Leçon VI : Premiers résultats sur le π_0 des espaces d'immersions et de plongements

1 Homotopie régulière et isotopie

Soient $f_0, f_1 : M \to N$ deux plongements, rappelons qu'une isotopie joignant f_0 à f_1 est une application C^∞ $F : M \times [0,1] \to N$, $F_s(x) = F(x,s)$ telle que $F_0 = f_0$, $F_1 = f_1$ et chaque F_s est un plongement. La relation d'isotopie est une relation d'équivalence et les classes d'équivalence s'identifient aux composantes connexes par arcs de l'espace des plongements $E(M,N)$). De même les classes d'équivalence de la relation d'homotopie régulière s'identifient aux composantes connexes par arcs de l'espace des immersions $I(M,N)$.

Théorème. − *1) Si* $2m+1 \leq n$, *alors* $\pi_0(I(M,\mathbb{R}^n)) = 0$.
2) Si $2m+2 \leq n$, *alors* $\pi_0(E(M,\mathbb{R}^n)) = 0$.

Démonstration. − 1) Soient $f_0, f_1 : M \to \mathbb{R}^n$ deux immersions quelconques et $f_t = (1-t)f_0 + tf_1$ une homotopie joignant f_0 à f_1. On pose :

$$\begin{array}{rccc} F : & M \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \times I \\ & (x,t) & \longmapsto & (f_t(x), t). \end{array}$$

Notons que F est une immersion sur $M_\epsilon = M \times [0,\epsilon[\cup M \times]1-\epsilon, 1]$ pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit. Puisque $n+1 \geq 2(m+1)$, on peut perturber F de façon C^∞-petite en $\tilde{F}$ telle que :
.$\tilde{F}$ soit une immersion sur $M \times [0,1]$,
.$\tilde{F} \equiv F$ sur $M_{\epsilon/2}$.
L'application $\tilde{F}$ est de la forme $(x,t) \mapsto (\tilde{f}_t(x), \alpha_x(t))$ où $\alpha_x(t) = \alpha(x,t)$ est C^∞-proche de $(x,t) \mapsto t$ et par conséquent $t \mapsto \alpha_x(t)$ est strictement croissante. Bien sûr $\alpha_x(t) = t$ si $t \in [0,\epsilon/2[\cup]1-\epsilon/2, 1]$. Par conséquent $(x,t) \mapsto \tilde{f}_{\alpha_x^{-1}(t)}(x)$ est une homotopie régulière qui joint f_0 à f_1.
2) Démonstration similaire. □

Théorème de Wu (1958). − Soit M connexe $(m > 1)$ alors :

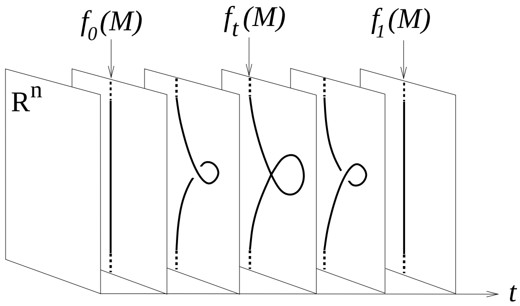
$$\pi_0(E(M,\mathbb{R}^{2m+1})) = 0.$$

Remarques. − 1) Si $m = 1$, la détermination de $\pi_0(E(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^3))$ est l'objectif de la théorie des noeuds.
2) Si M n'est pas connexe, $\pi_0(E(M, \mathbb{R}^{2m+1})) \neq 0$ en général.
3) Le résultat "similaire" pour les immersions est inexact, même si la variété M est connexe, l'espace $I(M, \mathbb{R}^{2m})$ peut ne pas être connexe.

Démonstration du théorème de Wu. − Soient $f_0, f_1 : M \to \mathbb{R}^{2m+1}$ deux plongements, puisque $\pi_0(I(M, \mathbb{R}^{2m+1})) = 0$, il existe une homotopie régulière f_t joignant f_0 à f_1. On pose :

$$\begin{array}{rccc} F: & M \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2m+1} \times [0,1] \\ & (x,t) & \longmapsto & (f_t(x), t). \end{array}$$

L'application F est une immersion de $M \times [0,1]$ dans $\mathbb{R}^{2m+1} \times [0,1]$, on peut toujours supposer que cette immersion est complètement régulière. Si les points doubles ne s'apparient pas par paire de types opposés, on remplace F localement par des immersions de D^{m+1} dans $\mathbb{R}^{2m+1} \times [0,1]$ ayant chacune un point double de type convenable, afin d'obtenir une nouvelle immersion $\tilde{F}$ ayant des points doubles s'appariant deux à deux. Il n'est pas clair que l'on puisse réaliser ce programme en gardant $\tilde{F}$ sous la forme $\tilde{F}(x,t) = (\tilde{f}_t(x), t)$. La suite de dessins ci-dessous montre comment rajouter un point double en respectant cette condition.



On applique ensuite sur $\tilde{F}$ le lemme d'élimination des points doubles de Whitney. □

2 Immersions du cercle dans $\mathbb{R}^2$

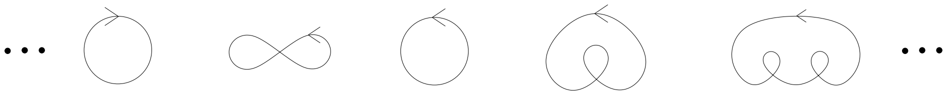
On munit $\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{R}^2$ d'une orientation. Si $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ est une immersion alors son application tangente fournit une application $\gamma' : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{R} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dont on peut calculer le nombre de tours $N(\gamma')$. Rappelons que :

$$N(\gamma') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} (\gamma')^* \left(\frac{xdy - ydx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \in \mathbb{Z}.$$

On définit l'indice $I(\gamma)$ de γ comme étant le nombre de tours $N(\gamma')$, puisque $I(\gamma)$ est clairement invariant par homotopie régulière, on a une application :

$$\begin{array}{rccc} I: & \pi_0(I(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^2)) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & [\gamma] & \longmapsto & I(\gamma). \end{array}$$

Cette application est surjective comme le montre l'examen des exemples ci-dessous :



$I(\gamma)=-1$ $\quad I(\gamma)=0$ $\quad I(\gamma)=1$ $\quad I(\gamma)=2$ $\quad I(\gamma)=3$

Le point important est que cette application est en réalité une bijection.

Théorème de Whitney-Graustein (1937). – *On a :* $\pi_0(I(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^2))\simeq\mathbb{Z}$, *l'identification étant donnée par l'indice.*

Démonstration du théorème de Whitney-Graustein. – Il suffit d'établir l'injectivité de I. Soient γ_0,γ_1 telle que $N(\gamma_0')=N(\gamma_1')$, d'après le théorème de Hopf, il existe une homotopie

$$\sigma_t:\mathbb{S}^1\longrightarrow\mathcal{R}$$

telle que $\sigma_0=\gamma_0'$ et $\sigma_1=\gamma_1'$. L'idée serait d'intégrer cette homotopie pour obtenir une homotopie régulière joignant γ_0 à γ_1. Malheureusement

$$s\overset{\Gamma_t}{\longmapsto}\int_0^s\sigma_t(u)du$$

n'est pas une courbe fermée en général. Nous dirons que σ_t est *holonomique* (ou parfois plus simplement "intégrable") précisément quand la courbe Γ_t est fermée. La stratégie de la démonstration est de pertuber σ_t jusqu'à n'obtenir que des courbes intégrables.

Proposition 1. – *Soit* $\sigma_t:\mathbb{S}^1\to\mathcal{R}$ *joignant* γ_0' *à* γ_1', *il existe une application :*

$$\begin{array}{rccc} \Sigma: & [0,1]\times[0,1] & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{S}^1,\mathcal{R}) \\ & (t,s) & \longmapsto & \Sigma_{t,s} \end{array}$$

telle que $\Sigma_{t,0}=\sigma_t$, $\Sigma_{0,s}=\gamma_0$, $\Sigma_{1,s}=\gamma_1$ *et* $\Sigma_{t,1}$ *est holonomique.*

Cette proposition implique le théorème puisque

$$\gamma_t(s)=\int_0^s\Sigma_{t,1}(u)du$$

fournit une homotopie régulière joignant γ_0 à γ_1. Considérons d'abord une proposition plus simple.

Proposition 2. – *Soit $\sigma : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{R}$, il existe une homotopie $\sigma_t : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{R}$, telle que $\sigma_0 = \sigma$ et σ_1 soit holonomique.*

Démonstration de la proposition 2. – Quitte à effectuer une première homotopie radiale, on peut toujours supposer que $\sigma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, on peut en outre supposer que σ n'est pas une application constante. Soit $V = \int_0^1 \sigma(u)du$ (on a identifié $\mathbb{S}^1$ à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Puisque D^2 est convexe, $V \in int(D^2)$ et l'homotopie $\sigma_t = \sigma - tV$ convient. $\square$

Une version à paramètre de ce raisonnement permet d'obtenir la proposition 1, elle est laissée au lecteur. $\square$

3 Plongements du cercle dans $\mathbb{R}^2$

Théorème. – *On a : $\pi_0(E(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)) = \mathbb{Z}_2$. Plus précisément tout plongement $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ est isotope à l'inclusion standard $i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ si $I(\gamma) = 1$ ou à $r \circ i$ où r est une réflexion de $\mathbb{R}^2$ si $I(\gamma) = -1$.*

Démonstration. – On va montrer ce théorème en admettant un certain nombre de théorèmes intermédiaires qui seront démontrés ensuite. Notons déjà que $I(i) = 1$, $I(r \circ i) = -1$ donc i et $r \circ i$ ne sont pas régulièrement homotopes ce qui implique qu'ils ne sont pas isotopes.

Théorème de Jordan (version C^∞). – *Soit $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ un plongement alors $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma(\mathbb{S}^1)$ est une union de deux variétés A, B connexes ouvertes dont l'une est bornée et difféomorphe à un disque ouvert et l'autre est non-bornée. De plus $\partial\overline{A} = \partial\overline{B} = \gamma(\mathbb{S}^1)$.*

Notons A la composante bornée de $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma(\mathbb{S}^1)$ et $g : D^2 \to \overline{A} \subset \mathbb{R}^2$ un difféomorphisme qui préserve l'orientation. L'application $g_{|\partial D^2} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ est un plongement de $\mathbb{S}^1$ dont l'image est $\gamma(\mathbb{S}^1)$. Soit $\varphi = \gamma \circ (g_{|\partial D^2})^{-1} : \gamma(\mathbb{S}^1) \to \gamma(\mathbb{S}^1)$, φ est un difféomorphisme de $\gamma(\mathbb{S}^1)$ et on a $\gamma = \varphi \circ g_{|\partial D^2}$.

Théorème "$\Gamma_2 = 0$". – *Tout difféomorphisme de $\mathbb{S}^1$ s'étend en un difféomorphisme de D^2.*

Ainsi il existe $\tilde{\varphi} : \overline{A} \to \overline{A}$ tel que $f := \tilde{\varphi} \circ g : D^2 \to \overline{A}$ prolonge $\gamma : \mathbb{S}^1 = \partial D^2 \to \gamma(\mathbb{S}^1) = \partial\overline{A}$.

Théorème d'isotopie des disques. – *Soient $f, g : D^2 \to \mathbb{R}^2$ deux plonge-*

ments, alors f et g sont isotopes si et seulement si f et g préservent tous les deux l'orientation ou la renverse tous les deux.

Ainsi g est isotope à l'inclusion standard $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ et f est isotope soit à g soit à $r \circ g$ selon que $\tilde{\varphi}$ préserve ou renverse l'orientation. $\square$

Démonstration du théorème de Jordan. − La projection stéréographique π réalise un difféomorphisme entre $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ et $\mathbb{R}^2$. Il est équivalent de montrer que $f = \pi^{-1} \circ \gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$ sépare $\mathbb{S}^2$ en deux disques ouverts. D'après l'exercice 4 de la leçon III, on sait déjà que $\mathbb{S}^2 \setminus f(\mathbb{S}^1) = A \cup B$ où A et B sont deux sous-variétés connexes, orientables puisque $\mathbb{S}^2$ l'est, et vérifiant $\partial\overline{A} = \partial\overline{B} = f(\mathbb{S}^1)$. Reste à montrer que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont difféomorphes à des disques fermés. La suite exacte de Mayer-Vietoris s'écrit (cœfficients dans $\mathbb{Z}$) :

$$\to H_2(\overline{A}) \oplus H_2(\overline{B}) \to H_2(\mathbb{S}^2) \to H_1(\mathbb{S}^1) \to H_1(\overline{A}) \oplus H_1(\overline{B}) \to H_1(\mathbb{S}^2) \to$$

soit encore :

$$\cdots \to 0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to X \to 0 \to \cdots$$

et par conséquent $X \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec $p \geq 1$. Or d'après la classification des variétés orientables de dimension 2 et dont le bord est le cercle $\mathbb{S}^1$, $H_1(\overline{A})$ et $H_1(\overline{B})$ sont doivent être libres, ceci impose $X = 0$ (i. e. $p = 1$) et donc $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont des disques fermés. $\square$

Démonstration du théorème "$\Gamma_2 = 0$". − On identifie $Diff_+(\mathbb{S}^1)$ avec :

$$\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \varphi(x+1) = \varphi(x) + 1 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) > 0\}.$$

Soit $\varphi \in Diff_+(\mathbb{S}^1)$, alors pour tout $t \in [0,1]$, on a $\varphi_t = tx + (1-t)\varphi \in Diff_+(\mathbb{S}^1)$. En effet : $\varphi'_t = t + (1-t)\varphi' > 0$ et $\varphi_t(x+1) = \varphi_t(x) + 1$. Donc tout difféomorphisme de $\mathbb{S}^1$ préservant l'orientation est isotope à l'identité. Si φ renverse l'orientation alors $r \circ \varphi$ la conserve et par conséquent est isotope à l'identité. Donc φ est isotope à $r \circ id = r$ puisque $r^2 = id$.
Si $\varphi \in Diff_+(\mathbb{S}^1)$, on prolonge φ à tout D^2 de la manière suivante. Soit $\alpha : [0,1] \to [0,1]$ une fonction plateau telle que $\alpha \equiv 0$ sur $[0, \epsilon[$ et $\alpha \equiv 1$ sur $]1-\epsilon, 1]$. On pose :

$$\begin{array}{rccl} \tilde{\varphi}: & D^2 & \longrightarrow & D^2 \\ & \rho e^{i\theta} & \longmapsto & \begin{cases} \rho e^{i\theta} & \text{si } \rho \leq 1/2, \\ \rho \varphi_{\alpha(2-2\rho)}(e^{i\theta}) & \text{si } 1 \geq \rho \geq 1/2, \end{cases} \end{array}$$

où φ_t est l'isotopie précédente. On prolonge similairement si $\varphi \in Diff_-(\mathbb{S}^1)$.
$\square$

Démonstration du théorème d'isotopie des disques. $-$ Soit $f : D^2 \to \mathbb{R}^2$ un plongement, quitte à effectuer une translation, on peut toujours supposer que $f(0) = 0$. L'isotopie définie par :

$$f_t(x) = \begin{cases} \dfrac{f(tx)}{t} & \text{si } 0 < t \leq 1, \\ df_0(x) & \text{si } t = 0, \end{cases}$$

joint f à un plongement linéaire. Or le groupe linéaire $Gl(2, \mathbb{R})$ a deux composantes connexes... $\square$

Une remarque sur la dénomination : théorème "$\Gamma_2 = 0$". $-$ Tout difféomorphisme du disque D^{m+1} donne par restriction un difféomorphisme de $\mathbb{S}^m$. On définit ainsi un morphisme de groupe :

$$\rho : Diff(D^{m+1}) \longrightarrow Diff(\mathbb{S}^m).$$

On montre que $\rho(Diff(D^{m+1}))$ est un sous-groupe normal de $Diff(\mathbb{S}^m)$, de là l'idée naturelle de considérer le groupe quotient :

$$\Gamma_{m+1} = Diff(\mathbb{S}^m)/\rho(Diff(D^{m+1})) = Diff_+(\mathbb{S}^m)/\rho(Diff_+(D^{m+1})).$$

Le théorème "$\Gamma_2 = 0$" dit justement que $\Gamma_2 = 0$. On montre, mais c'est une longue histoire, que $\Gamma_m = 0$ si $m \leq 6$ mais $\Gamma_7 = \mathbb{Z}_{28}$. Tous les Γ_m sont finis mais ils peuvent être "gros" quand même, par exemple Γ_{31} a plus de 16 millions d'éléments.

Une remarque sur le théorème de Jordan. $-$ La généralisation du théorème de Jordan s'appelle le théorème de Schoenflies, sa démonstration est hors de la portée de ce cours :

Théorème de Schoenflies (version C^∞). $-$ *Soit $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ un plongement C^∞, alors $\mathbb{R}^{m+1} \setminus f(\mathbb{S}^m)$ est une union de deux variétés A, B connexes, ouvertes dont l'une est bornée et difféomorphe au disque ouvert D^{m+1} et l'autre est non bornée. De plus $\partial\overline{A} = \partial\overline{B} = f(\mathbb{S}^m)$.*

4 Un petit complément : la difféotopie

Définition. $-$ Une application C^∞ $F : M \times I \to M$ telle que $F_0 = id_M$ et telle que chaque F_t soit un difféomorphisme de M est appelée une *difféotopie.*

Il y a un lien entre les difféotopies et les champs de vecteurs X sur $M \times I$. Si $F : M \times I \to M$ est une difféotopie, on note :

$$\begin{array}{rccc} \hat{F} : & M \times I & \longrightarrow & M \times I \\ & (x, t) & \longmapsto & (F_t(x), t) \end{array}$$

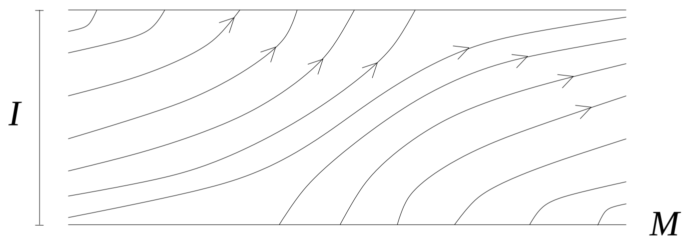
et on définit un champ de vecteurs X_F sur $M \times I$ par :

$$X_F(x,t) = \frac{\partial \hat{F}}{\partial t}(\hat{F}^{-1}(x,t)) = (\frac{\partial \hat{F}}{\partial t}(F_t^{-1}(x)), 1),$$

ou encore :

$$X_F(F(x,t),t) = \frac{\partial \hat{F}}{\partial t}(x,t).$$

Par conséquent $X_F(x,t)$ s'écrit sous la forme $(H(x,t),1)$ où $H : M \times I \to TM$ est un champ de vecteurs sur M dépendant du temps. Notons que, réciproquement, un champ de vecteurs quelconques sur M dépendant du temps ne fournit pas forcément, par intégration, une difféotopie $F : M \times I \to M$, le dessin ci-dessous permet de comprendre pourquoi :



Proposition. – *On munit M d'une métrique complète, soit $H : M \times I \to TM$ un champ de vecteurs sur M dépendant du temps. On suppose que H est borné (i. e. $\exists K > 0$ tel que $\forall\ (x,t) \in M \times I$, $|H(x,t)| \leq K$), alors, par intégration, H génère une unique difféotopie F_H de M.*

Démonstration. – Il s'agit de résoudre :

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = H_F(F(x,t),t)$$

avec la condition initiale : $F(x,0) = x$. Soit $X : M \times I \to T(M \times I)$ le champ de vecteurs $X(x,t) = (H(x,t),1)$. La projection sur I d'une courbe solution de X est de la forme $y \mapsto y + t$, donc les courbes solutions de X n'existent que pour des temps $0 \leq t \leq 1$. Puisque $|H(x,t)| \leq K$, les courbes solutions de X sont de longueur finie et puisque M est complète, ces courbes sont des fermées. Les points extrêmes des trajectoires sont sur $M \times \{0\}$ et $M \times \{1\}$ (sinon on pourrait prolonger). Par conséquent, pour tout $x \in M$, il y a une unique solution de la forme $t \mapsto (F(x,t),t)$, $0 \leq t \leq 1$, ce qui fournit l'isotopie F. $\square$

Théorème. – *Soient M compacte, $m < n$, et $f_t : M \to N$ une isotopie, alors il existe une difféotopie F_t de N telle que $f_t = F_t \circ f_0$.*

Démonstration. – On note $V = f_0(M)$ et on définit :

$$\begin{array}{rccc} \hat{F}: & V \times I & \longrightarrow & N \times I \\ & (x,t) & \longmapsto & (f_t \circ f_0^{-1}(x), t) \end{array}$$

et X le champ de vecteurs sur $\hat{F}(V \times I)$ donné par :

$$X(\hat{F}(x,t)) = \frac{\partial \hat{F}}{\partial t}(x,t)$$

et que l'on écrit sous la forme : $X(\hat{F}(x,t)) = H((x,t),t)$. Au moyen du théorème du voisinage tubulaire et d'une partition de l'unité, on peut étendre H en un champ de vecteurs $\tilde{X}$ sur $N \times I$ à support dans un voisinage tubulaire de $\hat{F}(V \times I)$. Le champ $\tilde{X}$ est donc borné, la proposition précédente fournit la difféotopie. □

5 Exercices

Exercice. 1. – Calculer $\pi_0(E(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^2))$.

Exercice. 2. – Montrer que $\pi_0(I(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^2)) = \mathbb{Z}_2$.

Exercice. 3. – a) Soit $f : M \to \mathbb{R}^{m+1}$ un plongement de M compacte orientée. Montrer que l'une des deux composantes de $\mathbb{R}^{m+1} \setminus f(M)$ est bornée (cf l'exercice 4 de la leçon III), on la note A.
b) Soit $x \in M$ et $(v_1, ..., v_m)$ une base directe de T_xM. On pose :

$$Or(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } (N_{f(x)}, df_x(v_1), ..., df_x(v_m)) \text{est directe,} \\ -1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $N_{f(x)}$ est une normale unitaire "sortante" de $\bar{A}$ en $f(x)$. Montrer que $Or(f)$ est invariant par isotopie.
c) Pour quelle(s) valeur(s) de m l'inclusion standard $i : \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ est-elle isotope au plongement antipodal $g = -i$?

Exercice. 4. – 1) Montrer que si M est compacte alors $Diff(M) = E(M, M)$.
2) On admet que si $n \geq 6$, $\pi_0(Diff(D^n))$ n'a que deux classes selon que l'orientation est renversée ou non (ce résultat difficile est dû à J. Cerf).

i) Montrer que si $m \geq 5$, $\pi_0(E(\mathbb{S}^m, \mathbb{S}^m)) = \{-1, 1\} \oplus \Gamma_{m+1}$.

ii) Montrer que $\pi_0(E(\mathbb{S}^m, \mathbb{R}^{m+1})) = \{-1, 1\} \oplus \Gamma_{m+1}$.

Suggestion. – Utiliser sans vergogne les remarques du cours.

6 Bibliographie

M. Adachi, *Embeddings and immersions*, Translations of the Mathematical Monographs, Vol. 124, American Mathematical Society, 1993.

M. Hirsch, *Differential Topology*, GTM, Springer-Verlag.