\left(\frac{1}{N}\right)$$

par compacité.

Démonstration de la proposition

- Point *ii*) : En dérivant l'expression de f on obtient

$$\begin{aligned} f'(t) &= f'_0(t) + \gamma(Nt, t) - \bar{\gamma}(t) + \frac{1}{N} \int_0^{Nt} \frac{\partial}{\partial t} (\gamma(t, s) - \bar{\gamma}(t)) ds \\ &= \gamma(Nt, t) + \frac{1}{N} \int_{\lfloor Nt \rfloor}^{Nt} \frac{\partial}{\partial t} (\gamma(t, s) - \bar{\gamma}(t)) ds \end{aligned}$$

d'où

$$f'(t) = f'_0(t) + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Résolution de la QFIC

Corollaire QFIC.— Soient $f_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe par arcs. S'il existe $\gamma : I \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{R}$ de classe C^∞ telle que

$$\forall u \in I, \quad f'_0(u) = \int_0^1 \gamma_u(s) ds$$

alors $f = CP(f_0, \gamma, N)$ satisfait aux deux points de la QFIC :

i) $\forall t \in [0, 1], \quad f'(t) \in \mathcal{R}$

ii) $\|f - f_0\|_{C^0} < O\left(\frac{1}{N}\right)$

i.e. f est une solution à la QFIC.

Lien avec les corrugations de Thurston

- Soit $f_0 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ une immersion. Choisissons la famille de lacets γ_u suivante

$$\gamma_u(s) = f'_0(u) + 4r\pi (-\cos(4\pi s)\mathbf{t}_0(u) + \cos(2\pi s)\mathbf{n}_0(u))$$

où

$$\mathbf{t}_0(u) = \frac{f'_0(u)}{\|f'_0(u)\|} \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_0(u) = i\mathbf{t}_0(u).$$

Lien avec les corrugations de Thurston

- Soit $f_0 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ une immersion. Choisissons la famille de lacets γ_u suivante

$$\gamma_u(s) = f'_0(u) + 4r\pi (-\cos(4\pi s)\mathbf{t}_0(u) + \cos(2\pi s)\mathbf{n}_0(u))$$

où

$$\mathbf{t}_0(u) = \frac{f'_0(u)}{\|f'_0(u)\|} \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_0(u) = i\mathbf{t}_0(u).$$

- Il est immédiat de vérifier que

$$\bar{\gamma}_u = \int_0^1 \gamma_u(s) ds = f'_0(u).$$

Lien avec les corrugations de Thurston

- Soit $f_0 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ une immersion. Choisissons la famille de lacets γ_u suivante

$$\gamma_u(s) = f'_0(u) + 4r\pi (-\cos(4\pi s)\mathbf{t}_0(u) + \cos(2\pi s)\mathbf{n}_0(u))$$

où

$$\mathbf{t}_0(u) = \frac{f'_0(u)}{\|f'_0(u)\|} \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_0(u) = i\mathbf{t}_0(u).$$

- Il est immédiat de vérifier que

$$\bar{\gamma}_u = \int_0^1 \gamma_u(s) ds = f'_0(u).$$

Lemme (où l'on retrouve les corrugations de Thurston). – Avec un tel choix pour la famille de lacets γ_u , on a

$$CP(f_0, \gamma, N) = f_0(t) + \frac{1}{N} \delta_r(Nt) \mathbf{t}_0(t)$$

Lien avec les corrugations de Thurston

Démonstration. – Rappelons que

$$CP(f_0, \gamma, N) = f_0(t) + \frac{1}{N} \int_0^{Nt} (\gamma(t, s) - \bar{\gamma}_t) ds$$

Puisque $\bar{\gamma}_t = f'_0(t)$, on a

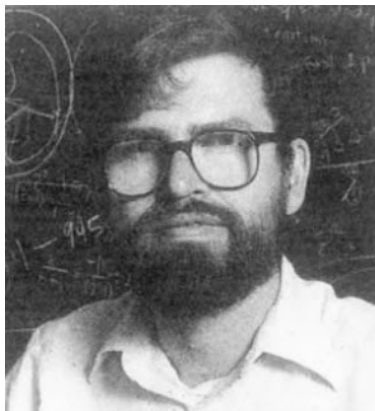
$$\gamma(t, s) - \bar{\gamma}_t = 4r\pi (-\cos(4\pi s)\mathbf{t}_0(t) + \cos(2\pi s)\mathbf{n}_0(t))$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^{Nt} \gamma(t, s) - \bar{\gamma}_t ds &= 4r\pi \left[-\frac{\sin(4\pi s)}{4\pi} \mathbf{t}_0(t) + \frac{\sin(2\pi s)}{2\pi} \mathbf{n}_0(t) \right]_0^{Nt} \\ &= -r \sin(4\pi Nt) \mathbf{t}_0(t) + 2ir \sin(2\pi Nt) \mathbf{n}_0(t) \\ &= 8_r(Nt) \mathbf{t}_0(t) \end{aligned}$$

□

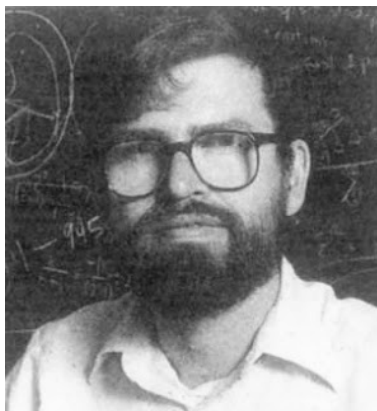
Corrugation versus Intégration Convexe



William Thurston et Mikhaïl Gromov

L'intégration convexe fait apparaître un facteur $\frac{1}{N}$ qui permet de contrôler la C^0 proximité à f_0 de l'application $CP(f_0, \gamma, N)$ au moyen du nombre de corrugations.

Corrugation versus Intégration Convexe



William Thurston et Mikhaïl Gromov

Cette C^0 -proximité permet à la théorie de l'intégration convexe un champ d'applications très vaste qui échappe à la théorie des corrugations de Thurston.

Retour au théorème de Whitney-Graustein

Objectif.— Résoudre le problème de la classification des immersions dans le cadre de la théorie de l'intégration convexe, c'est-à-dire en le formulant à la façon de la QFIC en faisant apparaître *une relation différentielle* ainsi qu'une *propriété de convexité*.

Retour au théorème de Whitney-Graustein

Objectif.— Résoudre le problème de la classification des immersions dans le cadre de la théorie de l'intégration convexe, c'est-à-dire en le formulant à la façon de la QFIC en faisant apparaître *une relation différentielle* ainsi qu'une *propriété de convexité*.

- Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une application. Cette application est une *immersion* si sa dérivée ne s'annule jamais i. e.

$$\forall t \in [0, 1], \quad f'(t) \neq (0, 0).$$

Retour au théorème de Whitney-Graustein

Objectif.— Résoudre le problème de la classification des immersions dans le cadre de la théorie de l'intégration convexe, c'est-à-dire en le formulant à la façon de la QFIC en faisant apparaître *une relation différentielle* ainsi qu'une *propriété de convexité*.

- Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une application. Cette application est une *immersion* si sa dérivée ne s'annule jamais i. e.

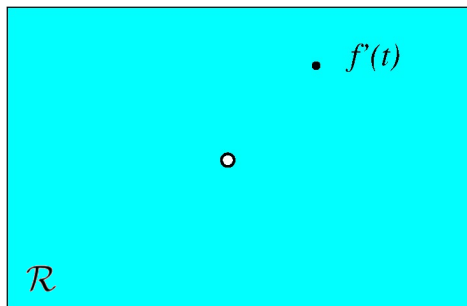
$$\forall t \in [0, 1], \quad f'(t) \neq (0, 0).$$

- Soit $\mathcal{R} = \mathbb{C}^*$. L'application f est donc une immersion si

$$\forall t \in [0, 1], \quad f'(t) \in \mathcal{R}.$$

On dit que \mathcal{R} est la *relation différentielle* des immersions de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} .

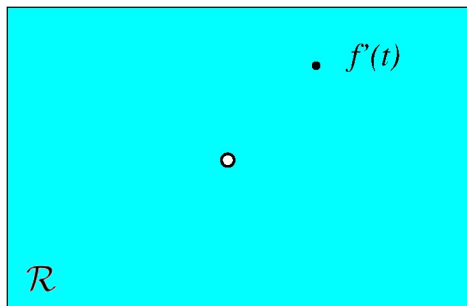
Retour au théorème de Whitney-Graustein



- Soit f_0 une application singulière, c'est-à-dire pour laquelle il existe $t \in [0, 1]$ telle que $f'_0(t) = (0, 0)$ Puisque $(0, 0) \in \text{Conv}(\mathcal{R})$, on a

$$\forall t \in [0, 1], \quad f'_0(t) \in \text{Conv}(\mathcal{R}).$$

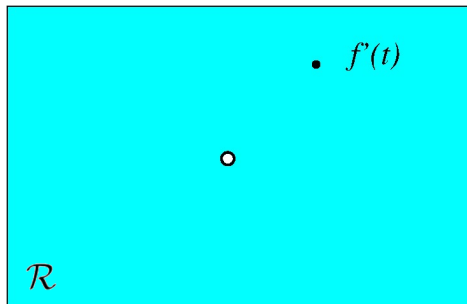
Retour au théorème de Whitney-Graustein



- Soit f_0 une application singulière, c'est-à-dire pour laquelle il existe $t \in [0, 1]$ telle que $f'_0(t) = (0, 0)$ Puisque $(0, 0) \in \text{Conv}(\mathcal{R})$, on a

$$\forall t \in [0, 1], \quad f'_0(t) \in \text{Conv}(\mathcal{R}).$$

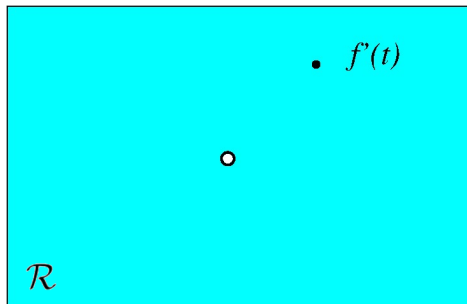
Retour au théorème de Whitney-Graustein



- On peut appliquer le processus de corrugation pour résoudre \mathcal{R} , c'est-à-dire pour construire à partir de f_0 une immersion

$$f = CP(f_0, \gamma, N).$$

Retour au théorème de Whitney-Graustein



- On peut appliquer le processus de corrugation pour résoudre \mathcal{R} , c'est-à-dire pour construire à partir de f_0 une immersion

$$f = CP(f_0, \gamma, N).$$

- Reste cependant à choisir la famille de lacets $\gamma...$

Retour au théorème de Whitney-Graustein

Lemme fondamental de l'intégration convexe. – Soient \mathcal{R} ouverte et connexe et $z : [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}$, alors il existe une famille continue de lacets $(\gamma_u)_{u \in [0, 1]}$ de \mathcal{R} telle que

$$\forall u \in [0, 1], \quad z(u) = \int_0^1 \gamma_u(s) ds.$$

Retour au théorème de Whitney-Graustein

Lemme fondamental de l'intégration convexe. – Soient \mathcal{R} ouverte et connexe et $z : [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}$, alors il existe une famille continue de lacets $(\gamma_u)_{u \in [0, 1]}$ de \mathcal{R} telle que

$$\forall u \in [0, 1], \quad z(u) = \int_0^1 \gamma_u(s) ds.$$

- Ce lemme est rassurant puisqu'il garantit l'existence de la famille de lacets γ .

Retour au théorème de Whitney-Graustein

Lemme fondamental de l'intégration convexe. – Soient \mathcal{R} ouverte et connexe et $z : [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}$, alors il existe une famille continue de lacets $(\gamma_u)_{u \in [0, 1]}$ de \mathcal{R} telle que

$$\forall u \in [0, 1], \quad z(u) = \int_0^1 \gamma_u(s) ds.$$

- Ce lemme est rassurant puisqu'il garantit l'existence de la famille de lacets γ .
- Mais si l'on désire une construction *explicite*, ce lemme n'est d'aucune aide.

Retour au théorème de Whitney-Graustein

- L'application f_0 étant donnée, l'idée naturelle est de choisir la famille de lacets associée aux corrugations de Thurston

$$\gamma_u(s) = f'_0(u) + 4r\pi (-\cos(4\pi s)\mathbf{t}_0(u) + \cos(2\pi s)\mathbf{n}_0(u))$$

Retour au théorème de Whitney-Graustein

- L'application f_0 étant donnée, l'idée naturelle est de choisir la famille de lacets associée aux corrugations de Thurston

$$\gamma_u(s) = f'_0(u) + 4r\pi (-\cos(4\pi s)\mathbf{t}_0(u) + \cos(2\pi s)\mathbf{n}_0(u))$$

- Cette famille satisfait aux deux conditions du corollaire QFIC

a) $\forall (u, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad \gamma_u(t) \in \mathcal{R} = \mathbb{C}^*$

b) $\forall u \in [0, 1], \quad \int_0^1 \gamma_u(s) ds = f'_0(u)$

Retour au théorème de Whitney-Graustein

- L'application f_0 étant donnée, l'idée naturelle est de choisir la famille de lacets associée aux corrugations de Thurston

$$\gamma_u(s) = f'_0(u) + 4r\pi (-\cos(4\pi s)\mathbf{t}_0(u) + \cos(2\pi s)\mathbf{n}_0(u))$$

- Cette famille satisfait aux deux conditions du corollaire QFIC

a) $\forall (u, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad \gamma_u(t) \in \mathcal{R} = \mathbb{C}^*$

b) $\forall u \in [0, 1], \quad \int_0^1 \gamma_u(s) ds = f'_0(u)$

- En effet, le point a) signifie que $\|\gamma_u(t)\| > 0$ et ceci a été abondamment vérifié au CM 1. Quant au point b) il est immédiat car $\int_0^1 \delta'_r(s) ds = 0$.

Solutions formelles

- Il y a pourtant un **sérieux problème** dans la définition de la famille γ_u

$$\gamma_u(s) = f'_0(u) + 4r\pi (-\cos(4\pi s)\mathbf{t}_0(u) + \cos(2\pi s)\mathbf{n}_0(u))$$

où

$$\mathbf{t}_0(u) = \frac{f'_0(u)}{\|f'_0(u)\|} \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_0(u) = i\mathbf{t}_0(u).$$

Solutions formelles

- Il y a pourtant un **sérieux problème** dans la définition de la famille γ_u

$$\gamma_u(s) = f'_0(u) + 4r\pi (-\cos(4\pi s)\mathbf{t}_0(u) + \cos(2\pi s)\mathbf{n}_0(u))$$

où

$$\mathbf{t}_0(u) = \frac{f'_0(u)}{\|f'_0(u)\|} \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_0(u) = i\mathbf{t}_0(u).$$

La famille de lacets n'est pas définie aux seuls points où on en a vraiment besoin !

- En effet, aux points $u \in [0, 1]$ où f_0 est singulière la dérivée $f'_0(u)$ s'annule et les vecteurs $\mathbf{t}_0(u)$ et $\mathbf{n}_0(u)$ ne sont pas définis.

Solutions formelles

- Pour contourner ce problème, on introduit une donnée supplémentaire : le choix d'une application (au moins continue)

$$v : [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}$$

et on remplace $\mathbf{t}_0(u)$ et $\mathbf{n}_0(u)$ par

$$\mathbf{v}_1(u) = \frac{v(u)}{\|v(u)\|} \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_1(u) = i\mathbf{v}_1(u).$$

On note encore γ_u la famille de lacets qui en résulte

$$\gamma_u(\mathbf{s}) = f'_0(u) + 4r\pi (-\cos(4\pi\mathbf{s})\mathbf{v}_1(u) + \cos(2\pi\mathbf{s})\mathbf{n}_1(u)).$$

Solutions formelles

Lemme.– Si r est choisi suffisamment grand alors la famille de lacets

$$\gamma_u(s) = f'_0(u) + 4r\pi (-\cos(4\pi s)\mathbf{v}_1(u) + \cos(2\pi s)\mathbf{n}_1(u))$$

satisfait aux deux conditions du corollaire QFIC

a) $\forall (u, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad \gamma_u(t) \in \mathcal{R} = \mathbb{C}^*$

b) $\forall u \in [0, 1] \quad \int_0^1 \gamma_u(s) ds = f'_0(u)$

Solutions formelles

Lemme.— Si r est choisi suffisamment grand alors la famille de lacets

$$\gamma_u(s) = f'_0(u) + 4r\pi (-\cos(4\pi s)\mathbf{v}_1(u) + \cos(2\pi s)\mathbf{n}_1(u))$$

satisfait aux deux conditions du corollaire QFIC

$$a) \forall (u, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad \gamma_u(t) \in \mathcal{R} = \mathbb{C}^*$$

$$b) \forall u \in [0, 1] \quad \int_0^1 \gamma_u(s) ds = f'_0(u)$$

Démonstration.— Le point $b)$ est immédiat. Pour $a)$ puisque

$$\gamma_u(s) = f'_0(u) + 8'_r(s)\mathbf{v}_1(u) \quad \text{et} \quad |8'_r(s)| \geq \sqrt{7}r\pi$$

on déduit que

$$\|\gamma_u(s)\| \geq \sqrt{7}r\pi - \|f'_0\|_{C^0} > 0$$

si r est choisi suffisamment grand. □

Solutions formelles

Définition.— Le couple (f_0, v) où $v : [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}$ est appelé une *solution formelle* de \mathcal{R} .

Solutions formelles

Définition.— Le couple (f_0, ν) où $\nu : [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}$ est appelé une *solution formelle* de \mathcal{R} .

- Au bilan, le processus de corrugation associe à toute solution formelle (f_0, ν) de \mathcal{R} une véritable solution

$$f = CP(f_0, \gamma, N)$$

c'est-à-dire une application f telle que $f'(t) \in \mathcal{R}$ pour tout t .

Solutions formelles

Définition.— Le couple (f_0, ν) où $\nu : [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}$ est appelé une *solution formelle* de \mathcal{R} .

- Au bilan, le processus de corrugation associe à toute solution formelle (f_0, ν) de \mathcal{R} une véritable solution

$$f = CP(f_0, \gamma, N)$$

c'est-à-dire une application f telle que $f'(t) \in \mathcal{R}$ pour tout t .

- Notons $\Gamma(\mathcal{R})$ et $Sol(\mathcal{R})$ l'espace des solutions formelles et celui des solutions de \mathcal{R} . Il y a une inclusion naturelle $Sol(\mathcal{R}) \subset \Gamma(\mathcal{R})$ donnée par

$$f \longmapsto (f, f')$$

Solutions formelles

Définition.— Le couple (f_0, ν) où $\nu : [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}$ est appelé une *solution formelle* de \mathcal{R} .

- Au bilan, le processus de corrugation associe à toute solution formelle (f_0, ν) de \mathcal{R} une véritable solution

$$f = CP(f_0, \gamma, N)$$

c'est-à-dire une application f telle que $f'(t) \in \mathcal{R}$ pour tout t .

- Notons $\Gamma(\mathcal{R})$ et $Sol(\mathcal{R})$ l'espace des solutions formelles et celui des solutions de \mathcal{R} . Il y a une inclusion naturelle $Sol(\mathcal{R}) \subset \Gamma(\mathcal{R})$ donnée par

$$f \longmapsto (f, f')$$

- Le processus de corrugations fournit une sorte de réciproque

$$(f_0, \nu) \longmapsto CP(f_0, \gamma, N).$$

Whitney-Graustein façon Intégration Convexe

Théorème de Whitney-Graustein (rappel). – *Deux immersions $f_0, f_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ sont régulièrement homotopes si et seulement si elles ont le même indice : $\text{Ind}(f_0) = \text{Ind}(f_1)$. En d'autres termes*

$$\pi_0 I(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z}$$

l'identification étant donnée par l'indice.

Whitney-Graustein façon Intégration Convexe

Théorème de Whitney-Graustein (rappel). – Deux immersions $f_0, f_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ sont régulièrement homotopes si et seulement si elles ont le même indice : $\text{Ind}(f_0) = \text{Ind}(f_1)$. En d'autres termes

$$\pi_0 I(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z}$$

l'identification étant donnée par l'indice.

Démonstration.– On ne s'intéresse qu'à la réciproque à savoir, si deux immersions f_0 et f_1 ont même indice alors elles sont régulièrement homotopes.

Whitney-Graustein façon Intégration Convexe

Théorème de Whitney-Graustein (rappel). – Deux immersions $f_0, f_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ sont régulièrement homotopes si et seulement si elles ont le même indice : $\text{Ind}(f_0) = \text{Ind}(f_1)$. En d'autres termes

$$\pi_0 I(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z}$$

l'identification étant donnée par l'indice.

Démonstration.– On ne s'intéresse qu'à la réciproque à savoir, si deux immersions f_0 et f_1 ont même indice alors elles sont régulièrement homotopes.

- Considérons l'homotopie linéaire

$$g_s = (1 - s)f_0 + sf_1$$

et supposons que ce ne soit pas une homotopie régulière (sinon, on a déjà gagné).

Whitney-Graustein façon Intégration Convexe

- L'hypothèse sur l'égalité des indices de f_0 et de f_1 signifie que les applications f'_0 et f'_1 sont homotopes en tant qu'applications de \mathbb{S}^1 dans \mathcal{R} .

Whitney-Graustein façon Intégration Convexe

- L'hypothèse sur l'égalité des indices de f_0 et de f_1 signifie que les applications f'_0 et f'_1 sont homotopes en tant qu'applications de \mathbb{S}^1 dans \mathcal{R} .

- Notons v_t une telle homotopie, $v_0 = f'_0$ et $v_1 = f'_1$. La famille d'applications

$$(g_t, v_t) \in \Gamma(\mathcal{R})$$

réalise une homotopie de solutions formelles entre les solutions (f_0, f'_0) et (f_1, f'_1) .

Whitney-Graustein façon Intégration Convexe

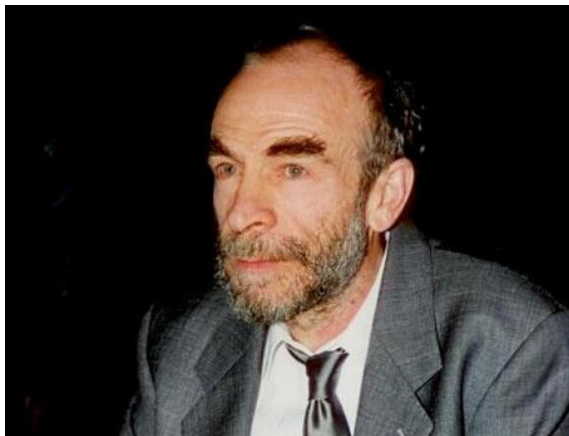
- L'hypothèse sur l'égalité des indices de f_0 et de f_1 signifie que les applications f'_0 et f'_1 sont homotopes en tant qu'applications de \mathbb{S}^1 dans \mathcal{R} .
- Notons v_t une telle homotopie, $v_0 = f'_0$ et $v_1 = f'_1$. La famille d'applications

$$(g_t, v_t) \in \Gamma(\mathcal{R})$$

réalise une homotopie de solutions formelles entre les solutions (f_0, f'_0) et (f_1, f'_1) .

- Par conséquent les applications $f_t = CP(g_t, \gamma, N)$ réalisent une homotopie régulière joignant f_0 à f_1 . □

Épilogue



Mikhaïl Gromov

La théorie de l'Intégration Convexe, inventée par Mikhaïl Gromov dans les années 70, permet de résoudre de nombreux problèmes de géométrie différentielle, par exemple le problème du retournement de la sphère de Smale.

L'IC en mécanique des fluides



Depuis les travaux de Camillo de Lellis et de László Székelyhidi en 2008, l'IC a investi la mécanique des fluides et permet de construire des solutions paradoxales à l'équation d'Euler ou à celle de Navier-Stokes.



That's all Folks!

Mikhaïl Gromov