Leçon VII : Le h-principe

1 Relation différentielle

Définition. – Tout sous-ensemble $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$ est appelé une *relation différentielle.*

Dans ce cours, on ne considère que des relations différentielles $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$ qui sont des espaces total de fibrés sur $M \times N$. On a donc une projection $p : \mathcal{R} \to M \times N$ et des fibres $\mathcal{R}_{x,y} = p^{-1}(x, y) \in \mathcal{L}(T_xM, T_yN)$.

Exemple 1. – $M = \mathbb{S}^1$, $N = \mathbb{R}^2$, $J^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2)^*$. Une application $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ est une immersion si et seulement si $\gamma' \neq 0$, i. e., pour tout $x \in \mathbb{S}^1$:

$$j^1\gamma(x) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) =: \mathcal{I}.$$

L'espace $\mathcal{I}$ fibre trivialement sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$, c'est une relation différentielle dite *des immersions de* $\mathbb{S}^1$ *dans* $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2. – Soit $\mathcal{I} = \cup_{(x,y)\in M\times N}\mathcal{I}_{x,y} \subset J^1(M, N)$ avec :

$$\mathcal{I}_{x,y} = Mono(T_xM, T_yN).$$

L'espace $\mathcal{I}$ fibre sur $M \times N$, la fibre au dessus de (x, y) étant $\mathcal{I}_{x,y}$. Bien sûr, $f : M \to N$ est une immersion si et seulement si $j^1f \in \Gamma(\mathcal{I})$ et l'espace $\mathcal{I}$ est appelé la *relation différentielle des immersions de* M *dans* N.

Exemple 3. – Immersions dont l'application de Gauss est contrainte. Soit $A \subset Gr_{n,m}$ un sous-ensemble de la grassmannienne des m-plans de $\mathbb{R}^n$. On pose $\mathcal{R}_A = \cup_{(x,y)\in M\times\mathbb{R}^n}\mathcal{R}_{x,y} \subset J^1(M, \mathbb{R}^n)$ où

$$\mathcal{R}_{x,y} = \{L \in \mathcal{L}(T_xM, \mathbb{R}^n) \mid L(T_xM) \in A\}.$$

Une application $f : M \to \mathbb{R}^n$ est une immersion dont l'application de Gauss $G : M \to Gr_{n,m}$ est à valeur dans A si et seulement si $j^1f \in \Gamma(\mathcal{R}_A)$. En particulier, si $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2m} = \mathbb{C}^m$ et :

$A_\mathbb{C} = \{\Pi \in Gr_{2m,m} \mid i\Pi = \Pi\}$ alors $\mathcal{R}_{A_\mathbb{C}}$ est la relation différentielle des immersions *complexes*,

$A_{Lag} = \{\Pi \in Gr_{2m,m} \mid i\Pi \perp \Pi\}$ alors $\mathcal{R}_{A_{Lag}}$ est la relation différentielle des immersions *lagrangiennes*,

$A_{TR} = \{\Pi \in Gr_{2m,m} \mid i\Pi \cap \Pi = \{0\}\}$ alors $\mathcal{R}_{A_{TR}}$ est la relation différentielle des immersions *totalement réelles.*

Exemple 4. – Immersions isométriques. Soient (M, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes. On pose $\mathcal{I}_{iso} = \cup_{(x,y)\in M\times N}\mathcal{I}_{iso}(x, y)$ avec :

$$\mathcal{I}_{iso}(x, y) = MonoIso((T_xM, g_x), (T_yN, h_y)).$$

Alors $f : (M, g) \to (N, h)$ est isométrique si et seulement si $j^1 f \in \Gamma(\mathcal{I}_{iso})$.

Définition. – Une *solution* d'une relation différentielle $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$ est une application $f : M \to N$ telle que $j^1 f \in \Gamma(\mathcal{R})$.

On note $\mathcal{S}ol(\mathcal{R})$ l'espace des solutions de $\mathcal{R}$ (muni de la topologie induite par celle de $C^1(M, N)$) et $\Gamma(\mathcal{R})$ l'espace des sections de $\mathcal{R}$. On a une application :

$$\begin{array}{cccc} J : & \mathcal{S}ol(\mathcal{R}) & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{R}) \\ & f & \mapsto & j^1 f. \end{array}$$

Définition. – Une relation différentielle $\mathcal{R}$ satisfait au *h-principe* si pour toute section $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R})$, il existe une homotopie de sections $\sigma_t \in \Gamma(\mathcal{R})$ telle que $\sigma_0 = \sigma$ et $\sigma_1 \in J(\mathcal{S}ol(\mathcal{R}))$ (i. e. il existe $f : M \to N$ telle que $j^1 f = \sigma_1 \in \Gamma(\mathcal{R})$).

Cette définition équivaut à demander que l'application J induise une surjection au niveau du π_0 : $\pi_0(J) : \pi_0(\mathcal{S}ol(\mathcal{R})) \to \pi_0(\Gamma(\mathcal{R}))$.

Définition. – Une relation différentielle $\mathcal{R}$ satisfait au *h-principe 1-paramétrique* si $\mathcal{R}$ satisfait au h-principe et si pour toute famille de sections $\sigma_t \in \Gamma(\mathcal{R})$ telle que $\sigma_0 = j^1 f_0$ et $\sigma_1 = j^1 f_1$, il existe une homotopie $H : [0, 1]^2 \to \Gamma(\mathcal{R})$ telle que :

$$H(0, t) = \sigma_t,\ H(s, 0) = \sigma_0,\ H(s, 1) = \sigma_1,\ \text{et}\ H(1, t) = j^1 f_t.$$

Cette définition équivaut à demander que le groupe $\pi_1(\Gamma(\mathcal{R}), \mathcal{S}ol(\mathcal{R}))$ soit trivial. Ceci implique que l'application J induit une bijection au niveau du π_0 : $\pi_0(J) : \pi_0(\mathcal{S}ol(\mathcal{R})) \xrightarrow{\simeq} \pi_0(\Gamma(\mathcal{R}))$.

Définition. – Une relation différentielle $\mathcal{R}$ satisfait au *h-principe paramétrique* si $J : \mathcal{S}ol(\mathcal{R}) \to \Gamma(\mathcal{R})$ est une équivalence d'homotopie faible.

Notons que si M est compacte, $J^1(M, N)$ est métrisable, par conséquent une équivalence d'homotopie faible est une équivalence d'homotopie.

Exemple. – Les propositions qui permettent de démontrer le théorème de Whitney-Graustein montrent que la relation différentielle des immersions de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}^2$ satisfait au h-principe 1-paramétrique. Il n'est pas difficile, avec les mêmes idées, de montrer que cette relation différentielle satisfait en réalité au h-principe paramétrique.

2 Les théorèmes de Gromov

Action de $Diff(M)$ sur $J^1(M,N)$. – Soit $\varphi \in Diff(M)$, alors φ agit sur $J^1(M,N)$ par :

$$\varphi_*(x,y,L) = (\varphi(x), y, L \circ d\varphi^{-1}_{\varphi(x)}).$$

Si f est telle que $j^1 f(x) = (x, y, L)$ alors :

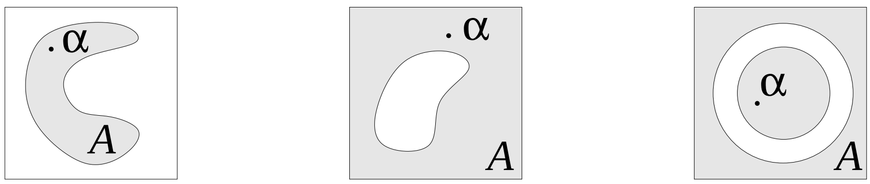
$$\varphi_*(j^1 f(x)) = (\varphi(x), f(x), df_x \circ d\varphi^{-1}_{\varphi(x)}) = j^1(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)).$$

Définition. – Une relation différentielle $\mathcal{R}$ est $Diff(M)$-*invariante* si pour tout $\varphi \in Diff(M)$, $\varphi_*(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

Parmi toutes les relations vues précédemment, seule la relation différentielle $\mathcal{I}$ des immersions est $Diff(M)$-invariante.

Amplitude d'une partie de $\mathbb{R}^n$. – Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, on note $Conv(A, \alpha)$ l'enveloppe convexe de la composante connexe de A qui contient α.

Définition. – Une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est *ample* si pour tout $\alpha \in A$ on a : $Conv(A, \alpha) = \mathbb{R}^n$. En particulier $A = \emptyset$ est ample.



A n'est pas ample, A est ample, A n'est pas ample.

Exemple. – Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, l'espace complémentaire $\mathbb{R}^n \setminus F$ est ample si et seulement si Codim $F \geq 2$.

Amplitude d'une relation $\mathcal{R} \subset J^1(M,N)$. – Localement $J^1(M,N)$ s'identifie à :

$$J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \prod_{i=1}^{m} \mathbb{R}^n,$$

où $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont des cartes de M et N. On note $(x, y, v_1, ..., v_m)$ un élément de $J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ et on pose :

$$J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp = \{(x, y, v_1, ..., v_{m-1})\},$$

ainsi $J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp \times \mathbb{R}^n$. On note $p^\perp$ la projection sur le premier facteur et $\mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}} \subset J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ l'image de $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$ par l'identification locale. Schématiquement, on a :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}} & \longrightarrow & J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \\ & & \downarrow p^\perp \\ & & J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp. \end{array}$$

Enfin, si $z \in J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp$, on pose : $\mathcal{R}_z = (p^\perp)^{-1}(z) \cap \mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$.

Définition. – Une relation différentielle $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$ est *ample* si pour toute identification locale $J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, et pour tout $z \in J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp$, $\mathcal{R}_z$ est ample dans $(p^\perp)^{-1}(z) \simeq \mathbb{R}^n$.

Remarque. – Evidemment, ca ne dépend pas de la carte choisie puisqu'on les prend toutes...

Proposition. – *La relation différentielle $\mathcal{I}$ des immersions de M^m dans N^n est ample si $n > m$.*

Démonstration. – Soit $J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \prod_{i=1}^m \mathbb{R}^n$ une représentation locale. Alors

$$(x, y, v_1, ..., v_m) \in \mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}} \iff (v_1, ..., v_m) \text{ est libre dans } \mathbb{R}^n.$$

Soit $z = (x, y, v_1, ..., v_{m-1}) \in J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp$.
1) Si $(v_1, ..., v_{m-1})$ sont linéairement indépendants alors :

$$\begin{array}{rcc} v_m \in (p^\perp)^{-1}(z) \text{ est dans } \mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}} & \iff & v_m \notin Vect(v_1, ..., v_{m-1}) =: \Pi \\ & \iff & v_m \in \mathbb{R}^n \setminus \Pi. \end{array}$$

Ainsi : $\mathcal{R}_z = \mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}} \cap (p^\perp)^{-1}(z) = \mathbb{R}^n \setminus \Pi$. Or la codimension de Π est $n - (m - 1) \geq 2$, donc $\mathcal{R}_z$ est ample.
2) Si $(v_1, ..., v_{m-1})$ sont liés alors $\mathcal{R}_z = \emptyset$ et donc $\mathcal{R}_z$ est ample. $\square$

Deux théorèmes assurant un h-principe. – Une variété est dite *fermée* si elle est compacte sans bord, elle est dite *ouverte* si aucune de ses composantes connexes n'est fermée. En particulier une variété connexe dont le bord est non vide est ouverte.

Théorème 1 (Gromov 69-71). – *Soit M une variété ouverte et $\mathcal{R}$ une relation différentielle ouverte et $Diff(M)$-invariante, alors $\mathcal{R}$ satisfait au h-principe paramétrique i.e.*

$$J : \mathcal{S}ol(\mathcal{R}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R})$$

est une équivalence d'homotopie faible.

Ce théorème est admis, en revanche la démonstration du prochain théorème occupera toute la leçon VIII.

Théorème 2 (Gromov 69-73). – *Si $\mathcal{R}$ est ouverte et ample, alors $\mathcal{R}$ satisfait au h-principe paramétrique i.e.*

$$J : \mathcal{S}ol(\mathcal{R}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R})$$

est une équivalence d'homotopie faible.

Remarque. – Ici, pas d'hypothèse sur la variété M.

3 Le théorème de Smale-Hirsch

Théorème de Smale-Hirsch. – *On suppose que $m < n$ ou, si $m = n$, que M est ouverte. L'application*

$$\begin{array}{rccc} J : & I(M,N) & \longrightarrow & Mono(TM,TN) = \Gamma(\mathcal{I}) \\ & f & \longmapsto & j^1 f \end{array}$$

est une équivalence d'homotopie faible.

Démonstration. – Il est immédiat de constater que $\mathcal{I} \subset J^1(M,N)$ est ouverte. On sait aussi qu'elle est $Diff(M)$-invariante et ample. Il suffit donc d'appliquer les théorèmes de Gromov. $\square$

Cas où M est parallélisable et $N = \mathbb{R}^n$. – Il y a un homéomorphisme (non naturel) entre l'espace des monomorphismes de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ et la variété de Stiefel $V_{n,m}$ des m-repères de $\mathbb{R}^n$. Etant donné un repère $(v_1, ..., v_m)$ de $\mathbb{R}^m$, on définit :

$$\begin{array}{ccc} Mono(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) & \longrightarrow & V_{n,m} \\ L & \longmapsto & (L(v_1), ..., L(v_m)). \end{array}$$

Puisque M est parallélisable, il existe un champ de repères global $(v_1, ..., v_m)$ sur M et un homéomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathcal{I}) & \longrightarrow & C^\infty(M, V_{n,m}) \\ \sigma & \longmapsto & (x \mapsto (\sigma_x(v_1(x)), ..., \sigma_x(v_m(x)))\,. \end{array}$$

Corollaire. – *Soit M parallélisable ($m \leq n$ ou $m = n$ et M ouverte) alors $I(M,N)$ est faiblement homotopiquement équivalent à $C^\infty(M, V_{n,m})$. En particulier toute variété parallélisable admet une immersion dans $\mathbb{R}^{m+1}$ ($\mathbb{R}^m$ si M est ouverte)et*

$$\pi_0(I(M,\mathbb{R}^n)) \simeq [M, V_{n,m}].$$

Démonstration. – En effet $C^\infty(M, V_{n,m})$ contient toujours les applications constantes et par conséquent n'est jamais vide. □

Remarque. – On avait déjà montré à la leçon II que si M admet une immersion dans $\mathbb{R}^m$ alors M est parallélisable.

Corollaire. – *Toute variété orientable de dimension 3 s'immerge dans $\mathbb{R}^4$ ($\mathbb{R}^3$ si ouverte).*

En effet, un peu de théorie homotopique montre que toute variété orientable de dimension 3 est parallélisable [1]

Corollaire. – *Soit M une variété presque parallélisable, alors $M \setminus \{pt\}$ admet une immersion dans $\mathbb{R}^m$.*

Cas où M est stablement parallélisable et $N = \mathbb{R}^{m+1}$. –

Corollaire. – *Si M est stablement parallélisable, M admet une immersion dans $\mathbb{R}^{m+1}$. De plus, $I(M,\mathbb{R}^{m+1})$ est faiblement homotopiquement équivalent à $C^\infty(M^m, SO(m+1))$, en particulier :*

$$\pi_0(I(M,\mathbb{R}^{m+1})) \simeq [M, SO(m+1)].$$

Remarque. – Dans la leçon II, on a établi une réciproque partielle au premier point puisque l'on a montré que si M orientable admet une immersion dans $\mathbb{R}^{m+1}$ alors M est stablement parallélisable. L'hypothèse orientable est indispensable, $\mathbb{R}P^2$ n'est pas stablement parallélisable et pourtant il existe des immersions de $\mathbb{R}P^2$ dans $\mathbb{R}^3$: la surface de Boy par exemple.

Démonstration. – Soit ϵ le fibré trivial $M \times \mathbb{R} \to M$ et ν_0 une section partout non nulle de ce fibré. Considérons :

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & Mono(TM, \mathbb{R}^{m+1}) & \longrightarrow & Mono_+(TM \oplus \epsilon, \mathbb{R}^{m+1}) \\ & L & \longmapsto & \tilde{L} \end{array}$$

[1] En fait toute variété de dimension trois s'immerge dans $\mathbb{R}^4$.

où $\tilde{L}$ est défini de la façon suivante. En un point $x \in M$, soit $(v_1, ..., v_m)$ un repère direct de T_xM, (rappelons que si M est stablement parallélisable alors M est orientable), on pose :

$\tilde{L}_x = L_x$ sur TM
$\tilde{L}_x(\nu_0)$ de norme 1 t. q. $(L_x(v_1), ..., L_x(v_m), \tilde{L}_x(\nu_0))$ soit directe dans $\mathbb{R}^{m+1}$.

Il est facile de vérifier que Φ est une équivalence d'homotopie. Puisque M est stablement parallélisable, $TM \oplus \epsilon$ est trivial et $Mono_+(TM \oplus \epsilon, \mathbb{R}^{m+1})$ est homotopiquement équivalent à $C^\infty(M, SO(m+1))$. $\square$

Paradoxe de Smale. – *L'inclusion standard* $i : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *est régulièrement homotope à* $r \circ i$ *où* r *est une réflexion de* $\mathbb{R}^3$.

Démonstration. – La sphère $\mathbb{S}^2$ est stablement parallélisable donc :

$$\pi_0(I(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)) \simeq [\mathbb{S}^2, SO(3)] \simeq \pi_2(SO(3))/\pi_1(SO(3)) = 0,$$

car $\pi_2(SO(3)) = 0$. $\square$

4 Exercices

Exercice 1. – La relation différentielle $y' = y$ dans $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfait-elle au h-principe ? Même question pour $y' = y^2$ (toujours dans $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

Exercice 2. – Soit $A_\delta = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \delta^2 < x_1^2 + x_2^2 < 4\}$ avec $0 < \delta \leq 1$.
a) Montrer qu'il existe une famille de fonctions $f_t : A \to \mathbb{R}$ telle que :
.$f_0(x_1, x_2) = -(x_1^2 + x_2^2)$,
.$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$,
.$grad\ f_t \neq 0$.
b) Essayer de construire cette famille explicitement (je n'y suis pas arrivé...)

Exercice 3. – Décrire $\pi_0(I(\mathbb{S}^1, \mathbb{T}^2))$.

Exercice 4. – Montrer que la relation différentielle des immersions totalement réelles $f : M \to \mathbb{C}^m$ vérifie le h-principe paramétrique. Déterminer $\pi_0(I_{TR}(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}^2))$.

Exercice 5. – Une application $f : M \to N$ est une *submersion* si, pour tout $x \in M$, $df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ est surjective, ceci implique en particulier $m \geq n$.
a) La relation différentielle des submersions est-elle ample ?
b) Montrer que si $f : M \to \mathbb{R}^n$ est une submersion alors M est ouverte.
c) Les submersions de M dans $\mathbb{R}^n$ vérifient-elle un h-principe ?

Exercice 6. – Montrer que toute variété presque parallélisable de dimension 7 s'immerge dans $\mathbb{R}^8$, ainsi, pour cette dimension : $PP_7 = SP_7$.

Exercice 7. – Montrer que si M est presque parallélisable alors $M\sharp M$ s'immerge dans $\mathbb{R}^{m+1}$.

Exercice 8. – On suppose $m > 1$ impair. Quel(s) invariant(s) classifie(nt) les immersions de $\mathbb{S}^m$ dans $\mathbb{R}^{2m}$?

Exercice 9. – a) Montrer que si il existe un fibré vectoriel ν de rang r sur M tel que $TM \oplus \nu$ soit isomorphe au fibré trivial ϵ^{n+r} de rang $n+r$, alors M s'immerge dans $\mathbb{R}^{m+r}$. Réciproque.
b) On admet la règle de simplification des sommes directes de fibrés vectoriels :

$$\xi_1 \oplus \eta \simeq \xi_2 \oplus \eta \quad \Rightarrow \quad \xi_1 \simeq \xi_2,$$

à condition que $rang(\xi_1) = rang(\xi_2) = k > m =$ dimension de la base.
On suppose qu'il existe une immersion $f : M \to \mathbb{R}^{n+r}$ $(n \geq m+1)$ ainsi que r sections du fibré normal à f, $(\nu_1, ..., \nu_r)$, linéairement indépendantes en chaque point. Montrer que M s'immerge dans $\mathbb{R}^n$.
c) Montrer que $\mathbb{R}P^7$ s'immerge dans $\mathbb{R}^8$ et $\mathbb{R}P^4$, $\mathbb{R}P^5$, $\mathbb{R}P^6$ dans $\mathbb{R}^7$. (On ne peut pas faire mieux, on montre que les dimensions de l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^n$ sont les plus basses possibles).

5 Bibliographie

M. Adachi, *Embeddings and immersions*, Translations of the Mathematical Monographs, Vol. 124, American Mathematical Society, 1993.

Y. Eliahsberg et N. Mishachev, *Introduction to the h-principle*, GSM, AMS.

M. Gromov, *Partial Differential Relations*, Springer-Verlag, 1986.

M. Hirsch, *Differential Topology*, GTM, Springer-Verlag.

D. Spring, *Convex Integration Theory*, Monographs in Mathematics, Vol. 92, Birkhäuser Verlag, 1998.