Leçon I : Variétés et applications différentiables

1 Varietés et sous-variétés (rappels)

Définition. – Un espace topologique M est une *variété de dimension n* si :

1) M est séparée,
2) M est une union dénombrable de compacts,
3) M est localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

La dernière condition équivaut à l'existence d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de M tel que pour chaque $i \in I$, il existe une application $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ qui est un homéomorphisme sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. La donnée de $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ est appelée un *atlas.* Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, on a des changements de cartes :

$$\psi_{ij} : \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j).$$

Ces applications partent d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et arrivent dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on peut donc parler de la classe de ces fonctions. Si il existe sur M un atlas dont les ψ_{ij} sont tous de classe C^r, on dit que M est une *variété de classe C^r*.

Exemples. – $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{T}^n$, $\Sigma_g = \mathbb{T}^2\sharp\cdots\sharp\mathbb{T}^2$ (g fois), $\mathbb{M}^2$ le ruban de Möbius, groupes de Lie.

Remarque. – Les conditions 1) et 2) de la définition permettent d'écarter certains espaces "pathologiques" (*cf.* Berger-Gostiaux p. 68-69 pour des exemples). Elles assurent aussi l'existence d'une partition de l'unité.

Définition. – Une application $f : M \to N$ entre variétés de classe C^r est *de classe C^r* au point $x \in M$ si il existe des cartes de M au voisinage de x et de N au voisinage de $f(x)$ telle que, lue sur ces cartes, f soit C^r.

Cette définition est consistante, elle ne dépend pas des cartes choisies.

Avertissement. – Dans ce cours, on suppose - sauf mention explicite du contraire - que l'on travaille avec des variétés de classe C^∞.[1]

[1]Un résultat de R. Palais affirme que si M admet un atlas C^1 alors il existe un atlas

Proposition (Partition de l'unité). – *Soit* $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ *un recouvrement ouvert* C^∞ *de* M *alors, pour tout* $i \in I$, *il existe* $\lambda_i : M \xrightarrow{C^\infty} [0,1]$ *telle que :*

- *Supp* $\lambda_i \subset U_i$,
- $\{Supp\ \lambda_i\}_{i\in I}$ *est localement fini,*
- $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$.

La partition de l'unité est un outil permettant de passer d'une construction locale sur des ouverts de M à une construction globale sur tout M.

Soit G un sous-groupe de $Diff^\infty(M)$.[2] On rappelle que G agit *librement* sur M si $\forall x \in M$, $g \neq id \Rightarrow g.x \neq x$, G agit *proprement* sur M si pour tout compact K de M, $g.K \cap K = \emptyset$ sauf peut-être pour un nombre fini d'éléments de G.

Proposition. – *a) Si* G *est un sous-groupe discret agissant librement et proprement sur* M, *alors* M/G *est une variété* C^∞.
b) Si G *est un sous-groupe de Lie compact de* $Diff^\infty(M)$ *agissant librement sur* M *alors* M/G *est une variété* C^∞ *de dimension* $\dim M - \dim G$.
c) Si M *est un groupe de Lie et* G *un sous-groupe de Lie fermé, alors* M/G *est une variété* C^∞ *de dimension* $\dim M - \dim G$.

Exemple. – $\mathbb{R}P^n = \mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{C}P^m = \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$, $\Sigma_g = H/\Gamma_g$, H = demi-plan de Poincaré, $\Gamma_g \subset SL(2,\mathbb{R})$.

Définition. – Une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ est une *sous-variété de dimension* m si pour tout $x \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant x, ou ouvert U' de $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\Phi : U \to U'$ tel que :

$$\Phi(U \cap M) = U' \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}).$$

Une partie $M \subset N$ est une sous-variété si dans les cartes de N, M apparaît comme une sous-variété.

Exemples. – $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{S}^n$, $\mathbb{R}P^m \subset \mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^m \subset \mathbb{C}P^n$, $SO(m) \subset SO(n)$.

2 Immersions et plongements

Définition. – Une application $f : M^m \xrightarrow{C^\infty} N^n$ est une *immersion* si lue sur les cartes, elle est de rang maximum (i. e. de rang m). L'application f est une *submersion* si lue sur les cartes, elle est de rang n. Enfin, f est un

C^∞ sur M définissant la même structure C^1. Autrement dit, il n'y a pas grande différence à supposer M C^1 ou M C^∞.

[2]La topologie des espaces d'applications est abordée plus loin.

plongement si $f(M)$ est une sous-variété de N et f un difféomorphisme de M dans $f(M)$.

Un critère. – Si f est une immersion injective propre alors f est un plongement (la réciproque est fausse, *cf.* plus bas). On parle alors de plongement propre.

Rappelons que f est propre si la préimage de tout compact est compacte. En particulier, si la source est compacte, f est propre. La démonstration de ce critère est une application du théorème d'inversion locale.

Exemples. – Les projections $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^n$, $(m \geq n)$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$, $\mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$, $\mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ sont des submersions. Les inclusions $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $SO(n) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont des plongements.

Exemple. – La surface de Boy est une immersion de $\mathbb{R}P^2$ dans $\mathbb{R}^3$. (*Source des illustrations.* – B. Morin et J.-P. Petit, C. R. A. S. (287), 767-770).

Exemple. – L'espace projectif $\mathbb{R}P^2$ se plonge dans $\mathbb{R}^4$. En effet, $\mathbb{R}P^2$ est l'union d'un ruban de Möbius $\mathbb{M}^2$ et d'un disque D^2 le long du bord $\partial\mathbb{M}^2 = \partial D^2 = \mathbb{S}^1$. Il suffit de "pousser" $\mathbb{M}^2$ et D^2 de part et d'autre de $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$ en laissant $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^3$ fixe.

Contre-exemples. – 1) L'application $f : \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$ est une immersion et $f(\mathbb{S}^1)$ est une sous-variété de $\mathbb{C}$ mais f n'est pas un plongement car elle ne réalise pas un difféomorphisme sur son image.
2) L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{T}^2$, $u \mapsto (u, \alpha u)$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est une immersion injective mais pas un plongement car $f(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{T}^2$.
3) L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $u \mapsto (1 + \frac{1}{u})e^{iu}$ est un plongement de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ mais pas une immersion propre.

Théorème. – *Toute variété compacte C^∞ admet un plongement dans $\mathbb{R}^n$ pourvu que n soit suffisamment grand.*

La démonstration de ce théorème passe par le lemme de rétrécissement.

Lemme de rétrécissement. – *Soit $\{U_i\}$ un recouvrement ouvert de M, il existe un recouvrement ouvert $\{V_i\}_{i\in I}$ avec $\overline{V_i} \subset U_i$ tel que $\{V_i\}_{i\in I}$ soit localement finie.*

Démonstration du lemme. – Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité subordonnée à $\{U_i\}$. On pose $V_i = \lambda_i^{-1}(]0,1])$, on a :

$$\overline{V_i} = \overline{\{x \in M,\ \lambda_i(x) \neq 0\}} = Supp\ \lambda_i \subset U_i,$$

et $\{V_i\}_{i\in I}$ est localement finie car $\{Supp\ \lambda_i\}_{i\in I}$ elle-même est localement finie. C'est aussi un recouvrement puisque pour tout x dans M il existe un indice i tel que $\lambda_i(x) \neq 0$. $\square$

Démonstration du théorème. $-$ Soit $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ un atlas fini, i. e. $I = \{1, 2, \cdots, N\}$ et $\alpha_i : M \to [0,1]$, $i \in I$, telles que $\alpha_i \equiv 1$ sur $\overline{V_i}$ et $Supp\ \alpha_i \subset U_i$.[3] On définit :

$$\begin{array}{rccl} f : & M^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^{N(m+1)} \\ & x & \longmapsto & (\alpha_1(x)\varphi_1(x), \alpha_1(x), \cdots, \alpha_N(x)\varphi_N(x), \alpha_N(x)). \end{array}$$

Cette application est propre car M est compacte. Elle est aussi injective. En effet, supposons que $f(x) = f(y)$ avec $x \in V_i$, alors $1 = \alpha_i(x) = \alpha_i(y)$ donc $y \in V_i$. Mais alors $\alpha_i(x)\varphi_i(x) = \alpha_i(y)\varphi_j(y)$ entraîne $\varphi_i(x) = \varphi_j(y)$ soit $x = y$. Montrons que f est une immersion. Soit $x \in V_i$ et $\pi_i : \mathbb{R}^{N(m+1)} \to \mathbb{R}^m$ la projection telle que :

$$\begin{array}{rccl} h = \pi_i \circ f_{|V_i} : & V_i & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & x & \longmapsto & \alpha_i(x)\varphi_i(x) = \varphi_i(x). \end{array}$$

On a $rang_x\ h = m$. D'autre part : $rang\ \pi_i \circ f \leq \min(rang\ \pi_i, rang\ f)$, or $rang\ \pi_i = m$ donc $rang_x\ f \geq m$, et par conséquent $rang_x\ f = m$. $\square$

Remarque. $-$ Ce théorème reste vrai même si M n'est plus supposée compacte. Pour une démonstration, voir par exemple l'ouvrage de M. Adachi.

On note $I(M, \mathbb{R}^n)$ (resp. $E(M, \mathbb{R}^n)$) l'espace des immersions (resp. des plongements) de M dans $\mathbb{R}^n$, ces deux espaces sont des sous-espaces de $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ dont il faut maintenant préciser la topologie : c'est celle de la convergence uniforme sur les compacts des dérivées de tout ordre. Soit (K_n) une famille dénombrable de compacts recouvrant M, la topologie de $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ est métrisable à partir de la famille des semi-métriques suivantes :

$$d^r_{K_n}(f, g) = \sup_{K_n} |f^{(r)}(x) - g^{(r)}(x)|$$

où r est un multi-indice de dérivation. Bien sûr, si M est compacte, on peut réduire la famille (K_n) à un seul élément. Cette topologie est appelée la

[3] De tels α_i existent car $\overline{V_i}$ fermé dans M compact $\Rightarrow$ $\overline{V_i}$ compact $\Rightarrow$ $K_i = \varphi_i(\overline{V_i})$ compact dans $\Omega_i = \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^m$. Il existe $\epsilon_i > 0$ tels que $K_i^{\epsilon_i} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid d(x, K_i) \leq \epsilon_i\} \subset \Omega_i$. Prendre $\alpha_i = 1 - \lambda(\frac{d^2(x,K_i)}{\epsilon_i})$ avec $\lambda : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$, C^∞, $\lambda(0) = 0$, $\lambda(x) = 1$ si $x \geq 1$.

topologie des compacts-ouverts, l'origine de ce nom est bien visible lorsque l'on remplace $\mathbb{R}^n$ par une variété N^n quelconque. Pour définir une "distance" de g à une application f donnée, il faut prendre un compact K de M et un ouvert U de N qui soit un domaine de carte et tel que $f(K) \subset U$. On note :

$$W^r_{K,U,\epsilon}(f) = \{g \in C^\infty(M,N) \mid g(K) \subset U,\ d^r_K(f,g) < \epsilon\}.$$

L'unique topologie pour laquelle les intersections finies de $W^r_{K,U,\epsilon}(f)$ forment une base de voisinage est la topologie des compacts-ouverts de $C^\infty(M,N)$.

Théorème. – *Soit M compacte, alors $I(M,\mathbb{R}^n)$ et $E(M,\mathbb{R}^n)$ sont des ouverts de $C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. – Cas des immersions. – Soit $d = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2^k}\frac{d^k}{1+d^k}$ où $d^k = \sum_{|r|=k} d^r_M$. Soit $f \in I(M,\mathbb{R}^n)$, supposons que toutes les boules $B(f,\frac{1}{k})$ contiennent un élément f_k qui ne soit pas une immersion. Il existe donc $x_k \in M$, v_k de norme 1 tels que :

$$df_k(x_k)(v_k) = 0.$$

Puisque M est compacte, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $x_k \to x$ et travailler dans une seule carte contenant x. On peut alors supposer que $|v_k| = 1$ pour une norme sur cette carte puis, quitte à extraire une sous-suite, que $v_k \to v$ avec v de norme 1. Or $f_k \to f$ donc $0 = df_k(x_k)(v_k) \to df(x)(v) = 0$. Contradiction.

Cas des plongements. – Supposons qu'il existe $f_k \to f$ avec $f_k \notin E(M,\mathbb{R}^n)$. Puisque M est compacte et $I(M,\mathbb{R}^n)$ est ouvert, c'est donc que les f_k ont des points d'auto-intersections. Soient $a_k \neq b_k$ des points tels que $f_k(a_k) = f_k(b_k)$. On peut supposer $a_k \to a$, $b_k \to b$, or $f_k(a_k) = f_k(b_k) \Rightarrow f(a) = f(b)$. Mais f étant un plongement $a = b = x_0$. Utilisons une carte au voisinage de x_0, dans cette carte $v_k = \frac{b_k - a_k}{|b_k - a_k|}$ est un vecteur unitaire tangent, on peut supposer $v_k \to v$ (unitaire). Un développement de Taylor de f_k sur une boule B centrée en x_0 permet d'écrire :

$$\frac{|f_k(b_k) - f_k(a_k) - df_k(a_k)(b_k - a_k)|}{|b_k - a_k|} \leq \frac{1}{2}\sup_B |Hess\ f_k||b_k - a_k|.$$

Puisque $f_k \to f$, on peut toujours supposer :

$$\sup_B |Hess\ f_k| \leq 2 \sup_B |Hess\ f|$$

et donc :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|f_k(b_k) - f_k(a_k) - df_k(a_k)(b_k - a_k)|}{|b_k - a_k|} = 0.$$

Donc $\lim_{k\to\infty} df_k(a_k)(v_k) = 0$ car $f_k(b_k) = f_k(a_k)$. D'autre part :

$$\lim_{k\to\infty} df_k(a_k)(v_k) = df(x_0)(v).$$

Contradiction. $\square$

Remarque. – Le théorème reste vrai même si $\mathbb{R}^n$ est remplacé par une variété N quelconque. Si M n'est plus supposée compacte, le théorème est encore vrai à condition d'abondonner la topologie des compacts-ouverts et de lui préférer la topologie fine. Cette topologie est celle que l'on obtient en prenant comme base de voisinages les intersections dénombrables de $W^r_{K,U,\epsilon}$. Si M est compacte, on obtient la même topologie que celle des compacts-ouverts mais si M n'est plus compacte, elle est beaucoup plus large. En particulier $C^\infty(M,N)$ n'est pas métrisable, mais c'est tout de même un espace de Baire : l'intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. On montre également que $Sub(M,N)$ (resp. $Diff(M)$) est un ouvert de $C^\infty(M,N)$ (resp. $C^\infty(M,M)$).

3 Espace des jets

Définition. – Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et $f \in C^\infty(U,\mathbb{R}^n)$, le *r-jet de* f en x est le uplet :

$$j^r f(x) = (x, f(x), \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x), \cdots, \partial^\alpha f(x), \cdots)$$

où α parcourt tous les multi-indices de dérivation tels que $|\alpha| \leq r$.

Soit $d_r = d_r(m,r)$ le nombre de dérivées partielles ∂^α d'ordre r, le r-jet $j^r f(x)$ peut être considéré comme un point de l'espace $J^r(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{nd_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{nd_r}$ et $j^r f$ fournit une application :

$$\begin{array}{rccl} j^r f : & U & \longrightarrow & J^r(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) \\ & x & \longmapsto & j^r f(x) \end{array}$$

qui s'identifie à un développement de Taylor à l'ordre r. Notons que :

$$J^1(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$$

et plus généralement :

$$J^r(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \prod_{k=1}^{r} \mathcal{L}^k_{sym}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$$

où $\mathcal{L}^k_{sym}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ est l'espace vectoriel des applications k-linéaires symétriques de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. Si M et N sont des variétés, un r-jet est une classe d'équivalence $[x, f, U]_r$ de triplets (x, f, U) où $U \subset M$ est un ouvert, $x \in U$ et $f : U \to N$. La relation d'équivalence est la suivante : $[x, f, U]_r = [x', f', U']_r$ si $x = x'$ et si il existe des cartes $V \subset M$ et $W \subset N$ telles que, lues dans ces cartes, f et f' aient les mêmes dérivées jusqu'à l'ordre r en x. Bien sûr, si cela est vrai pour un certain couple (V, W) de cartes, cela restera vrai pour tout autre couple de cartes. On note $j^r f(x)$ la classe d'équivalence, l'ensemble $J^r(M, N)$ de tous les r-jets a une structure de variété, il est naturellement muni d'un certain nombre d'applications :

-l'application source $\sigma : J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to M$, $[x, f, U]_r \mapsto x$,

-l'application but $\tau : J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to N$, $[x, f, U]_r \mapsto f(x)$,

-les projections $p^r_q : J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to J^q(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $[x, f, U]_r \mapsto [x, f, U]_q$, $(r \geq q)$.

Une fonction $f : M \longrightarrow N$ fournit une application :

$$\begin{array}{rccc} j^r f : & M & \longrightarrow & J^r(M, N) \\ & x & \longmapsto & j^r f(x). \end{array}$$

Il est facile de voir, en se plaçant dans une carte, que :

$$\sigma^{-1}(x) \simeq \mathbb{R}^n \times \prod_{k=1}^{r} \mathcal{L}^k_{sym}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n).$$

Définition. − On appelle *relation différentielle des immersions* l'ensemble $\mathcal{I} = \cup_{(x,y)\in M\times N} \mathcal{I}_{(x,y)} \subset J^1(M, N)$ où $\mathcal{I}_{(x,y)} = \{L : T_xM \to T_yN \mid rg\ L = m\}$.

Par définition, $f : M \to N$ est une immersion si et seulement si $j^1 f(M) \subset \mathcal{I}$.

4 Exercices

Exercice. 1. − a) Un k-repère orthonormé de l'espace euclidien $\mathbb{E}^n$ est un ensemble ordonné de k vecteurs linéairement indépendants et deux-à-deux orthogonaux. On note $V_{n,k}$ l'ensemble des k-repères orthonormés de $\mathbb{E}^n$. Montrer que $V_{n,k}$ est une variété - dite de Stiefel - en l'identifiant à un espace homogène (= quotient de deux groupes de Lie).
b) Même question avec l'ensemble $G_{n,k}$ des k-sous-espaces linéaires de $\mathbb{R}^n$ ($G_{n,k}$ est appelée la grassmannienne des k-plans de $\mathbb{R}^n$).

Exercice. 2. − a) Montrer qu'il existe une immersion de $\mathbb{T}^2 \setminus \{point\}$ dans $\mathbb{R}^2$.
b) Idem pour $\mathbb{T}^3 \setminus \{point\}$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice. 3. − Plongement de $\mathbb{R}P^n$ dans $\mathbb{S}^{2n}$ (plongements de Hopf-James). Soit $h : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+k+1}$ une application bilinéaire symétrique telle que :

$$x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \Rightarrow h(x, y) \neq 0.$$

Soit $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n+k}$, $x \mapsto \frac{h(x,x)}{|h(x,x)|}$.
a) Montrer que $g(x) = g(y) \iff x = \pm y$ (considérer $h(x+y, x-y)$).
b) Montrer que g est une immersion.
c) Montrer que g induit un plongement de $\mathbb{R}P^n$ dans $\mathbb{S}^{n+k}$.
d) En considérant $h(x_0, \cdots, x_n, y_0, \cdots, y_n) = (z_0, \cdots, z_n)$ avec $z_k = \sum_{i+j=k} x_i y_j$, montrer que $\mathbb{R}P^n$ se plonge dans $\mathbb{S}^{2n}$ et dans $\mathbb{R}^{2n}$.

Exercice. 4. – Soit $f : M \xrightarrow{C^\infty} N$. On peut définir df, $j^1 f$, $j^2 f$ mais pas $Hess\ f$ en général, pourquoi ?

Exercice. 5. – Soit M compacte et $f : M \to \mathbb{R}^n$ une immersion. On note $\tilde{\mathcal{D}}(f) = \{(x_1, x_2) \in M^2 \setminus \Delta M \mid f(x_1) = f(x_2)\}$. Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de la diagonale ΔM dans M^2 tel que $\tilde{\mathcal{D}}(f) \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

5 Bibliographie

M. Adachi, *Embeddings and immersions*, Translations of the Mathematical Monographs, Vol. 124, American Mathematical Society, 1993.

M. Berger et B. Gostiaux, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, PUF.

M. Hirsch, *Differential Topology*, GTM, Springer-Verlag.

J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, PUG.

F. Laudenbach, *Topologie différentielle*, Cours donné à l'Ecole Polytechnique.