Université Claude Bernard Lyon 1

M1 EADM – Géométrie

Corrigé de l'examen du 11 janvier 2010

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Soient p nombres réels $\lambda_1, ..., \lambda_p$ tels que $\lambda = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \neq 0$ et f définie par

$$\begin{array}{rccl} f: & E & \longrightarrow & \overrightarrow{E} \\ & M & \longmapsto & \lambda_i \overrightarrow{MA_i}. \end{array}$$

Montrer que f est une bijection.

Rép.– Soit $O \in E$. La relation de Chasles entraîne

$$f(M) = f(O) + \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \right) \overrightarrow{MO}.$$

Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$, l'équation $f(M) = \overrightarrow{u}$ a une unique solution donnée par

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\lambda} \left(f(O) - \overrightarrow{u} \right).$$

2.– Montrer que si $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{E}$ est stable par une application orthogonale $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \longrightarrow \overrightarrow{E}$ alors $\overrightarrow{F}^{\perp}$ est également stable par $\overrightarrow{f}$.

Rép.– Soit $y \in \overrightarrow{F}^{\perp}$, il faut montrer que $\overrightarrow{f}(y) \in \overrightarrow{F}^{\perp}$. Par définition

$$y \in \overrightarrow{F}^{\perp} \iff \forall x \in \overrightarrow{F} \ : \ \langle x, y \rangle = 0.$$

Puisque $\overrightarrow{F}$ est stable $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{F}) \subset \overrightarrow{F})$ et comme $\overrightarrow{f}$ est une application orthogonale, elle est bijective et on a en fait $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F}$. Ainsi

$$\begin{array}{rcl} y \in \overrightarrow{F}^{\perp} & \iff & \forall x \in \overrightarrow{F} \ : \ \langle y, \overrightarrow{f}^{-1}(x) \rangle = 0 \\ & \iff & \forall x \in \overrightarrow{F} \ : \ \langle \overrightarrow{f}(y), x \rangle = 0 \\ & \iff & \overrightarrow{f}(y) \in \overrightarrow{F}^{\perp}. \end{array}$$

3.– Montrer qu'une homographie admet ∞ comme point fixe ssi h est une similitude.

Rép.– $(\Rightarrow)$ En effet, une homographie $z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ qui admet ∞ comme point fixe ne peut pas avoir de pôle car sinon $h(-\dfrac{d}{c}) = \infty$ et ∞ ne serait pas fixe (une homographie est nécessairement bijective). Donc $c = 0$ est c'est une similitude

$(\Leftarrow)$ Réciproquement, si $h(z) = mz + u$ alors $h(\infty) = \infty$.

4.– Soit la famille de droites $(D_t)_{t \in I}$ données par $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$ où les fonctions $a, b, c \in C^1(I)$ sont telles que

$$\forall t \in I, \quad (a(t), b(t)) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad \delta(t) = a(t)b'(t) - b(t)a'(t) \neq 0.$$

Montrer que la courbe enveloppe $t \overset{\gamma}{\longmapsto} (x(t), y(t))$ est donnée par

$$x(t) = \frac{1}{\delta(t)} \begin{vmatrix} b(t) & c(t) \\ b'(t) & c'(t) \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad y(t) = -\frac{1}{\delta(t)} \begin{vmatrix} a(t) & c(t) \\ a'(t) & c'(t) \end{vmatrix}.$$

Rép.– Les conditions

$$\forall t \in I, \quad \gamma(t) \in D_t \quad \text{et} \quad \gamma'(t) \in \overrightarrow{D_t}$$

conduisent aux deux équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) & = & 0 \\ a(t)x'(t) + b(t)y'(t) & = & 0 \end{array} \right.$$

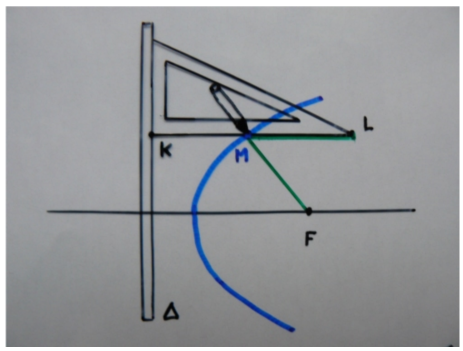
En dérivant la première équation et compte tenu de la seconde, ce système implique le suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) & = & 0 \\ a'(t)x(t) + b'(t)y(t) + c'(t) & = & 0 \end{array} \right.$$

dont la résolution fournit les expressions de $x(t)$ et $y(t)$ de l'énoncé.

5.– Rappeler la construction de la parabole au moyen d'une règle, d'une équerre et d'un fil.

Rép.– On fait glisser une équerre le long d'une règle, un fil de longueur KL est fixé par ses extrémités à la pointe L de l'équerre et au foyer F. L'égalité $MF = MK$ assure que le tracé est une portion de parabole.



Le problème. – (10 pts) Soit $\alpha : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe C^∞ birégulière paramétrée par l'abscisse curviligne. Soient $r \in \mathbb{R}$ et n la normale principale à α. On appelle *courbe parallèle* à α toute courbe de la forme

$$\begin{array}{rccl} \beta_r : & [0, L] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & s & \longmapsto & \alpha(s) + rn(s). \end{array}$$

1) Déterminer les points réguliers de β_r.

Rép.– On a, en utilisant les relations de Frenet,

$$\begin{array}{rcl} \beta_r' & = & \alpha' + rn' \\ & = & T - rkT \\ & = & (1 - rk)T. \end{array}$$

Donc β_r est régulière en s ssi $k(s) \neq \frac{1}{r}$.

2) Soit $s \longmapsto k(s)$ la courbure de α. on pose $a := max_{s\in[0,L]}k(s)$. Montrer que si $r < \dfrac{1}{a}$ alors β_r est régulière.

Rép.– En effet, si $r < \dfrac{1}{a}$ alors

$$\forall s \in [0, L], \quad r < \frac{1}{a} \leq \frac{1}{k(s)}.$$

Ainsi, d'après la question 1, β_r est régulière.

3) Déterminer la courbure de β_r en fonction de celle de α et du réel r.

Rép.– On applique la formule

$$k_{\beta_r}(s) = \frac{\|\beta_r'(s) \wedge \beta_r''(s)\|}{\|\beta_r(s)\|^3}.$$

On a

$$\begin{array}{rcl} \beta_r''(s) & = & ((1-rk(s))\alpha'(s))' = -rk'(s)\alpha'(s) + (1-rk(s))\alpha''(s) \\ & = & -rk'(s)T(s) + (1-rk(s))k(s)n(s). \end{array}$$

D'où

$$\beta_r'(s) \wedge \beta_r''(s) = (1-rk(s))^2 k(s) T(s) \wedge n(s)$$

et

$$k_{\beta_r}(s) = \frac{(1-rk(s))^2 k(s)}{|1-rk(s)|^3} = \frac{k(s)}{|1-rk(s)|}.$$

4) On suppose désormais que $r < \dfrac{1}{a}$. Montrer que la longueur de β_r est donnée par une expression de la forme

$$Long(\beta_r) = Long(\alpha) + rc(\alpha)$$

et exprimer $c(\alpha)$ en fonction de k.

Rép.– On a

$$\begin{array}{rcl} Long(\beta_r) & = & \displaystyle\int_0^L \|\beta_r'(s)\| ds = \int_0^L (1-rk(s)ds \\ & = & Long(\alpha) - r\displaystyle\int_0^L k(s)ds. \end{array}$$

Ainsi $c(\alpha) = \displaystyle\int_0^L k(s)ds.$

5) Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormée de $\mathbb{E}^2$ et $(\cos\theta(s), \sin\theta(s))$ avec $\theta : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ les coordonnées dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de $\alpha'(s)$. Montrer que pour tout $s \in [0, L]$, on a $k(s) = |\theta'(s)|$. En déduire une expression de $c(\alpha)$ en fonction de θ.

Rép.– On a $\alpha''(s) = -\theta'(s)\sin\theta(s)\overrightarrow{i} + \theta'(s)\cos\theta(s)\overrightarrow{j}$. D'où

$$k(s) = |\alpha''(s)| = |\theta'(s)|.$$

Puisque α est birégulière, la fonction $s \longmapsto k(s)$ ne change pas de signe puisqu'elle ne s'annule pas. Donc

$$\forall s \in [0, L], \quad k(s) = \epsilon\theta'(s)$$

avec $\epsilon = \pm 1$. Ainsi

$$c(\alpha) = -\int_0^L k(s)ds = -\epsilon \int_0^L \theta'(s)ds = -\epsilon\left(\theta(L) - \theta(0)\right).$$

6) On suppose désormais que la courbe α est fermée, c'est-à-dire que

$$\alpha(0) = \alpha(L) \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha^{(k)}(0) = \alpha^{(k)}(L).$$

Montrer que $-c(\alpha) \in 2\pi\mathbb{N}$.

Rép.– La condition $\alpha'(0) = \alpha'(L)$ impose qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta(L) = \theta(0) + 2n\pi$. Par conséquent

$$c(\alpha) = -\epsilon\left(\theta(L) - \theta(0)\right) = -\epsilon 2n\pi \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Puisque $-c(\alpha) = \displaystyle\int_0^L k(s)ds > 0$, on a nécessairement $-c(\alpha) \in 2\pi\mathbb{N}$.

7) Déterminer $c(\delta)$ pour

$$\begin{array}{rccc} \delta : & [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{E}^2 \\ & s & \longmapsto & (\cos s, \sin s). \end{array}$$

En déduire que pour tout $n \in N^*$ il existe une courbe fermée δ_n telle que $c(\delta_n) = -2\pi n$.

Rép.– La courbure de δ vaut 1 donc $c(\delta) = -\displaystyle\int_0^{2\pi} k(s)ds = -2\pi$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\begin{array}{rccc} \delta_n : & [0, 2n\pi] & \longrightarrow & \mathbb{E}^2 \\ & s & \longmapsto & (\cos s, \sin s). \end{array}$$

On a $-c(\delta_n) = \displaystyle\int_0^{2n\pi} k(s)ds = 2n\pi$.

8) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On pose

$$\begin{array}{rccc} \alpha_\lambda : & [0, \lambda L] & \longrightarrow & \mathbb{E}^2 \\ & s & \longmapsto & \lambda\alpha\left(\dfrac{s}{\lambda}\right). \end{array}$$

Montrer que $c(\alpha_\lambda) = c(\alpha)$.

Rép.– On a $\alpha'_\lambda(s) = \alpha'(\frac{s}{\lambda})$ d'où $\|\alpha'_\lambda(s)\| = \|\alpha'(\frac{s}{\lambda})\| = 1$ et par conséquent α_λ est paramétrée par la longueur d'arc. Donc

$$k_{\alpha_\lambda}(s) = \|\alpha''_\lambda\| = \frac{1}{\lambda}\|\alpha''(\frac{s}{\lambda})\| = \frac{1}{\lambda}k(\frac{s}{\lambda}).$$

De là

$$\begin{aligned} c(\alpha_\lambda) &= -\int_0^{\lambda L} k_{\alpha_\lambda}(s)ds \\ &= -\int_0^{\lambda L} \frac{1}{\lambda}k(\frac{s}{\lambda})ds \\ &= -\int_0^{\lambda L} k(s)ds \\ &= c(\alpha) \end{aligned}$$

où, pour obtenir l'avant-dernière égalité, on a effectué le changement de variables $u = \frac{s}{\lambda}$.

9) Interpréter géométriquement le résultat de la question 8.

Rép.– Le support de la courbe α_λ s'obtient à partir de celui de α par une homothétie de rapport λ. En particulier, la longueur de α_λ est la longueur de α multipliée par λ. Puisque le cœfficient $c(\alpha)$ ne change pas, le rétrécissement de la courbe parallèle à $\lambda\alpha$ et celui de la courbe parallèle à α_λ sont les mêmes. En d'autres termes, *l'ampleur du rétrécissement ne dépend pas de la longueur de la courbe initiale* !