Leçon VIII : L'intégration convexe

1 Le lemme fondamental

Définition. – Un lacet $g : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $g(0) = g(1)$ *entoure* $z \in \mathbb{R}^n$ si $Conv(g([0,1])) \supset \{z\}$.

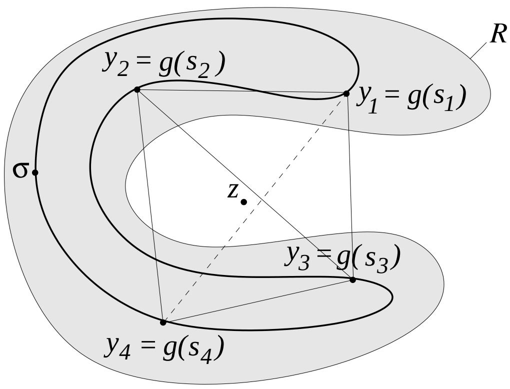
Lemme fondamental. – *Soient $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ une partie ouverte, $\sigma \in \mathcal{R}$ et $z \in Conv(\mathcal{R}, \sigma)$. Il existe un lacet $h : [0,1] \to \mathcal{R}$ basé en σ qui entoure z et tel que :*

$$z = \int_0^1 h(s)ds.$$

Démonstration. – Rappelons que $Conv(\mathcal{R}, \sigma)$ s'obtient en prenant l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum \alpha_k y_k$ avec $y_k \in [\sigma]$ = composante connexe par arcs de $\mathcal{R}$ contenant σ, $\sum \alpha_k = 1$, $\alpha_k \in [0,1]$. Donc il existe $y_1, ..., y_N, \alpha_1, ..., \alpha_N$ tels que :

$$z = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k y_k$$

et tout lacet $g : [0,1] \to \mathcal{R}$ basé en σ et passant par $y_1, ..., y_N$ vérifie $Conv(g([0,1])) \supset \{z\}$ i. e. g entoure z.



En général $z \neq \int_0^1 g(s)ds$. Notons $s_1, ..., s_N$ les temps où $g(s_k) = y_k$ et soit $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ telle que :

i) $f_k < \eta_1$ sur $[0,1] \setminus B(s_k, \eta_2)$,

ii) $\int_0^1 f_k = 1$,
avec η_1, η_2 deux nombres strictement positifs arbitraires. On pose :

$$z_k = \int_0^1 g(s) f_k(s) ds.$$

Etant donné $\epsilon > 0$, on peut choisir η_1, η_2 tels que, pour tout $k \in \{1, ..., N\}$, on ait $\|z_k - g(s_k)\| \leq \epsilon$. Comme $\mathcal{R}$ est ouverte, si ϵ est suffisamment petit, $z \in Conv(z_1, ..., z_N)$. Par conséquent il existe $0 \leq p_1, ..., p_N \leq 1$ tels que $\sum p_k = 1$ et :

$$\begin{aligned} z &= \sum_{k=1}^{N} p_k z_k &&= \sum_{k=1}^{N} p_k \int_0^1 g(s) f_k(s) ds \\ &= \int_0^1 g(s) \sum_{k=1}^{N} p_k f_k(s) ds &&= \int_0^1 g(s) F(s) ds \end{aligned}$$

où $F(s) = \int_{k=1}^{N} p_k f_k(s)$. Soit :

$$\begin{array}{rccl} \lambda : & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & s & \longmapsto & \displaystyle\int_0^s F(u) du. \end{array}$$

On a $\lambda'(s) = F(s) > 0$, $\lambda(0) = 0$, $\lambda(1) = 1$. Donc λ est un difféomorphisme croissant de $[0, 1]$. Effectuons le changement de variable $s = \lambda^{-1}(t)$ c'est-à-dire $t = \lambda(s)$, on a $dt = \lambda'(s)ds = F(s)ds$ d'où :

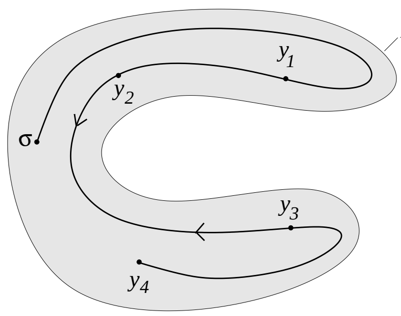
$$z = \int_0^1 g(s) F(s) ds = \int_0^1 g \circ \lambda^{-1}(t) dt.$$

Ainsi, $h = g \circ \lambda^{-1}$ convient. $\square$

Remarque. – A priori $g \in \Omega_\sigma(\mathcal{R})$, mais il est bien évident que l'on peut choisir g parmi les "allers-retours" i. e. l'espace :

$$\Omega_\sigma^{AR}(\mathcal{R}) = \{g \in \Omega_\sigma(\mathcal{R}) \mid \forall t \in [0,1] \;\; g(t) = g(1-t)\},$$

l'intérêt étant que maintenant on a affaire avec un espace contractible.



Lemme fondamental (version paramétrique). – *Soient* $E = B \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} B$ *un fibré trivial,* $B = [0,1]^m$, $\mathcal{R} \subset E$ *ouverte,* $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R})$ *et* $z \in \Gamma(E)$ *tel que :*

$$\forall b \in B,\ z(b) \in Conv(\mathcal{R}_b, \sigma(b)),$$

où $\mathcal{R}_b = \pi^{-1}(b) \cap \mathcal{R}$. *Alors il existe* $h : [0,1] \to \Gamma(\mathcal{R})$ *avec* $h(0) = h(1) = \sigma$ *telle que :*

$$\forall b \in B,\ z(b) = \int_0^1 h(s,b)ds.$$

Démonstration. – Il suffit de rajouter le paramètre $b \in B$ dans la preuve précédente. On décide de plus, d'après la remarque, de choisir $g : [0,1] \to \Gamma(\mathcal{R})$ telle que, pour tout $b \in B$, g_b soit dans $\Omega^{AR}_{\sigma(b)}(\mathcal{R}_b)$. $\square$

Remarque. – Si $\mathcal{R}$ est ample, la condition $z(b) \in Conv(\mathcal{R}_b, \sigma(b))$ est automatiquement vérifiée.

2 Le h-principe 1-dimensionnel

Soit $B = [0,1]^m = [0,1]^{m-1} \times [0,1] = C \times [0,1]$. On décompose $b \in B$ sous la forme $b = (c,t)$, $c \in C$.

Théorème (h-principe 1-dimensionnel). – *Soient* $E = B \times \mathbb{R}^n \to B$, $B = C \times [0,1]$, $\mathcal{R} \subset E$ *ouverte et ample et* $f_0 : B \to \mathbb{R}^n$. *On suppose que* $\mathcal{R} \to B$ *admet une section* σ, *alors il existe une homotopie* $f_u : B \to \mathbb{R}^n$ *telle que :*

1) $\|f_1 - f_0\|_{C^0} \leq \epsilon$,

2) $b \mapsto (b, \partial_t f_1(b))$ *est une section de* $\mathcal{R} \to B$ *homotope à* σ *dans* $\Gamma(\mathcal{R})$.

Démonstration. – Soit σ une section de $\mathcal{R}$, puisque $\mathcal{R}$ is ample, on est dans les conditions du lemme fondamental version paramétrique. Il existe $h : [0,1] \to \Gamma(\mathcal{R})$ telle que :

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}(b) = \int_0^1 h(s,b)ds.$$

Soit :

$$f_1(c,t) = f_0(c,0) + \int_0^t h(\theta(s),(c,s))ds$$

où $\theta : [0,1] \to [0,1]$ est une fonction que l'on déterminera dans les lignes qui suivent. Constatons d'abord que f est une solution de $\mathcal{R}$ puisque :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}(c,t) = h(\theta(t),(c,t)) \in \mathcal{R}_{(c,t)}$$

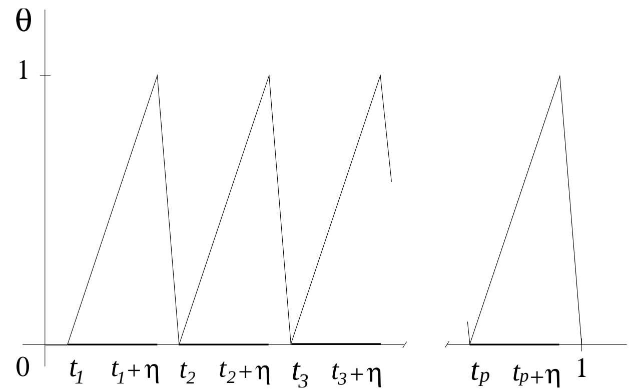
et f_1 est homotopique à f_0 par $(1-u)f_0 + uf_1$, $u \in [0,1]$. Voilà comment choisir θ pour obtenir $\|f_1 - f_0\|_{C^0} \leq \epsilon$. Fixons $\eta > 0$, soient $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_p < 1$ tels que :

i) si $I_k = [t_k, t_k + \eta]$ alors $I_j \cap I_k = \emptyset$ si $j \neq k$,

ii) $\sum_{k=1}^{p} long(I_k) = p\eta \geq 1 - \eta$.

On pose :

$$\begin{array}{rccl} \theta : & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } t < t_1, \\ \dfrac{s - t_k}{\eta} & \text{si } t_k \leq t \leq t_k + \eta, \\ \dfrac{t_{k+1} - s}{t_{k+1} - (t_k + \eta)} & \text{si } t_k + \eta \leq t \leq t_{k+1}. \end{array} \right. \end{array}$$



On pose $[t] = \max\{k \mid I_k \subset [0,t]\}$. Introduisons deux fonctions :

$$\begin{aligned} l(c,t) &= f_0(c,0) + \eta \sum_{k=1}^{[t]} \partial_t f_0(c, t_k), \\ k(c,t) &= f_0(c,0) + \sum_{k=1}^{[t]} \int_{I_k} h(\theta(s),(c,s))ds, \end{aligned}$$

et rappelons que :

$$f_1(c,t) = f_0(c,0) + \int_0^t h(\theta(s),(c,s))ds.$$

On va montrer que l'on peut choisir η suffisamment petit de façon que :

i) $\|f_0 - l\|_{C^0} \leq \epsilon/3$,

ii) $\|l - k\|_{C^0} \leq \epsilon/3$,

iii) $\|k - f_1\|_{C^0} \leq \epsilon/3$.

Comme l est une fonction en escalier, le théorème des accroissements finis montre que l'on peut choisir η suffisamment petit pour obtenir i). D'autre part :

$$\|f_1 - k\|_{C^0} \leq \int_{I \setminus \cap_{k=1}^p I_k} | \, h(\theta(s),(c,s))| \, ds \leq \eta \max_{[0,1]\times B} |h(s,b)|,$$

on peut donc choisir η suffisamment petit pour obtenir iii). Notons que les majorations i) et iii) ne font pas intervenir θ. Pour la majoration ii), l'idée est la suivante :

$$\begin{aligned} \int_{I_k} h(\theta(s),(c,s))ds &= \eta \int_0^1 h(t,(c,t_k+\eta t))dt \\ &\simeq \eta \int_0^1 h(t,(c,t_k))dt = \eta \frac{\partial f_0}{\partial t}(c,t_k). \end{aligned}$$

La première égalité s'obtient en faisant le changement de variable $t = \theta(s) = \frac{s-t_k}{\eta}$. Ensuite on choisit η de façon que :

$$\forall t \in [0,1] \;\; |h(t,(c,t_k+\eta t)) - h(t,(c,t_k))| \leq \epsilon/3,$$

ainsi :

$$\begin{aligned} |k(c,t) - l(c,t)| &= | \, \eta \sum_{k=1}^{[t]} \int_0^1 h(t,(c,t_k+\eta t)) - h(t,(c,t_k))dt| \\ &\leq \eta\epsilon/3 \leq \epsilon/3 \text{ si } \eta \leq 1 \end{aligned}$$

Nous avons donc montré les points i, ii, et iii. (On pourrait lisser θ afin d'obtenir un f_1 C^∞). Il reste maintenant à construire une homotopie de sections $\sigma_u : B \to \mathcal{R}$ telle que $\sigma_0 = \sigma$ et $\sigma_1 = (id, \partial_t f_1)$. Si $H_u : [0,1] \to \Gamma(\mathcal{R})$ est une homotopie joignant $H_0 = \sigma$ à $H_1 = h$, alors $\sigma_u(c,t) = H_u(\theta(t),(c,t))$ convient (on a identifié σ à $[0,1] \to \Gamma(\mathcal{R})$, $s \mapsto \sigma(b)$). Une telle homotopie H_u pourrait ne pas exister si $s \mapsto h(s,b)$ n'était pas homotope à $s \mapsto \sigma(b)$ dans $\mathcal{R}_b$, la remarque qui suit le lemme fondamental permet d'éviter cet écueil et nous donne de facto l'homotopie désirée. $\square$

On note :

$$\|f\|_{C^1,\hat{t}} = \max(\|f\|_{C^0}, \|\frac{\partial f}{\partial c_1}\|_{C^0}, ..., \|\frac{\partial f}{\partial c_{m-1}}\|_{C^0}).$$

C'est la norme C^1 sans le terme $\|\frac{\partial f}{\partial t}\|_{C^0}$. Avec à peine plus de travail, on peut remplacer la conclusion 1) du théorème du h-principe 1-dimensionnel par :

$$\|f_1 - f_0\|_{C^1,\hat{t}} \leq \epsilon.$$

Il y a aussi un *h-principe 1-dimensionnel relatif.*

Théorème (h-principe 1-dimensionnel relatif). − *Soient $E = B \times \mathbb{R}^n \to B$, $B = C \times [0,1]$, $\mathcal{R} \subset E$ ouverte et ample et $f_0 : B \to \mathbb{R}^n$. Soit*

$K \subset B$ un fermé tel que $\frac{\partial f_0}{\partial t} \in \mathcal{R}$ sur un ouvert $\mathcal{U}(K)$. On suppose que $\mathcal{R} \to B$ admet une section σ et qu'il existe une homotopie $\sigma_u \in \Gamma(\mathcal{R})$ de σ au dessus de $\mathcal{U}(K)$ telle que $\sigma_1 = (id, \frac{\partial f_0}{\partial t})$. Alors il existe une homotopie $f_u : B \to \mathbb{R}^n$ telle que :

1) $\forall u \in [0,1],\ f_u \equiv f_0$ sur un ouvert $\mathcal{U}'(K) \subset \mathcal{U}(K)$.

2) $\|f_1 - f_0\|_{C^0} \leq \epsilon$,

3) $b \mapsto (b, \partial_t f_1(b))$ est une section de $\mathcal{R} \to B$ homotope à σ dans $\Gamma(\mathcal{R})$.

Nous vous proposons de vous exercer à la démonstration de ce résultat en exercice 1.

3 Un théorème de Gromov

Théorème. – *Soit $\mathcal{R} \subset J^1(M,N)$ ouverte et ample, $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R})$ et $f_0 = bs(\sigma) : M \to N$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $f : M \to N$ et une homotopie $\sigma_u \in \Gamma(\mathcal{R})$ telle que $\sigma_0 = \sigma$, $\sigma_1 = j^1 f$ et $\|f - f_0\|_{C^0} < \epsilon$.*

Dans ces conditions, on dit que $\mathcal{R}$ satisfait au *h-principe C^0-dense*.

Démonstration. – On ne donne que les lignes directrices. On travaille d'abord localement sur un ouvert cubique $\mathcal{U} =]0,1[^m$ de M et un ouvert $\mathcal{V}$ de N. La section $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}) \subset J^1(\mathcal{U},\mathcal{V})$ s'écrit :

$$\sigma : b \longmapsto (b, f_0(b), \varphi_1(b), ..., \varphi_m(b)) \in \mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}.$$

On utilise le h-principe 1-dimensionnel pour réaliser une homotopie de σ dans $\Gamma(\mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}})$ et obtenir une section qui s'intègre par rapport à la dernière variable. Précisément, soit $\sigma^\perp : B \to J^1(\mathcal{U},\mathcal{V})^\perp$ l'application :

$$b \longmapsto (b, f_0(b), \varphi_1(b), ..., \varphi_{m-1}(b)),$$

on note $E = B \times \mathbb{R}^n \stackrel{\pi}{\longrightarrow} B$ le fibré trivial obtenu en tirant en arrière le fibré $J^1(\mathcal{U},\mathcal{V}) \to J^1(\mathcal{U},\mathcal{V})^\perp$ par l'application $\sigma^\perp$. On note encore $\bar{\sigma} : B \to E$ l'application donnée par $b \mapsto (b, \varphi_m(b))$. Schématiquement, on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} E = B \times \mathbb{R}^n & & J^1(\mathcal{U},\mathcal{V}) \\ \bar{\sigma} \uparrow\downarrow \pi & \nearrow \sigma & \downarrow \\ B & \stackrel{\sigma^\perp}{\longrightarrow} & J^1(\mathcal{U},\mathcal{V})^\perp. \end{array}$$

Soit $\mathcal{S} \subset E$ la relation différentielle obtenue en tirant en arrière la relation $\mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$. On vérifie immédiatement que $\mathcal{S}$ est ouverte et ample, bien sûr $\bar{\sigma}$ est une section de $\mathcal{S}$. Le h-principe 1-dimensionnel permet de réaliser une homotopie qui joint $\bar{\sigma}$ à une section holonomique $b \mapsto (b, \frac{\partial f_1}{\partial t})$, autrement dit la section :

$$b = (c, t) \mapsto (b, f_1(b), \varphi_1(b), ..., \varphi_{m-1}(b), \frac{\partial f_1}{\partial t}(b))$$

est un élément de $\Gamma(\mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}})$. En appliquant de nouveau cette même procédure pour l'avant-dernière variable, on obtient :

$$b \mapsto (b, f_2(b), \varphi_1(b), ..., \varphi_{m-2}(b), \frac{\partial f_2}{\partial c_{m-1}}(b), \frac{\partial f_1}{\partial t}(b)) \in \mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}.$$

En remarquant que $\mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ est ouverte et que f_2 et f_1 sont $(C^1, \widehat{c_{m-1}})$-proches, on peut réaliser une homotopie de cette section dans $\Gamma(\mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}})$ de façon à obtenir :

$$b \mapsto (b, f_2(b), \varphi_1(b), ..., \varphi_{m-2}(b), \frac{\partial f_2}{\partial c_{m-1}}(b), \frac{\partial f_2}{\partial t}(b)) \in \mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}},$$

et ainsi de suite jusqu'à obtenir une section complètement intégrée. Il faut ensuite recoller les morceaux, cela est possible grâce à la version relative du h-principe 1-dimensionnel, c'est-à-dire, en fait, à la contractibilité de Ω_b^{AR}. $\square$

Il n'y a aucune difficulté dans ce contexte à passer d'un h-principe à un h-principe paramétrique.

Théorème (Gromov). – *Soit $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$ ouverte et ample, alors $\mathcal{R}$ satisfait au h-principe C^0-dense.*

Cela signifie que si P est une variété compacte vue comme un espace de paramètres et $\sigma : P \to \Gamma(\mathcal{R})$, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe une homotopie $\sigma_u : [0, 1] \times P \to \Gamma(\mathcal{R})$ telle que $\sigma_0 = \sigma$ et

$$\begin{array}{rccl} \sigma_1 : & P & \longrightarrow & J(\mathcal{S}ol(\mathcal{R})) \subset \Gamma(\mathcal{R}) \\ & p & \longmapsto & j^1 f_p. \end{array}$$

De plus : $\max_{p \in P} \|g_p - f_p\|_{C^0} < \epsilon$, où $g_p = bs(\sigma) : P \to C^\infty(M, N)$.

4 Exercices

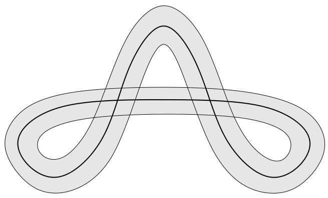
Exercice. 1. – Compléter la démonstration du h-principe 1-dimensionnel de façon à obtenir un théorème relatif.

Exercice. 2. – a) Donner une construction géométrique directe d'une immersion $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^3$ dont l'application de Gauss orientée $G^{or}(f) : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{S}^2$ a une image contenue dans un voisinage d'un hémisphère.

b) Soit $f_0 : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^3$ une immersion quelconque. Montrer qu'il existe une immersion $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que f soit C^0-(arbitrairement) proche de f_0 et $G^{or}(f)$ évite un point de $\mathbb{S}^2$.
c) Que se passe-t-il si on demande à $G^{or}(f)$ d'éviter deux points antipodaux ?
d) Question ouverte (M. Gromov) : existe-t-il une immersion $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^3$ dont l'application de Gauss évite les quatre sommets d'un tétraèdre régulier inscrit dans $\mathbb{S}^2$?

Exercice. 3. − On travaille dans $I([0,1], \mathbb{R}^2)$ et on considère la relation différentielle fermée $\mathcal{R} = \{x'^2 + y'^2 = 1\}$. Montrer que toute courbe $f_0 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ telle que $|f_0'|^2 < 1$ peut être approchée au sens C^0 par une solution $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ de $\mathcal{R}$.

Exercice. 4. − Echec du h-principe relatif pour les immersions $D^2 \to \mathbb{R}^2$. Montrer que l'immersion $f_0 : \mathbb{S}^1 \times]-\epsilon, \epsilon[\to \mathbb{R}^2$ représentée ci-dessous ne peut pas être étendue en une immersion de D^2 dans $\mathbb{R}^2$, pourtant le 1-jet de f_0 peut être étendu en une section $\sigma \in \Gamma(\mathcal{I})$ ($\mathcal{I}$ est la relation différentielle des immersions de D^2 dans $\mathbb{R}^2$).



5 Bibliographie

M. Adachi, *Embeddings and immersions*, Translations of the Mathematical Monographs, Vol. 124, American Mathematical Society, 1993.

Y. Eliahsberg et N. Mishachev, *Introduction to the h-principle*, GSM, AMS.

M. Gromov, *Partial Differential Relations*, Springer-Verlag, 1986.

D. Spring, *Convex Integration Theory*, Monographs in Mathematics, Vol. 92, Birkhäuser Verlag, 1998.