Leçon IV : Le théorème de Whitney

1 Nombre d'intersection

Définition. – Soient f_0 et f_1 deux immersions. On dit que f_0 et f_1 sont *régulièrement homotopes* si il existe une application C^∞ $F : M \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $F(x,s) = F_s(x)$ telle que $F_0 = f_0$, $F_1 = f_1$, et F_s est une immersion pour tout $s \in [0,1]$.

Une telle application fournit un chemin *continu* $F : [0,1] \to I(M,\mathbb{R}^n)$ joignant f_0 et f_1. Une simple famille d'immersions C^∞ f_s dépendant continûment du paramètre $s \in [0,1]$ donne un chemin dans $I(M,\mathbb{R}^n)$ non nécessairement continu (la topologie de $I(M,\mathbb{R}^n)$ est la topologie fine).

Définition. – Soient f_0 et f_1 deux plongements. On dit que f_0 et f_1 sont *isotopes* si il existe une application C^∞ $F : M \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $F(x,s) = F_s(x)$ telle que $F_0 = f_0$, $F_1 = f_1$, et F_s est un plongement pour tout $s \in [0,1]$.

Définition. – Une immersion $f : M \to \mathbb{R}^{2m}$ est dite *complètement régulière:* si :

(i) f n'a pas d'autre point multiple que des points doubles,

(ii) les points doubles de f sont propres i. e. si $f(x_1) = f(x_2)$ avec $x_1 \neq x_2$ alors $df_{x_1}(T_{x_1}M) \oplus df_{x_2}(T_{x_2}M) = \mathbb{R}^{2m}$.

Une application directe des théorèmes de transversalité permet de montrer le résultat suivant.

Théorème. – *L'ensemble des immersions complètement régulières est dense dans $C^\infty(M,\mathbb{R}^{2m})$ (topologie fine) et ouvert si M compacte.*

En particulier, si M est compacte et $f : M \to \mathbb{R}^{2m}$ est une immersion, il existe une homotopie régulière, C^0-petite, qui joint f à une immersion complètement régulière.

Soit $f : M \to \mathbb{R}^{2m}$ une immersion complètement régulière. On note $\mathcal{D} = \{y \in f(M) \mid Card\ f^{-1}(y) = 2\}$. Soient $y \in \mathcal{D}$, $\{x_1, x_2\} = f^{-1}(y)$, on définit le *type* $(f,f)_y$ *du point double* par :

(i) si M est non orientable ou m impair : $(f,f)_y = 1 \in \mathbb{Z}_2$
(ii) si M est orientable et m pair $(f,f)_y \in \mathbb{Z}$ et :

$$(f,f)_y = \begin{cases} +1 & \text{si } (df_{x_1}(u_1),...,df_{x_1}(u_m), df_{x_2}(v_1),...,df_{x_2}(v_m)) \text{ est directe} \\ & \text{dans } \mathbb{R}^{2m}, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans (ii), on a noté $(u_1,...,u_m)$ et $(v_1,...,v_m)$ des bases directes de $T_{x_1}M$ et $T_{x_2}M$. Puisque m est pair, $(f,f)_y$ est bien défini quel que soit l'ordre de (x_1,x_2).

Si M est compacte alors le cardinal de $\mathcal{D}$ est fini et on définit le *nombre d'intersection de* f par :

(i) $I(f) = \sum_{y\in\mathcal{D}} (f,f)_y \in \mathbb{Z}_2$ si M est non orientable ou m impair.
(ii) $I(f) = \sum_{y\in\mathcal{D}} (f,f)_y \in \mathbb{Z}$ si M est orientable et m pair,

Théorème. – *On suppose M compacte.*
(i) Si M est orientable et m pair alors pour tout $p \in \mathbb{Z}$, il existe une immersion complètement régulière $f : M \to \mathbb{R}^{2m}$ telle que $I(f) = p$.
(ii) Si M est non orientable ou m impair alors pour tout $p \in \mathbb{Z}_2$, il existe une immersion complètement régulière $f : M \to \mathbb{R}^{2m}$ telle que $I(f) = p$.

La démonstration de ce théorème nécessite de connaître le lemme suivant dont la démonstration est proposée à l'exercice 4 :

Lemme. – *Il existe une immersion complètement régulière $\beta_r : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{2m}$ telle que $I(\beta_r) = 1$ et β_r soit l'identité hors d'une boule $B(0,r) \subset \mathbb{R}^m$.*

Démonstration du théorème. – Soit $f_0 : M \to \mathbb{R}^{2m}$ une immersion complètement régulière. On peut modifier f_0 au voisinage d'un point x_0 en remplaçant f_0 par un β_r convenable ou encore par $r \circ \beta_r$ où $r : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$ est une reflexion hyperplane. Le nombre d'intersection de la nouvelle immersion est $I(f_0) + 1$ ou $I(f_0) - 1$. $\square$

2 Le théorème de Whitney

Nous sommes maintenant capable de construire des immersions complètement régulières telles que le nombre d'intersection soit nul. Cela signifie que le nombre de points doubles de l'immersion est pair et que, si M est orientable et m pair, on peut regrouper les points doubles par paires de types opposés.

Lemme d'élimination des points doubles de Whitney. – *On suppose $m \geq 3$ et M connexe. Soient $f_0 : M \to \mathbb{R}^{2m}$ une immersion complètement régulière et $\mathcal{D}_0 = \{y_0, y_1, ...\}$ l'ensemble de ses points doubles. Si M est orientable et m pair on suppose, en outre, que y_0 et y_1 sont de type opposés. Alors il existe une homotopie régulière f_t telle que f_1 soit une immersion complètement régulière dont l'ensemble des points doubles est $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_0 \setminus \{y_0, y_1\}$.*

Le démonstration de ce lemme célèbre occupe le prochain paragraphe. L'usage répété de ce lemme combiné au dernier théorème du §1 permet d'obtenir le théorème de Whitney.

Théorème de Whitney (1944). – *Toute variété compacte C^∞ M^m admet un plongement dans $\mathbb{R}^{2m}$.*

Il y a tout de même quelque chose à préciser si $m \leq 2$ car dans ce cas on ne possède pas de lemme d'élimination des points doubles. On procède alors au cas par cas. Si $m = 1$, M est une union finie de $\mathbb{S}^1$ est c'est immédiat. Si $m = 2$, M s'obtient par des unions et/ou des sommes connexes de $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{T}^2$ et $\mathbb{R}P^2$. Or $\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{T}^2$ se plongent dans $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}P^2$ aussi (*cf.* les plongements de Hopf-James, exercice 4 de la leçon I).

Remarque. – Le théorème reste valide si M n'est pas supposée compacte.

3 Démonstration du lemme d'élimination

On commence par supposer que M est orientable et m pair.

Etape 1 : Existence d'un disque de Whitney. – On note $f_0^{-1}(y_0) = \{a, a'\}$, $f_0^{-1}(y_1) = \{b, b'\}$, γ_1 et γ_2 deux arcs plongés dans $M \setminus f_0^{-1}(\mathcal{D}_1)$ joignant a à b et a' à b'. Composées par f_0 ces deux arcs fournissent un lacet $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ dans $f_0(M) \subset \mathbb{R}^{2m}$. Une adaptation du théorème du plongement du disque (vu à l'exercice 5 de la leçon III) montre que si $m \geq 3$, il existe un plongement $h : D^2 \to \mathbb{R}^{2m}$ tel que :

i) $h_{|\partial D^2} = \Gamma$

ii) $h(D^2 \setminus \partial D^2) \cap M = \emptyset$,

iii) $dim(dh_x(T_x D^2) \cap T_{h(x)} M) = 1$, pour tout x dans ∂D^2.

La condition *iii* est ambiguë si $h(x)$ est un point double, dans ce cas il faut comprendre qu'elle doit avoir lieu pour n'importe lequel des deux espaces tangents. Pour la suite on confond D^2 et son image $h(D^2)$, de même on confond les applications Γ_i et leurs images.

Etape 2 : Trivialité des épaississements. – L'image par f_0 de voisinages suffisamment petits de l'image des arcs γ_1 et γ_2 fournit deux sous-variétés Q_1 et Q_2. On choisit sur $\mathbb{R}^{2m}$ une métrique riemannienne telle que Q_1 et Q_2 s'intersectent perpendiculairement. On note G_1 et G_2 les fibrés sur Γ_1 et Γ_2 qui sont les compléments orthogonaux de $T\Gamma_1$ et $T\Gamma_2$ dans Q_1, Q_2 :

$$G_i \oplus^{\perp} T\Gamma_i = TQ_{i|\Gamma_i}.$$

Les fibrés G_i sont des fibrés de rang $m-1$, triviaux car la base est contractible. Soit E le complément orthogonal à G_1 dans ND^2 au dessus de Γ_1, i. e.

$$E \oplus^{\perp} G_1 = ND^2_{|\Gamma_1}.$$

Le fibré E est trivial de rang $m-1$, et par le choix de la métrique :

$$E_{|\partial\Gamma_1} = G_{2|\partial\Gamma_2}.$$

Soit V le fibré vectoriel obtenu en recollant E et G_2 le long de $\partial\Gamma_1 = \partial\Gamma_2$, autrement dit :

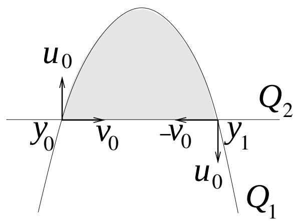
$$V_{|\Gamma_1} = E \qquad V_{|\Gamma_2} = G_2.$$

Lemme. – Le fibré V est trivialisable.

Démonstration du lemme. – Pour fixer les idées : $(f_0, f_0)_{y_0} = 1$ et $(f_0, f_0)_{y_1} = -1$. Puisque $TQ_{1|\Gamma_1}$ est trivial, on choisit des champs de vecteurs $(u_0, ..., u_{m-1})$ le long de Γ_1 tels que $u_0 = \Gamma_1'$ et $(u_0, ..., u_{m-1})$ est un base orthonormée directe de TQ_1. De même pour TQ_2 on choisit une base orthonormée directe $(v_0, ..., v_{m-1})$ avec $v_0 = \Gamma_2'$. On a :

$$\begin{array}{lcl} (f_0, f_0)_{y_0} = 1 & \iff & det(u_0, ..., u_{m-1}, v_0, ..., v_{m-1}) > 0 \text{ en } y_0, \\ (f_0, f_0)_{y_1} = -1 & \iff & det(u_0, ..., u_{m-1}, v_0, ..., v_{m-1}) < 0 \text{ en } y_1. \end{array}$$

On décide d'une orientation sur D^2 en convenant que (v_0, u_0) est directe en y_0 et donc $(-v_0, u_0)$ est directe en y_1.



On définit ensuite une orientation de ND^2 de la manière suivante :$(\nu_1, ..., \nu_{2m-2})$ est directe si, (w_1, w_2) étant directe dans TD^2, $(w_1, w_2, \nu_1, ..., \nu_{2m-2})$ est directe dans $\mathbb{R}^{2m}$. Le point clé de la démonstration est que, en y_0 comme en y_1, la base $(u_1, ..., u_{m-1}, v_1, ..., v_{m-1})$ est directe dans ND^2. En effet :

En $y_0, det(v_0, u_0, u_1, ..., u_{m-1}, v_1, ..., v_{m-1}) = (-1)^m det(u_0, ..., v_{m-1}) > 0$
En $y_1, det(-v_0, u_0, u_1, ..., u_{m-1}, v_1, ..., v_{m-1}) = -(-1)^m det(u_0, ..., v_{m-1}) > 0$.

On choisit maintenant une base globale $(e_1, ..., e_{m-1})$ qui trivialise E et telle que, en y_0, $(e_1, ..., e_{m-1}) = (v_1, ..., v_{m-1})$. Autrement dit, $(u_1, ..., u_{m-1}, e_1, ..., e_{m-1})$ est directe en y_0, par continuité, elle est directe en y_1. Puisque $(u_1, ..., u_{m-1}, v_1, ..., v_{m-1})$ est aussi directe en y_1, il existe un élément A de $Gl_+(Vect(v_1, ..., v_{m-1}))$ qui envoie $(v_1, ..., v_{m-1})$ sur $(e_1, ..., e_{m-1})$. Une fonction de transition de V est donc :

$$\begin{array}{rccc} t: & \mathbb{S}^0 = \{y_0\} \cup \{y_1\} & \longrightarrow & Gl_+(\mathbb{R}^{m-1}) \\ & y_0 & \longmapsto & Id \\ & y_1 & \longmapsto & A. \end{array}$$

Par conséquent V est un sous-fibré de ND^2 trivialisable. □

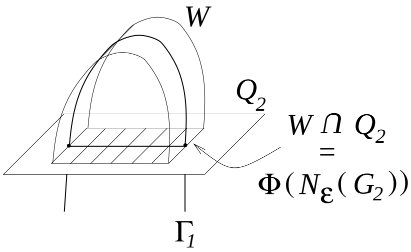
Lemme. – *Le fibré V s'étend en un fibré trivial $\tilde{V}$ sur tout D^2.*

Démonstration du lemme. – On a vu à l'exercice 6 de la leçon II que l'unique obstruction à étendre un tel sous-fibré est un élément du groupe fondamental de la grassmannienne $G^{or}_{m-1,2m-2}$ des $(m-1)$-plans orientés de $\mathbb{R}^{2m-2}$. Un calcul purement homotopique montre que ce groupe fondamental est nul (on aborde ces questions à la leçon V). Le fibré résultant ne peut être que trivial car D^2 est contractile. □

Soit $N_\epsilon(\tilde{V}) = \{v \in \tilde{V} \mid |v| \leq \epsilon\}$ et

$$\begin{array}{rccc} exp: & N_\epsilon(\tilde{V}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2m} \\ & v_x & \longmapsto & x + v. \end{array}$$

Si ϵ est suffisamment petit, exp est un difféomorphisme sur son image $W = exp(N_\epsilon(\tilde{V}))$ et comme $\tilde{V}$ est trivial, $N_\epsilon(\tilde{V})$ est difféomorphe à $D^2 \times D^{m-1}$. On aimerait avoir $W \cap Q_2 = exp(N_\epsilon(G_2))$, mais avec la construction proposée, on peut seulement garantir $W \cap Q_2 \supset \Gamma_2$. Pour corriger ce défaut, il suffit de considérer l'exponentielle de Q_2, de l'étendre sur un voisinage de Q_2 dans $\mathbb{R}^{2m}$ et de faire une interpolation entre cette extension et l'exponentielle de $\mathbb{R}^{2m}$. Appelons Φ la nouvelle fonction ainsi obtenue, on a alors $W = \Phi(N_\epsilon(\tilde{V}))$, par conséquent : $W \cap Q_2 = \Phi(N_\epsilon(\tilde{V}))$.



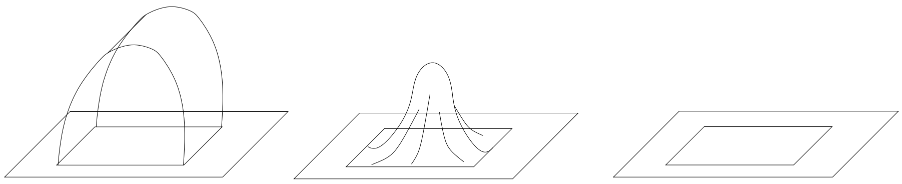
Etape 3 : Construction de l'isotopie. – Elle consiste en une isotopie à support dans W qui transforme

$$Q_2 = (Q_2 \setminus (W \cap Q_2)) \cup (W \cap Q_2)$$

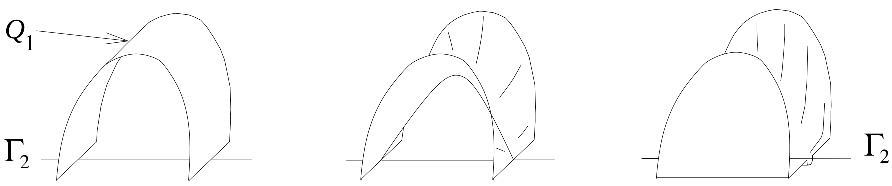
en

$$Q_2' = (Q_2 \setminus (W \cap Q_2)) \cup \overline{(\partial W) \setminus (W \cap Q_2)}$$

et qui est schématisée dans les dessins ci-dessous.



Schémas "dans $\mathbb{R}^{m+1} \times \{0\}$"



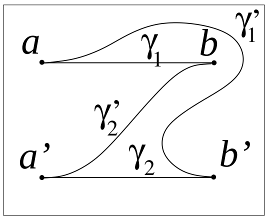
Schémas "dans $\Gamma_2 \times \{0\} \times \mathbb{R}^{m+1}$"

Pour obtenir une disjonction complète, il faut "pousser" l'isotopie un peu plus loin. Pour cela on peut étendre D^2 en $\tilde{D}^2 \supset D^2$, refaire les constructions sur $\tilde{D}^2$ et obtenir une sous-variété plongée Q_2' disjointes de Q_1. Le lecteur (très) courageux pourra écrire tous les détails.

Le lemme d'élimination des points doubles est donc établi si M orientable et m pair.

Si M n'est pas orientable, on choisit $(u_0, ..., u_{m-1})$ une base orthonormée TQ_1, $(v_0, ..., v_{m-1})$ une base orthonormée de TQ_2. Si $(u_0, ..., u_{m-1}, v_0, ..., v_{m-1})$ est directe en y_0 et indirecte en y_1 (ou l'inverse), la démonstration précédente s'applique sans changement, sinon il faut remplacer γ_2 par un arc γ_2' tel que $\gamma_1 \cup \gamma_2'$ renverse l'orientation dans M.

Si M est orientable et m impair et si $(u_0, ..., u_{m-1}, v_0, ..., v_{m-1})$ est directe en y_0 et indirecte en y_1 (ou l'inverse), la démonstration précédente s'applique sans changement. Sinon il faut choisir γ_1' et γ_2' comme sur le dessin. Ceci a pour effet d'inverser les u_i et les v_i en y_1 et donc d'inverser l'orientation de la base $(u_0, ..., u_{m-1}, v_0, ..., v_{m-1})$ en y_1.



□

4 Exercices

Exercice. 1. — Lemme de Whitney pour les sous-variétés. Si M et Q sont des sous-variétés compactes de $\mathbb{R}^n$ avec $m + q = n$ et telles que $M \cap Q \neq \emptyset$, alors une simple translation permet de séparer M et Q i. e. d'éliminer les points doubles. Ce n'est plus aussi simple si $\mathbb{R}^n$ est remplacé par une variété N quelconque : penser par exemple à un méridien et à une latitude d'un tore $\mathbb{T}^2$. En adaptant la démonstration du cours, montrer le résultat suivant.

Soient M et Q deux sous-variétés orientées compactes d'une variété orientée N simplement connexe avec $n = m + q$, $m \geq 3$, $q \geq 3$. On suppose que P et Q s'intersectent transversalement en deux points y et y' et que $(M, Q)_y = -(M, Q)_{y'}$. Alors il existe une isotopie envoyant Q sur une sous-variété $\tilde{Q}$ telle que $M \cap \tilde{Q} = \emptyset$.

On définira le type $(M, Q)_y$ d'un point double y dans ce cadre. On pourra aussi admettre que $\pi_1(G^{or}_{m+q-2,q-1}) = 0$.

Exercice. 2. — Soit M une variété compacte. Que dit le lemme de Whitney au sujet des zéros des champs de vecteurs sur M ? Que penser des hypothèses dimensionnelles ?

Exercice. 3. — Le but de cet exercice est de montrer que la parité des points doubles d'une immersions est invariante par homotopie régulière. Soit f_t une homotopie

régulière joignant deux immersions complètement régulières $f_0, f_1 : M \to \mathbb{R}^{2m}$.
a) Montrer que $\Phi : M \times [0,1] \to \mathbb{R}^{2m} \times [0,1]$, $\tilde{x} = (x,t) \mapsto (f_t(x), t)$ est une immersion.
b) Montrer que l'on peut supposer que Φ est telle que $\tilde{\mathcal{D}} = \{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \mid \tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2,\ \Phi(\tilde{x}_1) = \Phi(\tilde{x}_2)\}$ soit une sous-variété compacte (à bord) de $(M \times [0,1])^2$ de dimension 1.
c) Montrer que $\mathcal{D}(\Phi)$ est une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^{2m} \times [0,1]$.
d) On note $N(f) \in \mathbb{Z}_2$ le cardinal modulo 2 de $\mathcal{D}(f)$. Montrer que $N(f)$ est invariant par homotopie régulière, par conséquent, si f a un nombre impair de points doubles, elle n'est pas régulièrement homotope à un plongement.
e) On suppose que M ($m \geq 3$) est non orientable ou m impair. Montrer que $I(f) = 0 \iff f$ est régulièrement homotope à un plongement.

Exercice. 4. – Soit $\alpha : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{2m}$ définie par :

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - \frac{2}{x_1}, \quad & y_i &= x_i, & &\text{si } 2 \leq i \leq m \\ y_{m+1} &= \frac{1}{u}, & y_{m+i} &= \frac{x_1 x_i}{u}, & &\text{si } 2 \leq i \leq m \end{aligned}$$

avec $u = (1+x_1^2)...(1+x_m^2)$. Montrer que α est une immersion complètement régulière ayant un seul point double. En déduire qu'il existe une immersion complètement régulière $\beta_R : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{2m}$ telle que β_R ait un seul point double et que, hors de la boule $B(0,R) \subset \mathbb{R}^m$, β_R soit l'inclusion $\mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$.

5 Bibliographie

M. Adachi, *Embeddings and immersions*, Translations of the Mathematical Monographs, Vol. 124, American Mathematical Society, 1993.

M. Hirsch, *Differential Topology*, GTM, Springer-Verlag.

M. Freedman, F. Luo, *Selected Applications of Geometry to Low-dimensional Topology*, University Lecture Series, AMS (voir le § Disk theorem).