Leçon IX : La classification des plongements

1 Le théorème d'Haefliger

Si $f : M \to N$ est une application, on peut lui associer son carré cartésien :

$$\begin{array}{rccc} f \times f : & M \times M & \longrightarrow & N \times N \\ & (x, y) & \longmapsto & (f(x), f(y)). \end{array}$$

Il y a une action évidente de $\mathbb{Z}_2$ sur M^2 et N^2 qui échange les facteurs. Notons que :

$$\forall p \in M^2,\ \forall \sigma \in \mathbb{Z}_2,\ \ f \times f(\sigma(p)) = \sigma(f \times f(p)),$$

et que $(f \times f)^{-1}(\Delta N) \supset \Delta M$ avec l'égalité si et seulement si f est injective.

Définition. – Une application $F : M^2 \to N^2$ est $\mathbb{Z}_2$-équivariante si pour tout couple $(x_1, x_2) \in M^2$, on a :

$$F(x_1, x_2) = (y_1, y_2) \Rightarrow F(x_2, x_1) = (y_2, y_1).$$

L'application F est $\mathbb{Z}_2$-isovariante si de plus $F^{-1}(\Delta N) = \Delta M$.

Théorème d'Haefliger (1962). – *On suppose M compacte et $m > 1$.*
a) Si $3m+3 \leq 2n$, une application $f : M \to N$ est homotope à un plongement g si et seulement si il existe une homotopie $\mathbb{Z}_2$-équivariante $F_t : M^2 \to N^2$ telle que $F_0 = f \times f$ et F_1 est $\mathbb{Z}_2$-isovariante. (Dans la réciproque, on obtient g tel que $g \times g$ est homotopique à F_1 parmi les applications $\mathbb{Z}_2$-isovariantes).
b) Si $3m + 4 \leq 2n$, une homotopie $f_t : M \to N$ joignant deux plongements g_0, g_1 est homotope à une isotopie si il existe une homotopie $\mathbb{Z}_2$-équivariante $F_{t,s} : M^2 \to N^2$ telle que $F_{t,0} = f_t$, $F_{0,s} = g_0$, $F_{1,s} = g_1$ et $F_{t,1}$ est une homotopie $\mathbb{Z}_2$-isovariante.

Ce théorème est admis, sa démonstration, délicate, est une généralisation de la technique d'élimination des points doubles de Whitney.

Considérons le diagramme (commutatif) :

$$\begin{array}{ccccc} & E(M, N) & \xrightarrow{i} & C^\infty(M, N) & \\ f \overset{\times}{\mapsto} f \times f & \downarrow & & \downarrow & f \overset{\times}{\mapsto} f \times f \\ & \mathbb{Z}_2 - Iso(M^2, N^2) & \xrightarrow{j} & \mathbb{Z}_2 - Equi(M^2, N^2). & \end{array}$$

Le théorème d'Haefliger permet de lire les propriétés de $\pi_0(i)$ en regardant celle de $\pi_0(j)$.

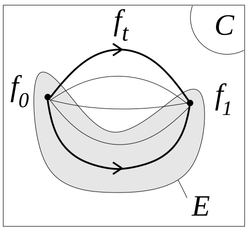
Surjectivité de $\pi_0(i)$.– Soit $[f]$ la composante connexe de $C^\infty(M,N)$ contenant f. L'image réciproque $\pi_0(i)^{-1}([f])$ est non vide si et seulement si $\pi_0(j)^{-1}([f\times f])$ est non vide.

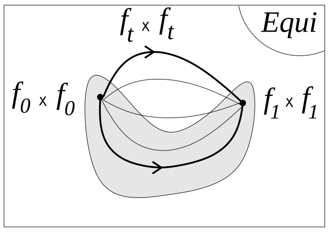
Injectivité de $\pi_0(i)$.– Soient f_0 $f_1 \in E(M,N)$ tels que $\pi_0(i)[f_0] = \pi_0(i)[f_1]$, alors $[f_0]=[f_1]$ si et seulement si $\pi_0(j)[f_0\times f_0] = \pi_0(j)[f_1\times f_1] \Rightarrow [f_0\times f_0]=[f_1\times f_1]$.

Pour alléger les notations on décide d'écrire $i_\sharp$ pour $\pi_0(i)$, $j_\sharp$ pour $\pi_0(j)$, E pour $E(M,N)$, C^∞ pour $C^\infty(M,N)$, Iso pour $\mathbb{Z}_2 - Iso(M,N)$ et $Equi$ pour $\mathbb{Z}_2 - Equi(M,N)$. Le théorème d'Haefliger peut s'écrire de manière plus condensée de la façon suivante :

a) Soit $f\in C^\infty$, alors $[f]\in i_\sharp(\pi_0(E)) \iff [f\times f]\in j_\sharp(\pi_0(Iso))$.

b) Soient $f_t\in C^\infty$, f_0, $f_1\in E$, alors $[f_t]=0$ dans $\pi_1(C^\infty,E) \iff [f_t\times f_t]=0$ dans $\pi_1(Equi,Iso)$.





Dans le a) de cette formulation, on n'a pas traduit le renseignement mis entre parenthèses dans le théorème d'Haefliger. Celui-ci reflète une propriété de $\times_\sharp : \pi_0(E)\to\pi_0(Iso)$. La commutativité du diagramme implique que si un élément $[F]\in\pi_0(Iso)$ est dans l'image de $\times_\sharp$ alors $j_\sharp[F]\in\times_\sharp(\pi_0(C^\infty))$. Autrement dit :

$$\times_\sharp(\pi_0(E))\subset j_\sharp^{-1}(\times_\sharp(\pi_0(C^\infty))).$$

Soit $[F]\in j_\sharp^{-1}(\times_\sharp(\pi_0(C^\infty)))$, ceci signifie qu'il existe $f\in C^\infty$ telle que $f\times f$ soit homotope à F parmi les applications $\mathbb{Z}_2$-équivariantes. D'après a) F est donc homotope à un plongement g, et, d'après ce qui est entre parenthèses, on peut choisir g tel que $g\times g$ soit homotope à F parmi les applications $\mathbb{Z}_2$-isovariantes, donc $\times_\sharp[g]=[g\times g]=[F]$ i. e. :

$$\times_\sharp(\pi_0(E)) = j_\sharp^{-1}(\times_\sharp(\pi_0(C^\infty))).$$

Ce résultat concerne l'image de $\times_\sharp : \pi_0(E)\to\pi_0(Iso)$, que peut-on dire sur le "noyau" ? Supposons que g_0 $g_1\in E$ soient tels que : $i_\sharp[g_0]=i_\sharp[g_1]$ et $[g_0\times g_0]=[g_1\times g_1]$, on aimerait pouvoir conclure que $[g_0]=[g_1]$. Nous allons voir qu'il y a une obstruction qui nous empêche, en général, d'aboutir à une telle conclusion. En effet $i_\sharp[g_0] = i_\sharp[g_1]$ implique qu'il existe $f_t \in C^\infty$ joignant g_0 à g_1 et donc $f_t \times f_t \in Equi$ qui joint $g_0 \times g_0$ à $g_1 \times g_1$. D'autre part $[g_0 \times g_0] = [g_1 \times g_1]$ implique qu'il existe $F_t \in Iso$ qui joint $g_0 \times g_0$ à $g_1 \times g_1$, pour pouvoir appliquer le point b) du théorème d'Haefliger, il faudrait que le chemin $f_t \times f_t$ soit, en outre, homotope dans $Equi$ et à extrémités fixées, au chemin F_t, autrement dit que le chemin $f_t \times f_t$ représente l'élément neutre de $\pi_1(Equi, Iso, g_0 \times g_0)$.

2 Classification des plongements dans $\mathbb{R}^n$

Corollaire. – *Si* $N = \mathbb{R}^n$ *et* $m > 1$ *alors* $\times_\sharp : \pi_0(E) \to \pi_0(Iso)$ *est une bijection si* $3m + 4 \leq 2n$ *et une surjection si* $3m + 3 = 2n$.

Preuve. – Si $N = \mathbb{R}^n$ alors $C^\infty(M, N)$ est contractile (c'est un espace vectoriel). De plus $\mathbb{Z}_2 - Equi(M^2, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \simeq C^\infty(M^2, \mathbb{R}^n)$ puisque toute application $\mathbb{Z}_2$-équivariante s'écrit $(x, y) \mapsto (f(x, y), f(y, x))$. Donc $Equi$ est lui aussi contractile, en particulier $\pi_1(Equi) = 0$ et donc $\times_\sharp$ est injective si $3m + 4 \leq 2n$. De même, $\pi_0(Equi) = 0$ ce qui implique $(j_\sharp)^{-1}(\pi_0(Equi)) = \pi_0(Iso)$. Donc si $3m + 3 \leq 2n$, $\times_\sharp(\pi_0(E)) = \pi_0(Iso)$, i. e. $\times_\sharp$ est surjective. □

Remarque. – On peut lire ce corollaire comme une sorte de h-principe. Le jet d'une fonction f est remplacé par son carré cartésien $f \times f$, l'espace des sections des jets est $Equi$, l'espace des sections de la relation différentielle est $\Gamma(\mathcal{R}) = Iso \subset Equi$, les solutions de $\mathcal{R}$ sont les plongements.

Choisissons une métrique arbitraire sur M et dans $M \times M$, notons $d_{\Delta M}$ la fonction distance à ΔM. Posons enfin $\mathcal{V} = \{p \in M^2 \mid d_{\Delta M}(p) \leq \epsilon\}$ un petit voisinage tubulaire de ΔM (i. e. un fibré $\pi : \mathcal{V} \to \Delta M$ en disque D^m). Soit $f : M \to \mathbb{R}^n$ un plongement, on lui associe l'application $\mathbb{Z}_2$-équivariante :

$$\begin{array}{rccc} \Phi(f) : & M^2 \setminus Int(\mathcal{V}) & \longrightarrow & \mathbb{S}^{n-1} \\ & (x, y) & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(y)}{|f(x) - f(y)|} \end{array}$$

(l'action sur $\mathbb{S}^{n-1}$ est celle de l'antipodie).

Théorème. – *Soit* $\Phi_\sharp : \pi_0(E(M, \mathbb{R}^n)) \longrightarrow \pi_0(\mathbb{Z}_2 - Equi(M^2 \setminus Int(\mathcal{V}), \mathbb{S}^{n-1}))$. *Si* $3m + 4 \leq 2n$, *(et* $m > 1$*)* $\Phi_\sharp$ *est une bijection, si* $3m + 3 = 2n$, *(et* $m > 1$*)* $\Phi_\sharp$ *est une surjection.*

Preuve. – Soit :

$$\begin{array}{rccc} H_t : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & (\Delta \mathbb{R}^n)^\perp \oplus \Delta \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ & (x, y) & \longmapsto & \frac{1}{2}(x - y, y - x) + (1 - t)\frac{1}{2}(x + y, x + y). \end{array}$$

Les applications H_t induisent une rétraction par déformation de $\mathbb{Z}_2{-}Iso(M^2, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ sur $\mathbb{Z}_2 - Iso(M^2, (\Delta\mathbb{R}^n)^{\perp})$, l'action de $\mathbb{Z}_2$ étant la multiplication par -1, l'isovariance signifiant que :

$F^{-1}(0) = \Delta M$ si $F \in \mathbb{Z}_2 - Iso(M^2, \mathbb{R}^n)($ identifié à $\mathbb{Z}_2 - Iso(M^2, (\Delta\mathbb{R}^n)^{\perp})$.

Par conséquent, il y a une équivalence d'homotopie induite par H_1 :

$$\mathbb{Z}_2 - Iso(M^2, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{Z}_2 - Iso(M^2, \mathbb{R}^n).$$

De même :

$$\begin{array}{cccc} G_t : & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ & x & \longmapsto & (1-t)x + t\dfrac{x}{|x|} \end{array}$$

induit l'équivalence d'homotopie :

$$\mathbb{Z}_2 - Equi(M^2 \setminus Int(\mathcal{V}), \mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{Z}_2 - Equi(M^2 \setminus Int(\mathcal{V}), \mathbb{S}^n).$$

On repère un point $p \in \mathcal{V}$ par (ρ, v_x) où v_x est l'intersection de $\partial\mathcal{V}$ avec une $\frac{1}{2}$ droite géodésique partant de $x = \pi(p) \in \Delta M$ et passant par p, et ρ est la distance entre p et ΔM. On définit :

$$\begin{array}{cccc} ext : & \mathbb{Z}_2 - Equi(M^2 \setminus Int(\mathcal{V}), \mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 - Iso(M^2, \mathbb{R}^n) \\ & F & \longmapsto & \tilde{F} \end{array}$$

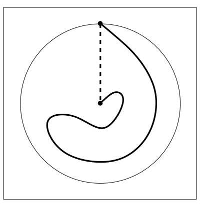
où :

$$\begin{cases} \tilde{F}(p) = F(p) & \text{si } p \in M^2 \setminus Int(\mathcal{V}), \\ \tilde{F}(p) = \rho F(v_x) & \text{si } p = (\rho, v_x) \in \mathcal{V}. \end{cases}$$

On va montrer que ext induit une équivalence d'homotopie. Si r est la restriction :

$$\mathbb{Z}_2 - Iso(M^2, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 - Equi(M^2 \setminus Int(\mathcal{V}), \mathbb{R}^n),$$

il est clair que $r \circ ext = id$. En revanche, il est plus délicat de montrer que $ext \circ r \simeq id$. Si $F \in \mathbb{Z}_2 - Iso(M^2, \mathbb{R}^n)$, F et $\overline{F} = ext \circ r(F)$ ne diffèrent que sur $Int(\mathcal{V})$.

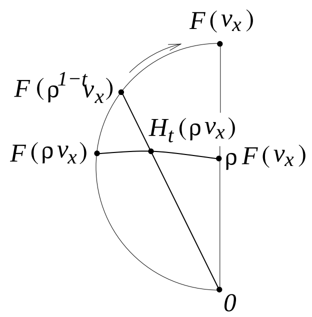


$F_t(\partial\mathcal{V})$ $\quad$ $\bar{F}(\{(\rho, v_x) \mid \rho \leq 1,\ v_x \text{ fixé }\})$ $\quad$ $F(\{(\rho, v_x) \mid \rho \leq 1,\ v_x \text{ fixé }\})$

On pourrait penser que l'homotopie $F_t = tF + (1-t)\overline{F}$ qui est l'identité sur $M^2 \setminus Int(\mathcal{V})$ fasse le travail, mais en général, F_t n'est pas dans $\mathbb{Z}_2 - Iso(M^2, \mathbb{R}^n)$. (Cf. la figure ci-dessus pour "voir" le problème). L'homotopie à considérer est la suivante :

$$\begin{cases} F_t(x) = 0 & \text{si } x \in \Delta M, \\ F_t(\rho v_x) = (1 - t(1-\rho))F(\rho^{1-t} v_x) & \text{si } p = (\rho, v_x) \in \mathcal{V} \setminus \Delta M, \\ F_t = id & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On a : $F_0(\rho v_x) = F(\rho v_x)$, $F_1(\rho v_x) = \rho F(v_x) = \tilde{F}(\rho v_x)$, et $t \mapsto F_t(\rho v_x)$ décrit un segment joignant 0 à $F(\rho^{1-t} v_x)$, donc $H_t^{-1}(0) = \Delta M$.



Finalement, on a construit une équivalence d'homotopie :

$$\mathcal{H} : \mathbb{Z}_2 - Iso(M^2, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 - Equi(M^2 \setminus Int(\mathcal{V}), \mathbb{R}^n).$$

Il est facile de se convaincre, d'après la construction de cette équivalence d'homotopie, que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} E(M, \mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\times} & \mathbb{Z}_2 - Iso(M^2, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \\ & \overset{\Phi}{\searrow} & \downarrow \mathcal{H} \\ & & Z_2 - Equi(M^2 \setminus Int(\mathcal{V}), \mathbb{R}^n) \end{array}$$

est homotopiquement commutatif, d'où le résultat. $\square$

3 Applications G-équivariantes

Soit G un groupe agissant à droite sur X, Y espaces topologiques. On note :

$$X \times_G Y = X \times Y/G \text{ où } (x, y) \sim (xg, yg).$$

La projection $\pi : X \times Y \to X$ induit une projection $X \times_G Y \xrightarrow{p} X/G$ avec $p^{-1}([x]) = \{[(x, y)]\ , y \in Y\} \simeq Y$. Toute application $f : X \to Y$ G-équivariante définit une section $\sigma(f) : X/G \to X \times_G Y$, $x \mapsto [x, f(x)]$.

Lemme. – *L'application :*

$$\begin{array}{ccc} G - Equi(X,Y) & \longrightarrow & \Gamma(X \times_G Y) \\ f & \longmapsto & \sigma(f) \end{array}$$

est un homéomorphisme. En particulier :

$$\pi_0(G - Equi(X,Y)) \simeq \pi_0(\Gamma(X \times_G Y)).$$

La preuve de ce lemme est quasi-immédiate, nous ne l'écrirons pas. Le calcul du $\pi_0(\Gamma(X \times_G Y))$ est en général ardu, il est du ressort de la théorie homotopique. Néanmoins, dans certains cas, on dispose de résultats directs. Par exemple, la proposition suivante que nous admettons.

Proposition. – *Si Y est n-connexe ($\pi_0(Y) = ... = \pi_n(Y) = 0$) et si X est homotopiquement équivalent à un CW-complexe de dimension inférieure ou égale à n, alors :*

$$\pi_0(\Gamma(X \times_G Y)) = \{0\}.$$

4 Plongements de sphères dans $\mathbb{R}^n$

D'après ce que nous venons de voir, $\pi_0(E(M, \mathbb{R}^n)) \simeq \pi_0(\xi)$ où ξ est le fibré en sphères $\mathbb{S}^{n-1}$:

$$M^2 \setminus Int(\mathcal{V}) \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow (M^2 \setminus Int(\mathcal{V}))/\mathbb{Z}_2.$$

On note $M^* = (M^2 \setminus \Delta M)/\mathbb{Z}_2$ qui est bien sûr homotopiquement équivalent à $(M^2 \setminus Int(\mathcal{V}))/\mathbb{Z}_2$.

Lemme. – *Si $M = \mathbb{S}^m$ alors M^* est homotopiquement équivalent à $\mathbb{R}P^m$.*

Preuve. – L'espace M^* est la variété ouverte des ensembles à deux éléments $\{x_1, x_2\}$ avec $x_1 \neq x_2$. Deux points distincts x_1, $x_2 \in \mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ déterminent une droite affine. On construit une rétraction par déformations de $(\mathbb{S}^m)^*$ sur $\mathbb{R}P^m$ en faisant "glisser" x_1 et x_2 vers les deux seuls points antipodaux de $\mathbb{S}^m$ qui déterminent la même droite vectorielle sous-jacente. $\square$

Puisque $\mathbb{S}^{n-1}$ est $(n-2)$-connexe et que $3m + 4 \leq 2n$ implique $n - 2 \geq m$, on obtient en corollaire du théorème d'Haefliger le résultat suivant.

Corollaire. – *Si $3m + 4 \leq 2n$, alors $\pi_0(E(\mathbb{S}^m, \mathbb{R}^n)) = \{0\}$.*

Si on dépasse la limite $3m+4=2n$, ce résultat ne perdure pas, A. Haefliger a montré que :

$$\begin{array}{ll}\pi_0(E(\mathbb{S}^{4k-1},\mathbb{R}^{6k}))\simeq\mathbb{Z} & (k\geq 1),\\ \pi_0(E(\mathbb{S}^{4k+1},\mathbb{R}^{6k+3}))\simeq\mathbb{Z}_2 & (k\geq 1).\end{array}$$

5 Exercices

Exercice. 1. – a) Quelle propriété générique n'est plus garantie pour les immersions de M dans N si $2n\leq 3m$?

Exercice. 2. – a) Une 2-chaîne de $\mathbb{R}^n$ est un plongement de l'union disjointe $M=\mathbb{S}^m\coprod\mathbb{S}^p$ dans $\mathbb{R}^n$. Pour fixer les idées, on suppose $m\geq p$.
a) Appliquer le théorème d'Haefliger et montrer que si $2n\geq 3m+4$ alors :

$$\pi_0(E(\mathbb{S}^m\coprod\mathbb{S}^p,\mathbb{R}^n))\simeq[\mathbb{S}^m\times\mathbb{S}^p,\mathbb{S}^{m-1}].$$

Déterminer cet ensemble dans le cas où $m+p\leq n-1$.

On suppose désormais que $m+p=n-1$. Si $f:\mathbb{S}^m\to\mathbb{R}^n$, $g:\mathbb{S}^p\to\mathbb{R}^n$ sont deux plongements, on pose :

$$\begin{array}{rccc} l=l(f,g): & \mathbb{S}^m\times\mathbb{S}^p & \longrightarrow & \mathbb{S}^{n-1}\\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{f(x)-g(y)}{|f(x)-g(y)|}.\end{array}$$

Des orientations $v\in H^{m+p}(\mathbb{S}^m\times\mathbb{S}^p,\mathbb{Z})$ et $u\in H^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1},\mathbb{Z})$ étant fixées, on définit le nombre d'enlacement $lk(f,g)$ comme étant l'entier $d\in\mathbb{Z}$ déterminé par la relation : $l^*u=dv$, autrement dit $lk(f,g)$ est le degré de l'application l.
b) Montrer que si $f:\mathbb{S}^m\to\mathbb{R}^n\setminus g(\mathbb{S}^p)$ s'étend en un plongement $\tilde{f}:D^{m+1}\to\mathbb{R}^n\setminus g(\mathbb{S}^p)$ alors $lk(f,g)=0$.
c) Soient $i:\mathbb{S}^m\to\mathbb{R}^m\oplus\{0\}\oplus\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^n$ et $j:\mathbb{S}^p\to\{0\}\oplus\mathbb{R}^p\oplus\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^n$ les inclusions standards. Montrer que $lk(i,j)=\pm 1$ selon les choix d'orientations. (*Suggestion.* – Considérer $\tilde{\imath}:D^{m+1}\to\mathbb{R}^m\oplus\mathbb{R}\oplus\{0\}$ bordant $i(\mathbb{S}^m)$, on a : $\tilde{\imath}(x)=j(y)\iff x=0,y=N$ le pôle nord de $\mathbb{S}^p$. Prolonger $l(i,j)$ en une application $\tilde{l}:D^{m+1}\times\mathbb{S}^p\setminus B\to\mathbb{S}^{n-1}$ où B est une boule ouverte de centre $(0,N)$. D'après Stokes, il suffit de calculer le degré de $\tilde{l}_{|\partial\bar{B}}$).
d) Comment obtenir un représentant de chaque classe de $\pi_0(E(\mathbb{S}^m\coprod\mathbb{S}^p,\mathbb{R}^n))$, $m+p=n-1,\ 3m+4\leq 2n$?

Exercice. 3. – a) Soit $i:\Delta M\subset M^2$. Montrer que les fibrés vectoriels $N(i)=N(\Delta M)$ et TM sont isomorphes.
b) Soit $\mathcal{U}$ un voisinage ouvert de la section nulle $\mathcal{O}$ de $N(i)$ sur lequel $exp:\mathcal{U}\to\mathcal{V}=exp(\mathcal{U})\subset M^2$ est un difféomorphisme. On suppose qu'il existe une rétraction par déformation $r_t:\overline{\mathcal{U}}\setminus\mathcal{O}\to\overline{\mathcal{U}}\setminus\mathcal{O}$ invariante par la multiplication par -1 et telle que $r_1:\overline{\mathcal{U}}\setminus\mathcal{O}\to\partial\overline{\mathcal{U}}$. Montrer que $(M^2\setminus\Delta M)/\mathbb{Z}_2$ se rétracte sur $(M^2\setminus\mathcal{V})/\mathbb{Z}_2$.

c) On suppose désormais que $M = G$ un groupe de Lie et on note L_g la multiplication à gauche par $g \in G$. Ecrire, au moyen de la différentielle de L_g, un isomorphisme θ entre $G \times T_eG$ et $N\Delta M$.
d) Soit $\Phi : G^2 \to G^2$, $(g_1, g_2) \mapsto (g_1^{-1}g_2, g_1)$ et A un sous-ensemble de T_eG. Quelle est l'image de A par $\Phi \circ exp \circ \theta$?
e) On suppose que A est ouverte et qu'il existe une rétraction par déformation $r_t : \bar{A} \setminus \{0\} \to \bar{A} \setminus \{0\}$, invariante par la multiplication par -1 et telle que $r_1 : \bar{A} \setminus \{0\} \to \partial\bar{A}$. Montrer que si exp est injective sur $2A$ alors $(G^2 \setminus \Delta G)/\mathbb{Z}_2$ se rétracte sur $(G^2 \setminus exp \circ \theta(A))/\mathbb{Z}_2$.
f) On prend $G = \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. Montrer que $(G^2 \setminus \Delta G)/\mathbb{Z}_2$ se rétracte par déformation sur un CW-complexe de dimension 9. En déduire $\pi_0(E(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3, \mathbb{R}^n))$ pour $n \geq 11$.

Exercice. 4. − Soit M compacte si $m < n$, ouverte si $m = n$. Montrer qu'il y a une équivalence d'homotopie entre $I(M, \mathbb{R}^n)$ et l'espace des applications de FM dans $V_{n,m}$ $Gl(m, \mathbb{R})$-équivariantes. On précisera l'action de $Gl(m, \mathbb{R})$ sur FM et $V_{n,m}$.

6 Bibliographie

M. Adachi, *Embeddings and immersions*, Translations of the Mathematical Monographs, Vol. 124, American Mathematical Society, 1993.