Leçon III : Transversalité

1 Définitions

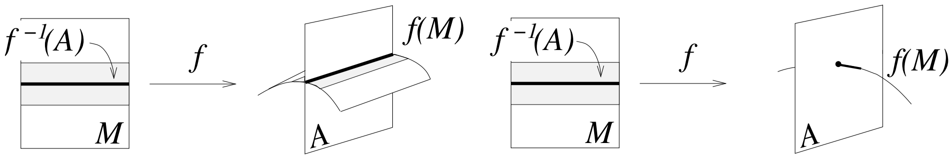
Transversalité entre sous-variétés.– Soient A et B deux sous-variétés de N, on dit que A est *transverse* à B et on note $A \pitchfork B$ si pour tout $x \in A \cap B$ on a : $T_xA + T_xB = T_xN$.

Transversalité d'une application sur une sous-variété.– Soient $f : M \to N$ et A une sous-variété de N, on dit que f est *transverse* sur A et on note $f \pitchfork A$ si pour tout $x \in f^{-1}(A)$ on a : $T_{f(x)}A + df_x(T_xM) = T_{f(x)}N$.
Si $m + a < n$, cela signifie que $f(M)$ et A ne se rencontrent pas. Si $A = \{y\}$, cela signifie soit que $f^{-1}(y)$ est vide, soit que f est une submersion aux points $f^{-1}(y)$. Si $f \pitchfork \{y\}$, on dit que y est une *valeur régulière* de f.

Propriété.– Si $f \pitchfork A$ alors $f^{-1}(A)$ est une sous-variété de M de dimension $m - n + a$ si elle est non vide. De plus df induit un isomorphisme entre les fibrés normaux :

$$Nf^{-1}(A) = TM/Tf^{-1}(A) \xrightarrow{df} f^*(TN/TA).$$

La démonstration de cette propriété se résume à appliquer le théorème d'inversion local.



Propriété.– Si M est compacte, la transversalité est une propriété *stable* dans la topologie C^1. Autrement dit, si $f \pitchfork A$, il existe $\epsilon > 0$ tel que : $\|\tilde{f} - f\|_{C^1} \leq \epsilon \Rightarrow \tilde{f} \pitchfork A$.

La démonstration de cette propriété se résume en une phrase : la condition de transversalité est ouverte.

2 Le théorème de Sard

Le théorème de Sard (obtenu par Morse et Sard) est à la base des théorèmes de transversalité de Thom. Pour des questions de temps, nous l'admettons. On trouvera une démonstration dans l'ouvrage de Hirsch ou celui de Laudenbach (cf § Bibliographie).

Théorème (Morse 1939, Sard 1942).– *Soit* $f : M \xrightarrow{C^\infty} N$. *Alors presque tout point de* N *est une valeur régulière de* f. *En particulier l'ensemble des valeurs régulières est dense.*

Bien que les variétés M et N ne soient pas mesurées, il y a un sens précis aux termes "presque tout point." En effet sur chaque carte, on a la mesure de Lebesgue, les changements de cartes ne préservent pas la mesure mais ils envoient les ensembles de mesure de Lebesgue nulle sur des ensembles de mesure de Lebesgue nulle. Notons qu'une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle car cela est vrai sur les cartes.

On dit que "*presque tout point vérifie une propriété* $\mathcal{P}$" si l'ensemble des points de M qui ne la vérifie pas est de mesure nulle.

3 Les théorèmes de Thom (1954-1956)

Soit P un espace de paramètres (= une variété) et $F : M \times P \to N$ une famille d'applications.

Théorème de transversalité dans une famille. – *Soit* A *une sous-variété de* N. *On supppose que* F *est transverse sur* A. *Alors pour presque tout* $p \in P$, $F_p = F_{|M\times\{p\}}$ *est transverse sur* A.

Démonstration. – La préimage $S = F^{-1}(A)$ est une sous-variété de $M \times P$. Soit $\pi : S \to P$ la projection naturelle. D'après le théorème de Sard appliqué à π, presque tout $p \in P$ est une valeur régulière de π, c'est-à-dire :

$$\forall (x,p) \in \pi^{-1}(p),\ d\pi_{(x,p)}(T_{(x,p)}S) = T_pP$$

$$\Longleftrightarrow$$

$\forall x \in M$ tel que $(x,p) \in S$: $T_xM + T_{(x,p)}S = T_{(x,p)}(M \times P) = T_xM \oplus T_pP.$

Cette dernière ligne signifie que $M \times \{p\} \pitchfork S$ (pour presque tout $p \in P$). En particulier :

$$dF_{(x,p)}(T_xM \oplus T_pP) = dF_{(x,p)}(T_xM + T_{(x,p)}S).$$

Par hypothèse $F \pitchfork A$, i. e.

$$dF_{(x,p)}(T_xM \oplus T_pP) + T_{F(x,p)}A = T_{F(x,p)}N,$$

or $dF_{(x,p)}(T_{(x,p)}S) \subset T_{F(x,p)}A$, donc :

$$\begin{aligned} dF_{(x,p)}(T_xM \oplus T_pP) + T_{F(x,p)}A &= dF_{(x,p)}(T_xM + T_{(x,p)}S) + T_{F(x,p)}A, \\ &= dF_{(x,p)}(T_xM) + T_{F(x,p)}A. \end{aligned}$$

Ceci revient à écrire la transversalité de F_p avec A (pour presque tout p) puisque :

$$F_p \pitchfork A \iff \forall (x,p) \in S, \quad dF_p(T_xM) + T_{F_p(x)}A = T_{F_p(x)}N.$$

□

Théorème de transversalité locale. − *Soit $f : M \to N$, $A \subset N$ une sous-variété et $x_0 \in M$. On suppose en outre que A est un fermé de N. Alors il existe un voisinage compact K de x_0 et un voisinage ouvert $W(f) \subset C^\infty(M,N)$ de f tel que :*

$$\{g \in W(f) \mid g \pitchfork_K A\} \text{ est un ouvert dense de } W(f).$$

Remarque. − La notation $g \pitchfork_K A$ se lit "*g est transverse sur A le long de K*" c'est-à-dire :

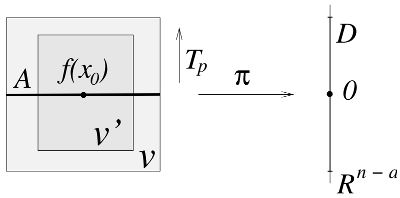
$$\forall x \in g^{-1}(A) \cap K \ : T_{g(x)}A + dg_x(T_xM) = T_{g(x)}N.$$

Démonstration. − 1) Si $f(x_0) \notin A$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de $f(x_0)$ tel que $\mathcal{V} \cap A = \emptyset$ car A est un fermé. La préimage $\mathcal{U} = f^{-1}(\mathcal{V})$ est un voisinage ouvert de x_0. On peut choisir à l'intérieur un voisinage compact K de x_0 tel que $f(K) \cap A = \emptyset$. Soit

$$W(f) = \{g : M \to N \mid g(K) \cap A = \emptyset\}.$$

C'est un ouvert, si $g \in W(f)$ la distance (mettre une métrique arbitraire) entre $g(K)$ (compact) et A (fermé) donne l'ordre de grandeur de la pertubation admissible en topologie C^0. Bien sûr tous les éléments de $W(f)$ sont transverses sur A le long de K.

2) Si $f(x_0) \in A$. Soit $\mathcal{V}$ une carte de N au voisinage de $f(x_0)$ linéarisante pour A. Soit $\pi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^{n-a}$ la projection telle que $A \cap \mathcal{V} = \pi^{-1}(0)$. On suppose en outre que $\mathcal{V} = A \times D$ où D est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{n-a}$. On note T_p la translation de vecteur p sur la deuxième coordonnée.



Soit $\mathcal{V}'$ un rétrécissement ouvert de $\mathcal{V}$ contenant $f(x_0)$, $\overline{\mathcal{V}'} \subset \mathcal{V}$. Soit $\mathcal{U}$ un voisinage de x_0 tel que $f(\overline{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{V}'$, $\overline{\mathcal{U}}$ compact et $K \subset \mathcal{U}$ un voisinage compact de x_0. On pose :

$$W(f) = \{g : M \to N \mid g(\overline{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{V}'\}.$$

Il est clair que :

- $W(f)$ est un ouvert pour la topologie C^0 et donc C^∞,
- la partie de $W(f)$ formée des applications transverses sur A le long de K est un ouvert en topologie C^1 car la condition de transversalité est ouverte en topologie C^1.

Le plus difficile est de montrer que les éléments de $W(f)$ qui sont transverses sur A le long de K forment une partie dense de $W(f)$. L'idée est de construire une famille $G : M \times P \to N$ où l'espace des paramètres est une boule centrée en O dans D et où $G(.,p)$ est la translation dans la direction p ("orthogonale" à A). L'espace P est juste assez gros pour obtenir la transversalité de la famille sans effort. Puis on applique le théorème de transversalité dans une famille : pour presque toute valeur du paramètre, $G(.,p)$ est transverse à A le long de K. En faisant $p \to 0$, on obtient des $G(.,p)$ transverses à A le long de K aussi proche que l'on désire (en topologie C^0) de g. D'où la densité. Voici maintenant quelques détails. On choisit $P = B(0,\epsilon) \subset D$ avec $\epsilon > 0$ tel que $\forall\ |p| < \epsilon$, $T_p(g(\overline{\mathcal{U}})) \subset V$ et une fonction cloche α à support dans $\mathcal{U}$ et valant 1 sur K. On pose :

$$\begin{array}{ll} G(x,p) = g(x) & \text{si } x \notin \mathcal{U} \\ G(x,p) = T_{\alpha(x)p}(g(x)) & \text{si } x \in \mathcal{U}. \end{array}$$

On a : $\pi \circ G(x,p) = \pi \circ g(x) + p$ si $(x,p) \in K \times P$, ce qui montre que $\pi \circ G$ est de rang maximum. $\square$

On note $\pitchfork_K(M,N,A) = \{f : M \to N$ transverse sur A le long de $K\}$ et $\pitchfork(M,N,A) = \{f : M \to N$ transverse sur $A\}$.

Théorème de transversalité globale. — *Si K est un compact de M, $A \subset N$ une sous-variété, A fermée dans N, alors :*

$\pitchfork_K(M,N,A)$ est un ouvert dense de $C^\infty(M,N)$,

$\pitchfork(M,N,A)$ est dense dans $C^\infty(M,N)$.

Démonstration. − 1) D'après le théorème précédent $\pitchfork_K(M,N,A)$ est ouvert.
2) Soit $f \in C^\infty(M,N)$, pour tout $x \in K$ le théorème précédent fournit K_x et $W_x(f)$ tels que $\Omega_x = \pitchfork_{K_x}(M,N,A) \cap W_x(f)$ soit un ouvert dense de $W_x(f)$. On extrait un sous-recouvrement fini K_{x_i} de K et on pose $W(f) = \cap W_{x_i}(f)$ et $\Omega_i = \Omega_{x_i} \cap W(f)$. L'ensemble Ω_i est encore un ouvert dense et donc l'intersection fini des Ω_i est un ouvert dense de $W(f)$. Un élément $g \in \cap\Omega_i$ est transverse sur A le long de $\cup K_{x_i} \supset K$. Ainsi $\pitchfork_K(M,N,A)$ est dense.
3) Puisque $M = \cup K_n$ est une union dénombrable de compacts, $\pitchfork(M,N,A)$ est l'intersection dénombrable des ouverts denses $\pitchfork_{K_n}(M,N,A)$, et comme $C^\infty(M,N)$ est un espace de Baire (pour la topologie fine), $\pitchfork(M,N,A)$ est dense. □

Remarque. − Si A n'est pas fermée dans N, on peut montrer que $\pitchfork(M,N,A)$ reste dense dans $C^\infty(M,N)$ mais $\pitchfork_K(M,N,A)$ peut ne pas être ouvert.

Théorème. − *Soient $A_1,...,A_q$ des sous-variétés de N, alors*

$$\pitchfork(M,N,A_1,...,A_q) = \{f : M \xrightarrow{C^\infty} N \mid f \textit{ est transverse sur chaque } A_i\}$$

est dense dans $C^\infty(M,N)$ pour la topologie fine.

Démonstration. − On a une intersection dénombrable d'ouverts denses $\pitchfork_{K_n}(M,N,A_i)$. □

Soit $A \subset J^r(M,N)$ une sous-variété de $J^r(M,N)$. On note $\pitchfork(M,N,j^r,A)$ l'ensemble des applications $f \in C^\infty(M,N)$ d'un élément $g \in W(f)$ quelconque telles que $j^r f \in C^\infty(M, J^r(M,N))$ est transverse sur A.

Théorème de transversalité pour les jets. − *Soit $A \subset J^r(M,N)$ une sous-variété de $J^r(M,N)$ qui est un fermé, alors $\pitchfork(M,N,j^r,A)$ est dense dans $C^\infty(M,N)$ (ouvert si M est compacte).*

Démonstration. − On ne donne que l'idée. Le cœur de la démonstration consiste à établir un théorème local comme précédemment. Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert d'une carte de M et $f \in C^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$. On considère une famille d'applications $F : \mathcal{U} \times P \to J^r(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ où l'espace des paramètres est l'ensemble des jets en O. Plus précisément on prend :

$$P = \mathbb{R}^n \times \prod_{k=1}^{r} \mathcal{L}^k_{sym}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

et on identifie les éléments de P à des polynômes. Ainsi F s'écrit :

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathcal{U} \times P & \longrightarrow & J^r(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n) \\ & (x,g) & \longmapsto & (x, j^r(f+g)(x)). \end{array}$$

D'après le théorème de transversalité d'une famille, il suffit de montrer que $F \pitchfork A$ pour obtenir la densité recherchée. Or la transversalité est immédiate, en effet, avec des identifications évidentes, F s'écrit comme une application affine

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \times \prod_{k=1}^r \mathcal{L}^k_{sym}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \times \prod_{k=1}^{r+1} \mathcal{L}^k_{sym}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \\ & (x,g) & \longmapsto & (x, (j^r(f)+g)(x)) \end{array}$$

trivialement surjective. □

Remarque. – Si A n'est pas fermée dans N, on peut montrer que $\pitchfork (M, N, j^r, A)$ est encore dense dans $C^\infty(M, N)$.

On a bien sûr une version avec un nombre fini de sous-variétés.

Théorème. – *Soient $A_1, ..., A_q$ des sous-variétés de $J^r(M, N)$, alors*

$$\pitchfork (M, N, j^r, A_1, ..., A_q) = \{f : M \xrightarrow{C^\infty} N \mid j^r f \text{ est transverse sur chaque } A_i\}$$

est dense dans $C^\infty(M, N)$ pour la topologie fine.

4 Applications aux immersions et aux plongements

Théorème d'approximation des immersions. – *Si $n \geq 2m$, alors $I(M, N)$ est dense dans $C^\infty(M, N)$ (topologie fine).*

Démonstration. – Soit $A_k \subset J^1(M, N)$ l'ensemble des 1-jets de rang k. On montre facilement que $A_0, ..., A_{m-1}$ sont des sous-variétés de $J^1(M, N)$. Une application $f \in C^\infty(M, N)$ est une immersion si $j^1 f(M) \cap (A_0 \cup ... \cup A_{m-1}) = \emptyset$. Si pour tout $0 \leq i \leq m-1$, $dim\ A_i + dim\ M < dim\ J^1(M, N)$, la condition précédente équivaut à demander que $j^1 f$ soit transverse à chaque A_i $(0 \leq i \leq m-1)$. Soit $S_i = \{\text{matrices de } \mathcal{M}_{m,n} \text{ de rang } i\}$, il est facile de vérifier que S_i est une sous-variété de $\mathcal{M}_{m,n}$ et un peu d'algèbre linéaire montre que :

$$dim\ S_i = mn - (m-i)(n-i).$$

Ainsi

$$dim\ A_0 \leq ... \leq dim\ A_{m-1} = 2m + mn - 1.$$

D'autre part $dim\ J^1(M, N) = m + n + mn$, par conséquent :

$$dim\ A_i + dim\ M < dim\ J^1(M, N), \text{ pour tout } 0 \leq i \leq m-1 \iff n \geq 2m.$$

Ainsi, sous les hypothèses du théorème, $f \in C^\infty(M,N)$ est une immersion si $f \pitchfork A_i$ pour tout $0 \leq i \leq m-1$. D'après le théorème de transversalité pour les jets, $\pitchfork(M,N,j^r,A_1,...,A_{m-1})$ est dense dans $C^\infty(M,N)$. $\square$

Corollaire. − *Toute variété M^m admet une immersion dans $\mathbb{R}^{2m}$.*

Théorème. − *Soit M une variété compacte. Si $n \geq 2m+1$ alors $E(M,N)$ est dense dans $C^\infty(M,N)$.*

Démonstration. − On ne donne que l'idée. Une étape importante de cette démonstration est proposée dans l'exercice 3. D'après le théorème sur les immersions, il suffit de montrer la densité de $E(M,N)$ dans $I(M,N)$. Soit $f \in I(M,N)$, on considère :

$$f \times f : M \times M \longrightarrow N \times N,$$

et on note ΔM et ΔN les diagonales respectives de $M \times M$ et $N \times N$. Bien sûr $f \times f(\Delta M) \subset \Delta N$ et f est un plongement si $(f \times f)^{-1}(\Delta N) = \Delta M$. Une paire de points (x_1,x_2) dans $(f \times f)^{-1}(\Delta N) \setminus \Delta M$ correspond à une paire de points distincts ayant la même image. Pour une immersion, deux points proches et distincts n'ont pas la même image, donc $(f \times f)^{-1}(\Delta N) \setminus \Delta M$ est isolé de ΔM. On se ramène à un théorème de transversalité de la façon suivante.

$f \in I(M,N)$ est un plongement	$\Longleftrightarrow$	$(f \times f)^{-1}(\Delta N) \setminus \Delta M$ est vide
	$\Longleftrightarrow$	il existe un petit voisinage tubulaire de la diagonale $\mathcal{V}(\Delta M)$ tel que $f \times f$ est transverse à ΔN le long de $M^2 \setminus \mathcal{V}(\Delta M)$.

La deuxième équivalence résulte de l'hypothèse $n \geq 2m+1$ donc $2m+n = dim\ f \times f(M^2) + dim\ \Delta N < dim\ N^2 = 2n$ $\square$

Corollaire. − *Toute variété (compacte) admet un plongement dans $\mathbb{R}^{2m+1}$.*

Remarque. − On peut enlever l'hypothèse de compacité. Ce corollaire a été établi par Whitney en 1944 à une époque où l'on ne possédait pas de théorèmes de transversalité. On l'appelle parfois le "petit" théorème de Whitney, on verra le "grand" à la prochaine leçon.

Il existe une version relative des théorèmes d'approximations. Soit $f \in C^\infty(M,N)$ et K un fermé de M compacte. On suppose que f est une immersion sur un voisinage $\mathcal{V}$ de K et on note :

$C^\infty(M,N,f_{|\mathcal{V}},K) = \{g \mid$ Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de K inclu dans $\mathcal{V}$ tel que

$$g \equiv f \text{ sur } \mathcal{U}\}.$$

On munit cet ensemble de la topologie induite par $C^\infty(M, N)$.

Théorème d'approximation relative. – *Si $n \geq 2m$ alors $I(M, N, f_{|\mathcal{V}}, K)$ est dense dans $C^\infty(M, N, f_{|\mathcal{V}}, K)$.*
Si $n \geq 2m+1$ et f injective sur $\mathcal{V}$ alors $E(M, N, f_{|\mathcal{V}}, K)$ est dense dans $C^\infty(M, N, f_{|\mathcal{V}}, K)$.

5 Exercices

Exercice. 1. – Donner un sens précis puis démontrer les assertions suivantes :
a) Soit $f : \mathbb{S}^2 \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^2$, alors pour *la plupart* des points $y \in \mathbb{R}^2$, $f^{-1}(y)$ est fini.
b) Soit $f : \mathbb{R} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$, alors *presque toutes* les droites horizontales de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sont nulle part tangentes au graphe de f.
c) *En général,* une courbe C^∞ de $\mathbb{R}^3$ n'intersecte pas les axes de coordonnées.

Exercice. 2. – On suppose $f \pitchfork A$, $f(M) \cap A$ est-elle une sous-variété de N ?

Exercice. 3. – Soit $\mathcal{V}' \subset \overline{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}$ deux voisinages ouverts de ΔM où M est compacte. On note $I(M, \mathbb{R}^n, \mathcal{V}) = \{f \in I(M, \mathbb{R}^n) \mid \forall (x_1, x_2) \in M^2,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\}$ et $\mathcal{F} = \{f \times f : M^2 \setminus \overline{\mathcal{V}'} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid f \in I(M, \mathbb{R}^n, \mathcal{V})\} \subset C^\infty(M^2 \setminus \overline{\mathcal{V}'}, \mathbb{R}^{2n})$ muni de la topologie induite.
a) Montrer que si $\mathcal{V}'$ est suffisamment petit, alors $f \mapsto f \times f$ est un homéomorphisme de l'ouvert $I(M, \mathbb{R}^n, \mathcal{V})$ dans $\mathcal{F}$ (on rappelle que les opérations de restrictions sont continues pour la topologie C^∞).
b) Transversalité locale. Soit $f \times f \in \mathcal{F}$ et $x = (x_1, x_2) \in M \times M \setminus \overline{\mathcal{V}'}$. Montrer qu'il existe un voisinage compact K de x et un voisinage ouvert $W(f) \subset \mathcal{F}$ tel que $\{g \times g \in W(f) \mid g \times g \pitchfork_K \Delta\mathbb{R}^n\}$ est un ouvert dense de $W(f)$. (Considérer la famille $H(x, y, p) = (G(x, p), G(y, p))$ où $G(x, p) = g(x) + \alpha(x)p$, $p \in \mathbb{R}^n$ et α une fonction cloche sur un certain voisinage de x_1).
c) Transversalité globale. Montrer que $\{g \times g \in \mathcal{F} \mid g \times g \pitchfork_{M^2 \setminus \mathcal{V}} \Delta\mathbb{R}^n\}$ est dense dans $\mathcal{F}$.
d) Soit $\tilde{\mathcal{D}}(f) = \{(x_1, x_2) \in M \times M \setminus \Delta M \mid f(x_1) = f(x_2)\}$. Montrer que, quitte à perturber f de manière C^1-petite, on peut toujours supposer que $\tilde{\mathcal{D}}(f)$ est une sous-variété compacte de $M \times M \setminus \Delta M$ de dimension $2m - n$. En particulier si $n \geq 2m+1$, on peut toujours supposer que f est un plongement.

Exercice. 4. – Soit N une variété connexe, une sous-variété $M \subset N$ *sépare* N si $N \setminus M$ n'est plus connexe. Dans cet exercice, on suppose que N est simplement connexe et M est une sous-variété connexe de codimension 1. On suppose en outre, qu'en tant que sous-espace topologique, M est un fermé de N.
a) Montrer que M sépare N (*Suggestion.* Soient $x_0, x_1 \in N \setminus M$ et $\gamma : [0,1] \to N$ joignant x_0 à x_1 transverse à M. Montrer d'abord que $L(x_0, x_1, \gamma) \in \mathbb{Z}_2$, la réduction

modulo 2 du cardinal de $\gamma^{-1}(M)$ est indépendant de γ).
b) Soit $A \subset N \setminus M$ une composante connexe par arcs. Montrer que A est une sous-variété ouverte de N et que sa frontière $Fr\ A := \bar{A} \setminus int(A)$ est M.
c) Montrer que $N \setminus M$ a exactement deux composantes connexes par arcs.
d) Soit M une variété compacte non orientable (sans bord). Montrer qu'il n'existe pas de plongement de M dans une variété N simplement connexe de dimension $n = m + 1$. En particulier, il n'existe pas de plongement de $\mathbb{R}P^2$ ni de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice. 5. — Théorème du plongement du disque. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, on suppose que $m \geq 2$ et $n \geq m + 3$. Soit $\gamma : \mathbb{S}^1 \to M$ un plongement, on suppose qu'il existe un champ de vecteurs $\nu : \mathbb{S}^1 \to T_\gamma N$ tel que ν ne soit nul part tangent à M. Montrer qu'il existe un plongement $f : D^2 \to \mathbb{R}^n$ tel que :

i) $f_{|\partial D^2} = \gamma$,
ii) $f(D^2 \setminus \partial D^2) \cap M = \emptyset$,
ii) $\forall x \in \partial D^2\ :\ df(T_x D^2) = Vect(\gamma'(x), \nu(x))$.

6 Bibliographie

M. Hirsch, *Differential Topology*, GTM, Springer-Verlag.

J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, PUG.

F. Laudenbach, *Topologie différentielle*, Cours donné à l'Ecole Polytechnique.

M. Demazure, *Catastrophe et bifurcations*, Ellipses.