Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Examen du jeudi 28 novembre 2019 - Durée 2h

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une isométrie, $F = Fix\ f$, $A \in E \setminus F$, $A' = f(A)$, H l'hyperplan médiateur de $[A, A']$ et s_H la réflexion hyperplane d'hyperplan H. Montrer que $Fix\ g$ où $g = s_H \circ f$ contient F et A.

2.– Montrer que si $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{E}$ est stable par une application orthogonale $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \longrightarrow \overrightarrow{E}$ alors $\overrightarrow{F}^{\perp}$ est également stable par $\overrightarrow{f}$.

3.– Énoncer le théorème de classification des isométries de l'espace.

4.– Montrer que tout similitude du plan de rapport $k \neq 1$ admet un unique point fixe.

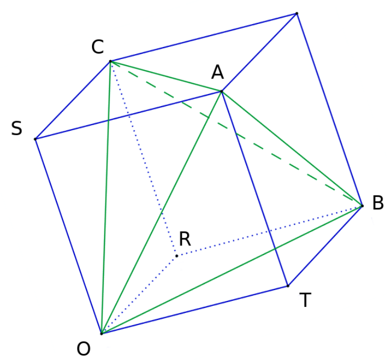
5.– i) Soient $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel euclidien de dimension 2 et $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}$ une application orthogonale dont une matrice dans une base orthonormée est

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Calculer les valeurs propres de $\overrightarrow{f}$ et en déduire la nature de l'application $\overrightarrow{f}$.
ii) Donner la nature des deux matrices suivantes (on ne demande pas de justifier) :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le problème. – (10 pts) On considère $E = (\mathbb{R}^3, \langle ., . \rangle)$ l'espace affine euclidien, $\overrightarrow{E}$ l'espace vectoriel associé et $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ un repère orthonormée de E. Un point M étant donné, on note (x_M, y_M, z_M) ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$.



Le but de ce problème est d'établir que les affixes a, b et c des projetés des sommets d'un tétraèdre régulier $OABC$ sur le plan P d'équation $z = 0$ (le plan horizontal passant par O) satisfont à la relation

$$3(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) = 0.$$

1) Soit $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}$ une application orthogonale c'est-à-dire telle que

$$\langle \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u_1}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u_2}) \rangle = \langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \rangle$$

pour tout $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ dans $\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{E}$.

i) Montrer que $\ker \overrightarrow{f} = \{\overrightarrow{0}\}$ et en déduire que $\overrightarrow{f}$ est inversible.

ii) Montrer que $(\overrightarrow{f})^{-1}$ est orthogonale.

iii) Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$. Montrer que $AA^t = A^tA = Id$.

iv) En déduire que la matrice de $(\overrightarrow{f})^{-1}$ dans la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ est la transposée A^t de A.

v) Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on note $\overrightarrow{a}_i$ le "vecteur ligne"

$$\overrightarrow{a}_i = a_{i1}\overrightarrow{e}_1 + a_{i2}\overrightarrow{e}_2 + a_{i3}\overrightarrow{e}_3$$

Montrer que $(\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3)$ est une base orthonormée de $\overrightarrow{E}$.

2) Soient R, S et T trois points de E tels que les vecteurs $\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OS}$ et $\overrightarrow{OT}$ soient de même norme (non nécessairement égale à 1) et soient orthogonaux deux à deux. Montrer que

$$x_R^2 + x_S^2 + x_T^2 = y_R^2 + y_S^2 + y_T^2 = z_R^2 + z_S^2 + z_T^2$$

$$x_R y_R + x_S y_S + x_T y_T = x_R z_R + x_S z_S + x_T z_T = y_R z_R + y_S z_S + y_T z_T = 0.$$

3) On identifie le plan P au plan complexe. On note R', S' et T' les images par la projection orthogonale π sur P des points R, S et T. Montrer que si r, s et t sont les affixes de R', S' et T' alors on a

$$r^2 + s^2 + t^2 = 0.$$

4) Réciproquement, soient R', S' et T' trois points de P d'affixes r, s et t tels que $r^2 + s^2 + t^2 = 0$.

i) Montrer que les vecteurs

$$\overrightarrow{u} = x_R \overrightarrow{e}_1 + x_S \overrightarrow{e}_2 + x_T \overrightarrow{e}_3 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} = y_R \overrightarrow{e}_1 + y_S \overrightarrow{e}_2 + y_T \overrightarrow{e}_3$$

sont de même norme et orthogonaux.

ii) À tout vecteur $\overrightarrow{w} = z_1 \overrightarrow{e}_1 + z_2 \overrightarrow{e}_2 + z_3 \overrightarrow{e}_3$ de $\overrightarrow{E}$ on associe les trois points suivants

$$R'' = R' + z_1 \overrightarrow{e}_3, \quad S'' = S' + z_2 \overrightarrow{e}_3, \quad T'' = T' + z_3 \overrightarrow{e}_3$$

Montrer que $\overrightarrow{OR''}, \overrightarrow{OS''}$ et $\overrightarrow{OT''}$ sont de même norme et orthogonaux deux à deux si et seulement s'il en est de même pour $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

iii) Montrer qu'il existe des points R, S et T dans E tels que $\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OS}$ et $\overrightarrow{OT}$ soient de même norme et orthogonaux deux à deux et tels que

$$\pi(R) = R', \quad \pi(S) = S' \quad \text{et} \quad \pi(T) = T'$$

iv) Les points R, S et T sont-ils uniques ?

5) Un exemple numérique.– Soient $r = 3 + 2i$ et $s = 6 - 3i$.

i) Montrer qu'il existe exactement deux nombres complexes t_1 et t_2, que l'on déterminera, vérifiant $r^2 + s^2 + t^2 = 0$.

ii) Trouver tous les triplets de points (R, S, T) tels que l'affixe de leurs projections soient r, s, t_1 ou r, s, t_2 et tels que $\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OS}$ et $\overrightarrow{OT}$ soient de même norme et orthogonaux deux à deux.

6) Soit $OABC$ un tétraèdre quelconque. On définit trois points R, S et T en posant :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \\ \overrightarrow{OS} &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \\ \overrightarrow{OT} &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \end{aligned}$$

i) Montrer que $\|\overrightarrow{OR}\|^2 - \|\overrightarrow{OS}\|^2 = \langle \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AB} \rangle$.

ii) Montrer que $\langle \overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OS} \rangle = \frac{1}{4}(\|\overrightarrow{OC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2)$.

7) Une application affine $f : E \to E$ est une similitude de rapport $k > 0$ si pour tout $(M, N) \in E \times E$, on a $f(M)f(N) = kMN$.

i) Montrer que pour tout $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$, on a $\|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})\| = k\|\overrightarrow{v}\|$.

ii) En écrivant $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ en fonction de $\|\overrightarrow{u}\|$, $\|\overrightarrow{u}\|$ et $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|$ montrer que $\overrightarrow{f}$ préserve l'orthogonalité i. e.

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \langle \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) \rangle = 0$$

8) Soit $A_0 = (1, 0, 1)$, $B_0 = (1, 1, 0)$ et $C_0 = (0, 1, 1)$. On dit qu'un tétraèdre est régulier s'il est l'image du tétraèdre $OA_0B_0C_0$ par une similitude.

i) Montrer que si $OABC$ est un tétraèdre régulier alors toutes les arêtes ont même longueur.

ii) Montrer que si $OABC$ est un tétraèdre régulier alors et $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

iii) Décrire une isométrie du tétraèdre envoyant l'arête $[OC]$ sur $[OB]$ et l'arête $[AB]$ sur $[AC]$.

iv) Soient R, S et T définis comme dans la question 6. Montrer que si $OABC$ est un tétraèdre régulier alors $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OS}$ et $\overrightarrow{OT}$ sont deux à deux orthogonaux et ont même norme.

9) On note a, b et c les affixes des projetés $\pi(A)$, $\pi(B)$ et $\pi(C)$. Montrer que

$$3(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) = 0.$$