Leçon V : Petit nécessaire de théorie homotopique

1 Type d'homotopie, groupes d'homotopie

1.1 Type d'homotopie

Définition. − Deux applications continues $f_0, f_1 : X \to Y$ sont *homotopes* si il existe une application continue $F : X \times [0,1] \to Y$, $F_s(x) = F(x,s)$, telle que $F_0 = f_0$, $F_1 = f_1$. On note alors $f_0 \approx f_1$.

Définition. − Soient X, Y deux espaces topologiques, une application $f : X \to Y$ est une *équivalence d'homotopie* s'il existe une application $g : Y \to X$ telle que $f \circ g \approx id_X$ et $g \circ f \approx id_Y$. On dit alors que g est un *inverse homotopique* de f et que X et Y sont *homotopiquement équivalents,* on note $X \approx Y$.

Bien sûr $\approx$ est une relation d'équivalence.

Définition. − Un espace X est dit *contractile* si $X \approx \{pt\}$, ou, de manière équivalente, si id_X est homotope à l'application constante $e : X \to \{pt\} \subset X$.

Définition. − Un espace $A \subset X$ est un *rétract par déformation au sens fort* de X si il existe une homotopie $F : X \times [0,1] \to X$, appelée la *déformation*, telle que :

1) $F(x,0) = x$,
2) $F(x,1) \in A$,
3) $F(x,t) = x$, si $x \in A$, $0 \leq t \leq 1$.

Si l'on exige que la condition 3) soit satisfaite seulement pour $t = 1$, on dit alors que A est un *retract par déformation.* Par définition, si A est un rétract par déformation de X, alors $A \approx X$.

Exemple 1. − $\mathbb{R}^n \approx \{0\}$. Soient $i : \{0\} \to \mathbb{R}^n$ l'inclusion et $r : \mathbb{R}^n \to \{0\}$ l'application constante, alors $r \circ i = id_{\{0\}}$ et $i \circ r \approx id_{\mathbb{R}^n}$ par $F_t = t id_{\mathbb{R}^n}$.

Exemple 2. − $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \approx \mathbb{S}^{n-1}$. Soient $i : \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ l'inclusion et $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1}$, $x \mapsto x/|x|$, alors $r \circ i = id_{\mathbb{S}^{n-1}}$ et $i \circ r \approx id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ par l'homotopie $F_t = (1-t)i + tr$.

Exemple 3. – $\mathbb{R}^3 \setminus$ Droite $\approx \mathbb{S}^1$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{pt\} \approx \mathbb{S}^1$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, ..., p_k\} \approx \vee_{i=1}^k \mathbb{S}^1$.

Exemple 4. – Tout groupe de Lie (de dimension finie) se rétracte par déformation sur un sous-groupe de Lie compact, en particulier : $Gl(n, \mathbb{R}) \approx O(n)$, $Gl_+(n, \mathbb{R}) \approx SO(n)$, $Gl(n, \mathbb{C}) \approx U(n)$.

1.2 Groupes d'homotopie

Rappelons que l'on note $\pi_0(X)$ l'ensemble des composantes connexes par arcs de X. Soient $n \geq 1$ et $x_0 \in X$, on pose :

$$\pi_n(X, x_0) = \pi_0(C^0(I^n, \partial I^n, X, x_0)),$$

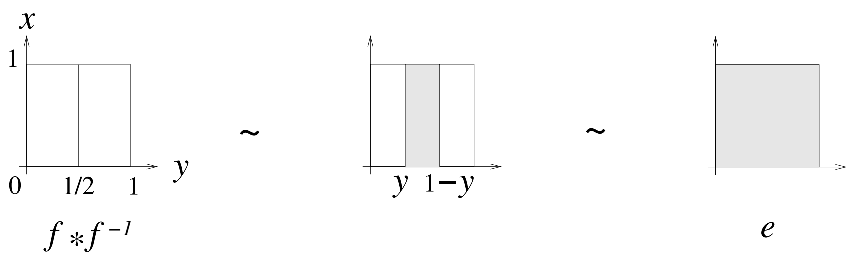
où $C^0(X, A, Y, B) = \{f \in C^0(X, Y) \mid f(A) \subset B\}$.

Proposition. – *Si $n \geq 1$, l'ensemble $\pi_n(X, x_0)$ est un groupe, il est abélien si $n \geq 2$.*

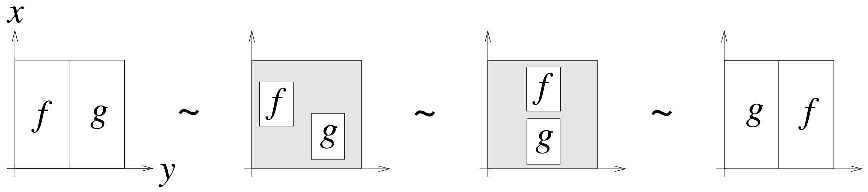
Démonstration. – On note $(x, y) \in I^{n-1} \times I$, la loi est celle de la concaténation :

$$f_1 * f_2(x, y) = \begin{cases} f_1(x, 2y) & \text{si } y \leq 1/2, \\ f_2(x, 2y-1) & \text{si } y \geq 1/2. \end{cases}$$

L'élément neutre est l'application constante $e : I^n \to \{x_0\}$. L'examen du dessin ci-dessous montre que l'inverse de $(x, y) \mapsto f(x, y)$ est $(x, y) \mapsto f(x, 1-y)$.



L'associativité est évidente, pour $n \geq 2$ la commutativité résulte de l'examen des quatre dessins ci-dessous.



□

Le groupe $\pi_n(X, x_0)$ est appelé le n-ième groupe d'homotopie de X basé en x_0. Toute application $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ induit une flèche $\pi_n f : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ par composition $[\alpha] \in \pi_n(X, x_0) \mapsto [f \circ \alpha] \in \pi_n(Y, y_0)$. Il est facile de vérifier que cette flèche est un morphisme de groupes. D'autre part $\pi_n(f \circ g) = \pi_n f \circ \pi_n g$ et $\pi_n id_X = id_{\pi_n(X, x_0)}$, autrement dit π_n est un foncteur covariant. Bien sûr, si $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ est une équivalence d'homotopie, alors $\pi_n f$ est un isomorphisme de groupes. Réciproquement, une application continue $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ qui induit un isomorphisme de groupes $\pi_n f : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ pour tout $n \geq 1$ et une bijection pour $n = 0$, est appelée une *équivalence d'homotopie faible.* Il existe une catégorie importante d'espaces topologiques pour laquelle les équivalences d'homotopie faibles sont des équivalences d'homotopie, ce sont les CW-complexes.

1.3 CW-complexes

Définition. – Un *CW-complexe* est une union dénombrable $X = \cup X^{(n)}$ où :

1) $X^{(0)}$ est un ensemble discret de points (les 0-cellules).

2) $X^{(n)}$ s'obtient à partir de $X^{(n-1)}$ en “attachant” des disques $\{D^n_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (les n-cellules) le long de leurs bords. Précisément, il existe un ensemble d'applications $f_\alpha : \partial D^n_\alpha \to X^{(n-1)}$ et

$$X^{(n)} = X^{(n-1)} \coprod_{\alpha \in A} D^n_\alpha / (f_\alpha(x) \sim x).$$

On met, bien entendu, sur $X^{(n)}$ la topologie quotient.

3) X est muni de la topologie faible i. e. $\mathcal{U} \subset X$ est ouvert si pour tout $n \geq 0, \mathcal{U} \cap X^{(n)}$ est ouvert (et donc F est fermé si pour tout $n \geq 0$, $F \cap X^{(n)}$ est fermé).

La borne supérieure des dimensions des cellules est la *dimension* du CW-complexe, les espaces $X^{(n)}$ sont les *n-squelettes.* On montre facilement que chaque cellule de X est contenue dans un sous-complexe *fini* de X. Cette propriété est à l'origine du C=closure finite de CW, le W provient de Weak topologie = topologie faible.

Exemple 1. – Tout graphe est un CW-complexe de dimension 1.

Exemple 2. – Un CW-complexe ayant une 0-cellule et une n-cellule et dont l'application d'attachement est l'application constante $e : \mathbb{S}^{n-1} \to 0-cellule$ est homéomorphe à une sphère $\mathbb{S}^n$.

Exemple 3. – Voici une autre façon de voir $\mathbb{S}^2$ comme un CW-complexe. Prendre $X_0 = \{N\} \cup \{S\}$, attacher deux 1-cellules pour obtenir $X^{(1)} =$ un équateur, puis attacher deux 2-cellules pour obtenir les deux hémisphères.

Exemple 4. – Un structure CW sur $\mathbb{T}^2$ s'obtient en prenant $X^{(0)} = \{pt\}$, $X^{(1)} =$ une latitude α et une longitude β s'intersectant en $X^{(0)}$, puis on attache une 2-cellule selon $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$.

Exemple 5. – Toute triangulation sur une variété fournit une structure CW sur la variété.

Exemple 6. – Le CW-complexe ayant une 0-cellule et k n-cellules et dont les applications d'attachement sont toutes constantes est homéomorphe au bouquet de sphères $\vee_{i=1}^{k}\mathbb{S}^n$.

Théorème de Whitehead (1948). – *Soient X et Y deux CW-complexes et $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ une équivalence d'homotopie faible, alors f est une équivalence d'homotopie.*

On admet ce résultat, mentionnons également que tout espace topologique Y admet une approximation CW, c'est-à-dire qu'il existe un CW-complexe X et une équivalence d'homotopie faible $f : X \to Y$.

1.4 Calcul des groupes d'homotopie

En général, il s'agit d'une tâche hautement non triviale. A l'heure actuelle, on ne connaît toujours pas tous les groupes d'homotopie des sphères, il est certes facile de montrer que $\pi_k(\mathbb{S}^n) = 0$ si $k < n$ et $\pi_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$, en revanche les choses deviennent ardues pour $\pi_{n+k}(\mathbb{S}^n)$, $k > 0$ (l'exercice 3 propose d'établir que $\pi_3(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$). Pour un espace topologique quelconque, le calcul est parfois facilité si l'on dispose d'un fibré $F \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} B$. En effet, contrairement à l'homologie, on a une suite exacte longue :

$$\to \pi_n(F) \to \pi_n(X) \to \pi_n(B) \to \pi_{n-1}(F) \to \cdots \to \pi_0(F) \xrightarrow{i_\sharp} \pi_0(X) \xrightarrow{p_\sharp} \pi_0(B).$$

(L'exactitude au niveau du π_0 signifie que l'image de la flèche à gauche est l'image réciproque de la composante contenant le point base de la flèche à droite). Une application directe de cette suite exacte montre que si $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ est un recouvrement d'un espace connexe X, alors $\pi_n(\tilde{X}) \to \pi_n(X)$ est injective si $n = 1$ et un isomorphisme si $n \geq 2$.

Exemple 1. – La fibration $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ permet d'obtenir : $\pi_1(\mathbb{T}^n) = \mathbb{Z}^n$, $\pi_k(\mathbb{T}^n) = 0$ si $k > 1$. Le cas $n = 1$ donne tous les groupes d'homotopie de $\mathbb{S}^1$.

Exemple 2. – La fibration de Hopf : $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ permet d'obtenir $\pi_{3+k}(\mathbb{S}^3) = \pi_{3+k}(\mathbb{S}^2)$ pour tout $k \geq 0$, en particulier $k = 0$ donne $\pi_3(\mathbb{S}^2) = \pi_3(\mathbb{S}^3) = \mathbb{Z}$.

2 Classification des applications

2.1 Homotopie libre, homotopie basée

Soient X, Y deux espaces topologiques, on note :

$$[X, Y]_0 = \pi_0(C^0((X, x_0), (Y, y_0))), \quad [X, Y] = \pi_0(C^0(X, Y)).$$

En particulier $\pi_n(Y, y_0) = [\mathbb{S}^n, Y]_0$.

Définition. – Soit $x_0 \in X$ un point base et soient $u : [0, 1] \to Y$, $f_0, f_1 : X \to Y$, on dit que f_0 est *librement homotope à f_1 le long de u*, si il existe une homotopie $F : X \times [0, 1] \to Y$ telle que $F(., 0) = f_0$, $F(., 1) = f_1$, $F(x_0, t) = u(t)$. On note $f_0 \simeq_u f_1$.

Supposons $u(0) = u(1) = y_0$ i. e. $[u] \in \pi_1(Y, y_0)$. On définit une action du $\pi_1(Y, y_0)$ sur $[X, Y]_0$ en posant $[u][f_0]_0 := [f_1]_0$ où f_1 est n'importe quelle application telle que $f_0 \simeq_u f_1$. Les propriétés suivantes (admises) montrent que cette action est bien définie :

P1.– (Existence) Soient $f_0 : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ et $u : [0, 1] \to Y$ avec $u(0) = y_0$, alors il existe $f_1 : X \to Y$ telle que $f_0 \simeq_u f_1$.

P2.– (Unicité) Soient $f_0 \simeq_u f_1$, $f_0 \simeq_v f_2$, $u \simeq v$ (rel ∂I), alors $f_1 \simeq_{const \equiv u(1) \equiv v(1)} f_2$.

P3.– (Multiplicativité) $f_0 \simeq_u f_1$, $f_1 \simeq_u f_2 \Rightarrow f_0 \simeq_u f_2$.

Théorème. – *Si Y est connexe par arcs :* $[X, Y]_0/\pi_1(Y, y_0) = [X, Y]$.

En particulier, si Y est simplement connexe, le foncteur d'oubli $[X, Y]_0 \to [X, Y]$ est bijectif. ce théorème dit aussi que le $\pi_1(Y, y_0)$ agit sur le $\pi_n(Y, y_0)$ et que le quotient est $[\mathbb{S}^n, Y]$.

Démonstration. – L'inclusion $C^0((X, x_0), (Y, y_0)) \subset C^0(X, Y)$ induit une application, dite "d'oubli", au niveau du π_0 : $\Phi : [X, Y]_0 \to [X, Y]$. Il est clair que $\Phi([u][f]_0) = \Phi([f]_0)$ donc Φ passe au quotient.
D'autre part $\Phi([f_0]_0) = \Phi([f_1]_0)$ implique qu'il existe $u : I \to Y$ tel que $f_0 \simeq_u f_1$, i. e. $[f_1]_0 = [u][f_0]_0$ et Φ est injective.
Soit $[g] \in [X, Y]$, on note $y_1 = g(x_0)$. Puisque Y est connexe par arcs, il existe $u : [0, 1] \to Y$ tel que $u(0) = y_1$, $u(1) = y_0$, d'après P1 il existe $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ tel que $f \simeq_u g$ donc $[f] = [g]$ i. e. $\Phi([f_0]_0) = [g]$. □

Définition. – On dit que Y est *n-simple* si pour tout point base $y_0 \in Y$, le $\pi_1(Y, y_0)$ agit trivialement sur $\pi_n(Y, y_0)$. L'espace Y est *simple* si il est n-simple pour tout n.

Exemple 1. – Tout espace simplement connexe est n-simple.

Exemple 2. – L'action du $\pi_1(Y)$ sur lui-même est donnée par la conjugaison : $\alpha(\beta) = \alpha\beta\alpha^{-1}$, ainsi un espace est 1-simple si et seulement si $\pi_1(Y, y_0)$ est abélien pour tout $y_0 \in Y$.

2.2 Classe fondamentale d'un CW-complexe

On suppose désormais que Y est connexe par arcs, en particulier si $(y_0, y_1) \in Y^2$, $\pi_k(Y, y_0)$ et $\pi_k(Y, y_1)$ sont isomorphes, on ne mentionnera donc plus le point base.

Définition. – On dit que Y est *n-connexe* si $\pi_k(Y) = 0$ pour tout $k \leq n$.

Soit $\rho : \pi_n(Y) \to H_n(Y, \mathbb{Z})$ l'application naturelle définie par $\rho([f]) = f_*[\mathbb{S}^n]$ où $[\mathbb{S}^n]$ représente le générateur de $H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z})$ (donné par l'orientation). En général, cette application n'est ni injective ni surjective, on a néanmoins le résultat suivant.

Théorème d'Hurewicz ($\sim$ 1935. – *L'application ρ est un morphisme de groupes. Pour $n = 1$, $\rho : \pi_1(Y)/[\pi_1(Y), \pi_1(Y)] \longrightarrow H_1(Y, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme et si Y est n-connexe, $n \geq 1$, $\rho : \pi_k(Y) \to H_k(Y, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour tout $1 \leq k \leq n+1$.*

On note désormais n le plus grand entier pour lequel Y soit $(n-1)$-connexe. Le théorème des cœfficients universels permet d'écrire une suite d'isomorphismes naturels :

$$Hom(\pi_n(Y), \pi_n(Y)) \overset{\rho}{\simeq} Hom(H_n(Y, \mathbb{Z}), \pi_n(Y)) \overset{C.U.}{\simeq} H^n(Y, \pi_n(Y)).$$

L'image de l'$id \in Hom(\pi_n(Y), \pi_n(Y))$ dans $H^n(Y, \pi_n(Y))$ par ces isomorphismes est notée $\Delta(Y)$.

Définition. – Soit n le plus grand entier pour lequel Y soit $(n-1)$-connexe. La classe $\Delta(Y) \in H^n(Y, \pi_n(Y))$ est appelée la *classe fondamentale* de Y.

Exemples. – $\Delta(\mathbb{S}^n) = [\mathbb{S}^n]$, $\Delta(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n) = [\mathbb{S}^n \times \{*\}] + [\{*\} \times \mathbb{S}^n]$.

2.3 Théorème de Hopf et sa généralisation

Le théorème de Hopf permet de classer les applications d'un CW-complexe dans $\mathbb{S}^n$ à condition que la dimension du CW-complexe soit inférieure ou égale à n.

Théorème de Hopf. – *Soit X un CW-complexe. On suppose que* $\dim X \leq n$ *ou que* $n = 1$, *alors :*

$$\begin{array}{ccc} [X, \mathbb{S}^n] & \longrightarrow & H^n(X, \mathbb{Z}) \\ [f] & \longmapsto & f^*[\mathbb{S}^n] \end{array}$$

est une bijection.

La théorie de l'obstruction permet d'obtenir la généralisation suivante.

Théorème de classification des applications. – *On note n le plus grand entier pour lequel Y est $(n-1)$-connexe. Soit X un CW-complexe tel que :*

$$\begin{array}{ll} \forall i > n & H^{i+1}(X, \pi_i(Y)) = 0, \\ \forall i > n & H^i(X, \pi_i(Y)) = 0, \end{array}$$

alors :

$$\begin{array}{ccc} [X, Y] & \longrightarrow & H^n(X, \pi_n(Y)) \\ [f] & \longmapsto & f^*\Delta(Y) \end{array}$$

est une bijection.

3 Appendice : Homologie et cohomologie

3.1 Homologie singulière

On appelle *q-simplexe*, l'ensemble :

$$\Delta^q = \{(t_0, ..., t_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid \sum t_i = 1,\ t_i \geq 0\}.$$

Les fonctions :

$$\begin{array}{cccc} f^q_m : & \Delta^{q-1} & \longrightarrow & \Delta^q \\ & (t_0, ..., t_{q-1}) & \longmapsto & (t_0, ..., t_{m-1}, 0, t_m, ..., t_{q-1}) \end{array}$$

sont appelées les *applications de face.*

Définition. – Soit X un espace topologique. Un *q-simplexe singulier* de X est une application (continue) $\sigma : \Delta^q \to X$.

On note $S_q(X,\mathbb{Z})$ le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les q-simplexes singuliers $\{\sigma : \Delta^q \to X\}$. Un élément de $S_q(X,\mathbb{Z})$ s'écrit donc comme une somme formelle (finie) :

$$\sum_i a_i \sigma_i$$

où $a_i \in \mathbb{Z}$, $\sigma_i \in C^0(\Delta^q, X)$. On définit une application "bord" $\partial_q : S_q(X,\mathbb{Z}) \to S_{q-1}(X,\mathbb{Z})$ par :

$$\partial_q(\sigma) = \sum_{m=0}^{q} (-1)^m \sigma \circ f_m^q.$$

On vérifie facilement que $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$. Le *$q$-ième groupe d'homologie de X à cœfficients dans* $\mathbb{Z}$ est le quotient :

$$H_q(X,\mathbb{Z}) = ker\ \partial_q / im\ \partial_{q+1}.$$

Une application $f : X \to Y$ induit une application :

$$\begin{array}{rccc} f_* : & S_q(X,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & S_q(Y,\mathbb{Z}) \\ & \sigma & \longmapsto & f \circ \sigma \end{array}$$

et induit un morphisme (de $\mathbb{Z}$-modules) :

$$f_* = H_q(f) : H_q(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_q(Y,\mathbb{Z}).$$

On a de plus $H_q(f \circ g) = H_q(f) \circ H_q(g)$ et $H_q(id_X) = id_{H_q(X,\mathbb{Z})}$, autrement dit, H_q est un foncteur covariant.

3.2 Cohomologie singulière

On pose $S^q(X,\mathbb{Z}) = Hom_{\mathbb{Z}}(S_q(X,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ et $d_q : S^q(X,\mathbb{Z}) \to S^{q+1}(X,\mathbb{Z})$ défini par : $(d_q\alpha)(\sigma) = \alpha(\partial_{q+1}\sigma)$. Le *$q$-ième groupe de cohomologie de X à cœfficients dans* $\mathbb{Z}$ est le quotient :

$$H^q(X,\mathbb{Z}) = ker\ d_q / im\ d_{q-1}.$$

Une application $f : X \to Y$ induit une application : $f^* : S_q(Y,\mathbb{Z}) \longrightarrow S_q(X,\mathbb{Z})$ par $(f^*\alpha)(\sigma) = \alpha(f \circ \sigma)$. Cette derniere application passe au quotient et induit un morphisme :

$$f^* = H^q(f) : H^q(Y,\mathbb{Z}) \to H^q(X,\mathbb{Z}).$$

On vérifie que H^q est un foncteur contravariant, i. e. $H^q(f \circ g) = H^q(g) \circ H^q(f)$ et $H^q(id_X) = id_{H^q(X,\mathbb{Z})}$.

3.3 Théorème des coefficients universels

Dans la construction de l'homologie et de la cohomologie, on peut remplacer le groupe des cœfficients $\mathbb{Z}$ par n'importe quel groupe abélien G et obtenir ainsi d'autres groupes de d'homologie et de cohomologie, notés $H_q(X,G)$ et $H^q(X,G)$. En général – et même si $G=\mathbb{Z}$ – $H^q(X,G)$ n'est pas $Hom_{\mathbb{Z}}(H_q(X,\mathbb{Z}),G)$, néanmoins, il y a un morphisme naturel $\beta : H^q(X,G) \rightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(H_q(X,\mathbb{Z}),G)$ donné par : $\beta([\alpha])([\sigma]) = \alpha(\sigma)$.

Théorème des coefficients universels. – *On a une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow Ext(H_{q-1}(X,\mathbb{Z}),G) \rightarrow H^q(X,G) \xrightarrow{\beta} Hom_{\mathbb{Z}}(H_q(X,\mathbb{Z}),G) \rightarrow 0.$$

Ainsi β est surjective et son noyau est le groupe abélien $Ext(H_{q-1}(X,\mathbb{Z}),G)$. Voici quelques valeurs utiles pour $Ext(.,.)$:

$Ext(\mathbb{Z},G)=0,\ Ext(\mathbb{Z}_n,G)=G/nG,\ Ext(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}_n,\ Ext(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z}_m)=\mathbb{Z}_d$ avec $d=pgcd(n,m)$.

3.4 Quelques groupes d'homologie

Tout d'abord une propriété importante : les homologies et cohomologies singulières de deux espaces homotopiquement équivalents sont isomorphes.

Si X est contractile :

$$H_q(X,G) = H^q(X,G) = \begin{cases} G & \text{si } q=0, \\ 0 & \text{si } q>0 \end{cases}$$

Si M est une variété de dimension m alors :

$$H_q(M,G) = H^q(M,G) = 0, \quad \text{si } q<0 \text{ ou } q>m.$$

Si M est connexe :

$$H_0(M,G) = H^0(M,G) = G.$$

Si M est compacte et orientable :

$$H_m(M,G) = H^m(M,G) = G$$

de plus, pour tout $0 \geq q \geq m$, $H_q(M,G) = H^{m-q}(M,G)$.

Si M est compacte et non orientable :

$$H_m(M,G) = {}_2G = \{a \in G \mid 2a = 0\},\ H^m(M,G) = G/2G.$$

Si M est non compacte :

$$H_m(M,G) = H^m(M,G) = 0.$$

Exemple 1. – La sphère $\mathbb{S}^m$.

$$H_q(\mathbb{S}^m,\mathbb{Z}) = H^q(\mathbb{S}^m,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } 0 < q < m, \\ \mathbb{Z} & \text{si } q = 0 \text{ ou } q = m. \end{array} \right.$$

Exemple 2. – Le tore $\mathbb{T}^2$.

$$H_q(\mathbb{T}^2,\mathbb{Z}) = H^q(\mathbb{T}^2,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0 \text{ ou } q = 2, \\ \mathbb{Z}^2 & \text{si } q = 1. \end{array} \right.$$

Exemple 3. – L'espace projectif $\mathbb{R}P^m$.

$$H_q(\mathbb{R}P^m,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0 \text{ ou } q = m \text{ et } m \text{ impair}, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{si } q \text{ impair}, 1 \leq q \leq m-1, \\ 0 & \text{si } q \text{ pair}, 2 \leq q \leq m. \end{array} \right.$$

$$H^q(\mathbb{R}P^m,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0 \text{ ou } q = m \text{ et } m \text{ impair}, \\ 0 & \text{si } q \text{ impair}, 1 \leq q \leq m-1, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{si } q \text{ pair}, 2 \leq q \leq m. \end{array} \right.$$

4 Exercices

Exercice. 1. – Construire un CW-complexe de dimension 1 homotopiquement équivalent à $\mathbb{R}^3 \setminus (D_1 \cup D_2)$ où D_1 et D_2 sont deux droites :

a) disjointes,

b) ayant un point commun.

Exercice. 2. – Pour montrer que deux espaces X_0, X_1 sont homotopiquement équivalents il est parfois commode d'introduire un troisième espace W contenant X_0 et X_1 et de montrer que les inclusions $X_0 \subset W$ et $X_1 \subset W$ sont des équivalences d'homotopie, et donc par transitivité $X_0 \approx X_1$. Utiliser ceci pour montrer que :

a) $\mathbb{S}^1 \cup I \approx \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ (les extrémités de I sont attachées à deux points distincts de $\mathbb{S}^1$),

b) $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1 \approx \mathbb{S}^2/\{N,S\}$ la sphère pincée,

c) $\mathbb{S}^2 \approx \mathbb{T}^2 \cup (D_1 \cup D_2)$ où D_1 est attachée à $\mathbb{T}^2$ le long d'un équateur et D_2 le long d'une latitude.

Exercice. 3. – Décrire une structure de CW-complexe pour $\mathbb{R}P^2$ comportant une cellule dans chaque dimension 0,1,2.

Exercice. 4. – Calculer $\pi_k(\mathbb{R}P^3)$ pour $k = 0, ..., 3$. En déduire que $\pi_3(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$ (on rappelle que $T^1\mathbb{S}^2$ est difféomorphe à $\mathbb{R}P^3$).

Exercice. 5. – Montrer que la variété de Stiefel $V_{n,k}$ est $(n-k-1)$-connexe. En déduire que $\pi_1(G^{or}_{2m,m}) = 0$ si $m \geq 2$.

Exercice. 6. – Soit $n \geq 2$ et $X = (\mathbb{S}^2 \times [0,1])/\sim$ où $(x,0) \sim (Tx,1)$ avec $T : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ la réflexion de $\mathbb{S}^n$ à travers $\mathbb{S}^{n-1}$. Montrer que X n'est pas n-simple.

Exercice. 7. – Déterminer $[\mathbb{R}P^3, \mathbb{T}^2]$ et $[\mathbb{T}^2, \mathbb{R}P^3]$.

5 Bibliographie

G. Bredon, *Topology and geometry*, GTM, Springer-Verlag.

A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press.

J.Davis et P. Kirck, *Lecture Notes in Algebraic Topology*, GSM, AMS.