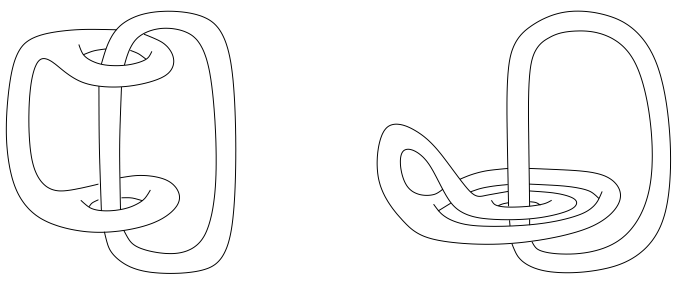
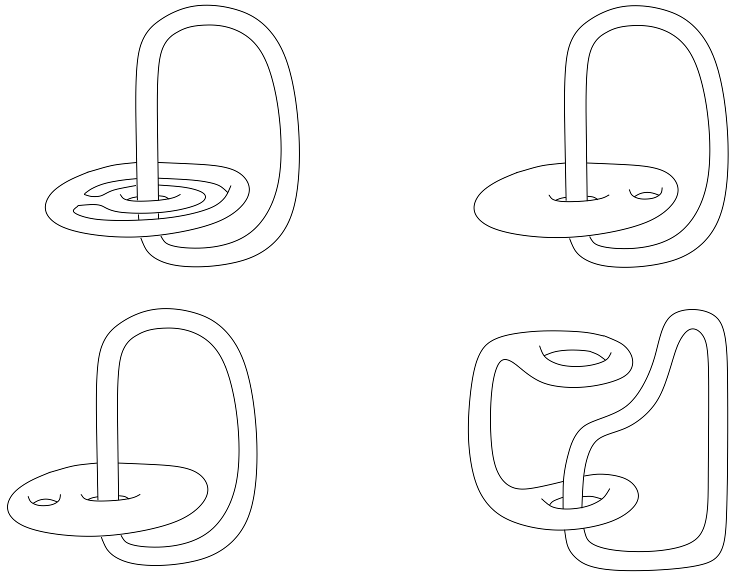
Immersions et Plongements
Introduction

1 Bref historique de la théorie des immersions et des plongements

Le point de départ de la théorie est la question suivante : étant données deux variétés (différentiables) M^m et N^n peut-on "voir" M comme une sous-variété de N ? C'est effectivement toujours possible si $n \geq 2m+1$, on dit alors que M se plonge dans N. En revanche les choses se compliquent si $m \leq n \leq 2m$ et deviennent, bien sûr, impossibles si $n < m$. Si l'on se pose le même problème en s'autorisant des points d'auto-intersections, on parle alors d'immersion.

Une fois l'existence d'un plongement acquise (ou d'une immersion) la question suivante est celle de la classification, combien de plongements (ou d'immersions) différent(e)s peut-on construire ? On convient de dire que deux plongements (resp. immersions) $f_0, f_1 : M \to N$ sont différents si il n'existe pas de famille continue $f_t : M \to N$ de plongements (resp. d'immersions) joignant f_0 à f_1. La réponse à cette question peut se révéler très subtile et peu intuitive. Voici une famille de plongements de l'union disjointe $M^2 = \mathbb{T}^2 \sharp \mathbb{T}^2 \coprod \mathbb{T}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Cette famille permet de faire disparaître un des enlacements du tore $\mathbb{T}^2$ avec $\mathbb{T}^2 \sharp \mathbb{T}^2$.





Voici un autre exemple célèbre dû à S. Smale et concernant cette fois les immersions. Soit $j : \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ l'inclusion standard et $inv : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ l'inversion $x \mapsto \frac{x}{|x|^2}$, alors il existe une famille d'immersions $F_t : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que $F_0 = j$ et $F_1 = inv \circ j$, autrement dit, on peut réaliser un retournement de la sphère au moyen d'immersions.

(*Source des illustrations.* – Les mathématiques aujourd'hui, Belin, article de B. Morin et J.-P. Petit p. 39-52).

La théorie des immersions et des plongements remonte aux années 40 et s'intéresse donc *grosso modo* à classer les sous-variétés d'une variété donnée. Les premiers résultats sont dus à H. Whitney, il s'agit de l'existence de plongement d'une variété quelconque dans un espace numérique $\mathbb{R}^N$ pourvu que N soit assez grand ainsi que du célèbre lemme d'élimination des points doubles.

Depuis les résultats de H. Whitney, la théorie s'est bien sûr énormément développée ; des théorèmes d'existence et de classification ont été obtenus par S. Smale et M. Hirsch ($\sim$60), A. Haefliger ($\sim$60), A. Phillips ($\sim$65), J.-P. Dax ($\sim$70), M. Gromov (70 à 90).

Très récemment, Y. Eliashberg et N. Mishachev (2001) ont considérablement simplifié la théorie des immersions en dégageant une notion fondamentale : l'approximation holonomique. Du côté de la théorie des plongements, T. Goodwillie, J. Klein et M. Weiss (preprint 2002) viennent d'obtenir une généralisation vertigineuse des résultats d'A. Haefliger.

2 Organisation

Le cours se compose de neuf leçons dont nous donnons ici, pour chacune d'entre elles, le titre ainsi que les principaux résultats concernant la théorie des immersions et des plongements qui y seront exposés.

Leçon I. – Variétés et applications différentiables. Existence d'un plongement de toute variété M^m dans un espace $\mathbb{R}^n$ pourvu que n soit suffisamment grand.

Leçon II. – Fibrés. Les variétés orientables M^m qui admettent une immersion dans $\mathbb{R}^{m+1}$ sont stablement parallélisables.

Leçon III. – Transversalité. Toute variété M^m admet un plongement dans $\mathbb{R}^{2m+1}$ et une immersion dans $\mathbb{R}^{2m}$.

Leçon IV. – Le théorème de Whitney. Toute variété compacte M^m admet un plongement dans $\mathbb{R}^{2m}$.

Leçon V. – Petit nécessaire de théorie homotopique. Théorème de classification des applications.

Leçon VI. – Premiers résultats sur le π_0 des espaces d'immersions et de plongements. Classification des immersions de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}^2$, connexité de l'espace des immersions (resp. des plongements) de M^m dans $\mathbb{R}^n$ si $2m+1 \leq n$ (resp. $2m+2 \leq n$).

Leçon VII. – Le h-principe. Classification des immersions, théorème de Smale-Hirsch, paradoxe de Smale.

Leçon VIII. – L'intégration convexe. Démonstration d'un théorème fondamental de Gromov.

Leçon IX. – La classification des plongements. Le théorème d'Haefliger, connexité de l'espace des plongements des sphères $\mathbb{S}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ si $3m+4 \leq 2n$.

Au delà de ces résultats, nous découvrirons, pour y parvenir, des techniques dont l'intérêt dépasse amplement le cadre de la théorie des immersions et des plongements. Par exemple, la technique *d'élimination des points doubles* – le lemme de Whitney – est à l'origine de la distinction entre la topologie de basse dimension, où elle ne s'applique pas, et la topologie en grande dimension, où elle s'applique. Le *h-principe*, mis en évidence par M. Gromov alors qu'il revisitait les travaux de Smale-Hirsch, a un champ d'application débordant très largement la théorie des immersions et des plongements : en géométrie riemannienne, en géométrie symplectique, etc.

Notons également que la théorie des immersions et des plongements est une branche de la topologie différentielle et que, par conséquent, elle interagit naturellement avec les autres branches de cette discipline. A titre d'illustration, la résolution de la conjecture ci-dessous, propre à la théorie, implique la conjecture de Poincaré (elle est même équivalente).

Conjecture. – *Soit M^3 une variété C^1 et $g : \mathbb{S}^2 \to M^3$ un plongement régulièrement homotope à une immersion $f : \mathbb{S}^2 \to M^3$ qui peut s'étendre à D^3. Alors, g peut s'étendre en une immersion $D^3 \to M^3$.*

Conjecture de Poincaré. – *Soit M^3 une variété connexe, compacte, sans bord et simplement connexe alors M^3 est homéomorphe à $\mathbb{S}^3$.*

AVERTISSEMENT. – Ce cours ne prétend pas à l'originalité. Je me suis fortement inspiré des livres de M. Hirsch (*Differential Topology*, GTM, Springer-Verlag) et F. Laudenbach (*Topologie différentielle*, Cours donné à l'Ecole Polytechnique) pour les premières leçons et ceux de D. Spring (*Convex Integration Theory*, Birkhäuser) et de Y. Eliashberg et N. Mishachev (*Introduction to the h-principle*, GSM, AMS) pour les suivantes.