Université Claude Bernard Lyon 1

M1 EADM – Géométrie

11 janvier 2010 - Durée 2 heures

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Soient p nombres réels $\lambda_1, ..., \lambda_p$ tels que $\lambda = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \neq 0$ et f définie par

$$\begin{array}{rccl} f: & E & \longrightarrow & \overrightarrow{E} \\ & M & \longmapsto & \lambda_i \overrightarrow{MA_i}. \end{array}$$

Montrer que f est une bijection.

2.– Montrer que si $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{E}$ est stable par une application orthogonale $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \longrightarrow \overrightarrow{E}$ alors $\overrightarrow{F}^{\perp}$ est également stable par $\overrightarrow{f}$.

3.– Montrer qu'une homographie admet ∞ comme point fixe ssi h est une similitude.

4.– Soit la famille de droites $(D_t)_{t\in I}$ données par $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$ où les fonctions $a, b, c \in C^1(I)$ sont telles que

$$\forall t \in I, \quad (a(t), b(t)) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad \delta(t) = a(t)b'(t) - b(t)a'(t) \neq 0.$$

Montrer que la courbe enveloppe $t \overset{\gamma}{\longmapsto} (x(t), y(t))$ est donnée par

$$x(t) = \frac{1}{\delta(t)} \begin{vmatrix} b(t) & c(t) \\ b'(t) & c'(t) \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad y(t) = -\frac{1}{\delta(t)} \begin{vmatrix} a(t) & c(t) \\ a'(t) & c'(t) \end{vmatrix}.$$

5.– Rappeler la construction de la parabole au moyen d'une règle, d'une équerre et d'un fil.

Le problème. – (10 pts) Soit $\alpha : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe C^∞ birégulière paramétrée par l'abscisse curviligne. Soient $r \in \mathbb{R}$ et n la normale principale à α. On appelle *courbe parallèle* à α toute courbe de la forme

$$\begin{array}{rccl} \beta_r : & [0, L] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & s & \longmapsto & \alpha(s) + rn(s). \end{array}$$

1) Déterminer les points réguliers de β_r.

2) Soit $s \longmapsto k(s)$ la courbure de α. on pose $a := max_{s\in[0,L]}k(s)$. Montrer que si $r < \dfrac{1}{a}$ alors β_r est régulière.

3) Déterminer la courbure de β_r en fonction de celle de α et du réel r.

4) On suppose désormais que $r < \dfrac{1}{a}$. Montrer que la longueur de β_r est donnée par une expression de la forme

$$Long(\beta_r) = Long(\alpha) + rc(\alpha)$$

et exprimer $c(\alpha)$ en fonction de k.

5) Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormée de $\mathbb{E}^2$ et $(\cos\theta(s), \sin\theta(s))$ avec $\theta : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ les coordonnées dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de $\alpha'(s)$. Montrer que pour tout $s \in [0, L]$, on a $k(s) = |\theta'(s)|$. En déduire une expression de $c(\alpha)$ en fonction de θ.

6) On suppose désormais que la courbe α est fermée, c'est-à-dire que

$$\alpha(0) = \alpha(L) \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha^{(k)}(0) = \alpha^{(k)}(L).$$

Montrer que $-c(\alpha) \in 2\pi\mathbb{N}$.

7) Déterminer $c(\delta)$ pour

$$\begin{array}{rccc} \delta : & [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{E}^2 \\ & s & \longmapsto & (\cos s, \sin s). \end{array}$$

En déduire que pour tout $n \in N^*$ il existe une courbe fermée δ_n telle que $c(\delta_n) = -2\pi n$.

8) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On pose

$$\begin{array}{rccc} \alpha_\lambda : & [0, \lambda L] & \longrightarrow & \mathbb{E}^2 \\ & s & \longmapsto & \lambda \alpha\left(\dfrac{s}{\lambda}\right). \end{array}$$

Montrer que $c(\alpha_\lambda) = c(\alpha)$.

9) Interpréter géométriquement le résultat de la question 8.