Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Examen du 16 novembre 2017 - Durée 2h

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Soit $\overrightarrow{f}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$ est

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

avec $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de $\overrightarrow{f}$.

2.– Montrer que les valeurs propres d'une matrice orthogonale sont de module 1.

3.– Donner la définition exacte d'un angle orienté de vecteurs.

4.– Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier.

i) Écrire la permutation sur les sommets A, B, C, D induite le retournement autour de la bimédiane des arêtes AC et BD.

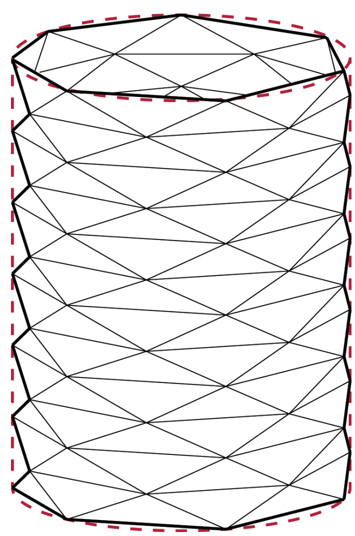
ii) La connaissance de cette seule permutation permet-elle de retrouver l'isométrie ? On justifiera la réponse.

5.– Soit f une isométrie de forme complexe $z \mapsto e^{2i\varphi}\overline{z} + b$ où $\varphi \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{C}$. Montrer que si $b + e^{2i\varphi}\overline{b} \neq 0$ alors f n'a pas de point fixe.

Le problème. – (10 pts) On note $E = (\mathbb{R}^3, \langle ., . \rangle)$ l'espace affine euclidien et $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ un repère orthonormée de E. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $h > 0$. On considère les $2n$ points $P_0, ..., P_{n-1}$, $Q_0, ..., Q_{n-1}$ de E dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont

$$\begin{aligned} P_k &:= (R\cos\frac{2k\pi}{n}, R\sin\frac{2k\pi}{n}, 0) \\ Q_k &:= (R\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}, R\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}, h) \end{aligned}$$

pour $k \in \{0, ..., n-1\}$. On convient d'une convention circulaire pour les indices $P_n = P_0$, $P_{n+1} = P_1$, $Q_n = Q_0$, etc.



Le but de ce problème est l'étude du *Lampion de Schwarz* (illustration cidessus). Un formulaire trigonométrique est disponible en fin de sujet.

1) i) Montrer que les points P_k (resp. les points Q_k) sont coplanaires et que les deux plans qui les contiennent sont parallèles.
ii) Montrer que les points P_k et Q_k sont contenus dans un cylindre que l'on déterminera.

2) i) Soit $\overrightarrow{\Pi} = Vect(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ et $\overrightarrow{D} = Vect(\overrightarrow{e}_3)$. On note $\overrightarrow{s}_{\overrightarrow{\Pi}}$ la réflexion par rapport à $\overrightarrow{\Pi}$ et $\overrightarrow{Rot}_{\overrightarrow{D},\theta}$ la rotation d'axe $\overrightarrow{D}$ et d'angle θ. Écrire la matrice de l'anti-rotation vectorielle $\overrightarrow{A}_{\overrightarrow{\Pi},\overrightarrow{D},\theta} = \overrightarrow{s}_{\overrightarrow{\Pi}} \circ \overrightarrow{Rot}_{\overrightarrow{D},\theta}$ dans la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$.

ii) Soient $z \in \mathbb{R}$ et Ω_z le point de coordonnées $(0,0,z)$. On pose $\Pi_z = \Omega_z + Vect(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ et $D = \Omega_z + Vect(\overrightarrow{e}_3)$ et on considère l'anti-rotation affine $f = s_{\Pi_z} \circ Rot_{D,\theta} = Rot_{D,\theta} \circ s_{\Pi_z}$ de plan Π_z, d'axe D et d'angle θ. En admettant que $\overrightarrow{f}$ est l'anti-rotation vectorielle $\overrightarrow{A}_{\overrightarrow{\Pi}, \overrightarrow{D}, \theta}$. Montrer que

$$\forall M \in E, \quad \overrightarrow{\Omega_z M'} = \overrightarrow{A}_{\overrightarrow{\Pi}, \overrightarrow{D}, \theta}(\overrightarrow{\Omega_z M})$$

où $M' = f(M)$.

3) Soient $P'_k = f(P_k)$ et $Q'_k = f(Q_k)$.
i) Montrer que

$$\overrightarrow{\Omega_z P'_k} = \left(R\cos(\theta + \frac{2k\pi}{n}), R\sin(\theta + \frac{2k\pi}{n}), z \right).$$

ii) Déterminer θ et z pour que $P'_k = Q_k$.
iii) Montrer qu'alors $Q'_k = P_{k+1}$.

4) On suppose désormais que l'anti-rotation f est choisie telle que $f(P_k) = Q_k$ et $f(Q_k) = P_{k+1}$. On note T_k le triangle $P_k Q_k P_{k+1}$ et T'_k le triangle $Q_k P_{k+1} Q_{k+1}$.
i) Montrer que $f(T_k) = T'_k$ et $f(T'_k) = T_{k+1}$.
ii) En déduire que les triangles $T_0, ..., T_{n-1}, T'_0, ..., T'_{n-1}$ sont isométriques [1] entre eux.

5) Soit H le plan affine passant par l'origine et de direction $\overrightarrow{H} = Vect(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_3)$. On note s_H la réflexion affine par rapport à H.
i) Montrer que si $M = O + X\overrightarrow{e}_1 + Y\overrightarrow{e}_2 + Z\overrightarrow{e}_3$ alors

$$s_H(M) = O + X\overrightarrow{e}_1 - Y\overrightarrow{e}_2 + Z\overrightarrow{e}_3.$$

ii) Quels sont les images des points Q_0, P_0 et Q_{n-1} par s_H ?
iii) Montrer que tous les triangles $T_0, ..., T_{n-1}, T'_0, ..., T'_{n-1}$ sont isocèles.

6) Soit I_k le point milieu du segment $[P_k P_{k+1}]$.
i) Montrer que

$$\overrightarrow{OI}_k = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}_k + \overrightarrow{OP}_{k+1})$$

1. On rappelle que deux triangles sont *isométriques* s'il existe une isométrie qui envoie l'un sur l'autre.

ii) Déterminer les coordonnées de I_k dans le repère $\mathcal{R}$.
iii) Montrer que $Q_kI_k = \sqrt{R^2(1-\cos\frac{\pi}{n})^2 + h^2}$.

7) i) En considérant le triangle isocèle OP_kP_{k+1}, déterminer la longueur P_kP_{k+1} en fonction de n et de R.
ii) Montrer que

$$Aire(T_k) = R\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{R^2(1-\cos\frac{\pi}{n})^2 + h^2}$$

8) Soit t la translation de vecteur $2h\overrightarrow{e}_3$. On note $P_{k,1} = t(P_k)$ et T''_k (resp. T'''_k) le triangle $Q_{k-1}P_{k,1}Q_k$ (resp $P_{k,1}Q_kP_{k+1,1}$). Montrer que les triangles T''_k et T'''_k sont isométriques au triangle T_0.

9) On choisit désormais $h = \frac{1}{2N}$ avec $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $j \in \{0, ..., N-1\}$ on note t^j la translation de vecteur $2jh\overrightarrow{e}_3$ et on pose

$$T_{k,j} = t^j(T_k), \quad T'_{k,j} = t^j(T'_k), \quad T''_{k,j} = t^j(T''_k), \quad T'''_{k,j} = t^j(T'''_k)$$

(en particulier $T_{k,0} = T_k$, $T'_{k,0} = T'_k$, etc.) On appelle *lampion de Schwarz* $\mathcal{L}$ la réunion de tous les triangles

$$\mathcal{L} = \bigcup_{k\in\{0,...,n-1\},\ j\in\{0,...,N-1\}} (T_{k,j} \cup T'_{k,j} \cup T''_{k,j} \cup T'''_{k,j}).$$

i) Déterminer l'aire $A(n, N)$ de $\mathcal{L}$ en fonction de N et de n.
ii) Déterminer $\lim_{n\longrightarrow\infty} A(n, n)$ et comparer avec l'aire du cylindre de hauteur 1.
iii) Que vaut $\lim_{n\longrightarrow\infty} A(n, n^3)$?

FORMULAIRE.–

$$\begin{array}{rcl}
\cos(a+b) & = & \cos a\cos b - \sin a\sin b \\
\sin(a+b) & = & \sin a\cos b + \sin b\cos a \\
\cos a - \cos b & = & -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\
\cos a + \cos b & = & 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \\
\sin a - \sin b & = & 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\
\sin a + \sin b & = & 2\cos\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}
\end{array}$$