Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Examen du 22 janvier 2025 - durée 2h

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Vrai-Faux. – Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toute réponse « vrai » ou « faux » non argumentée ne sera pas prise en compte. Sauf mention explicite du contraire, les espaces affines (et vectoriels) considérés sont de dimension finie.

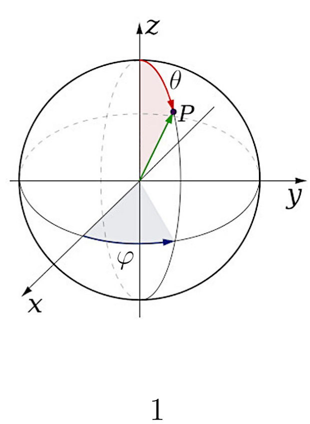
1.– [2pts] On sait qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base. Soit E un espace affine de dimension n. Est-il vrai qu'une application affine $f : E \to E$ est entièrement déterminée par l'image d'un repère affine $\mathcal{R} = (A_0, A_1, ..., A_n)$?

2.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une isométrie. Est-il vrai que $Ker(\overrightarrow{f} - id) \perp Im(\overrightarrow{f} - id)$?

3.– Le paramétrage colatitude-longitude de la sphère unité $\mathbb{S}^2$ est donné par

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,\pi]\times[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{E}^3 \\ & (\theta,\varphi) & \longmapsto & (\sin(\theta), \cos(\theta)\cos(\varphi), \cos(\theta)\sin(\varphi)) \end{array}$$

où les paramètres (θ, φ) sont ceux de la figure ci dessous.



4.– On rappelle que le birapport de quatre nombres complexes distincts a, b, c, d est donné par

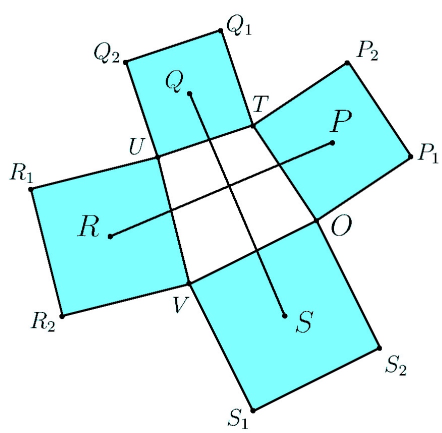
$$[a, b, c, d] := \frac{a-c}{b-c} \cdot \frac{b-d}{a-d}.$$

On affirme que le birapport est invariant par similitudes directes et par l'inversion $\sigma(z) = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C}^*$.

5.– Soient $a > 0$ et $b > 0$. Un paramétrage d'une des branches de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

est donné par $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ où $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$.



Quatre carrés s'appuyant sur les côtés d'un quadrilatère convexe quelconque.

Le problème. – [$\geq$ 10 pts] Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien. On considère quatre carrés s'appuyant sur les côtés d'un quadrilatère convexe quelconque $OTUV$. On note P, Q, R et S les centres respectifs énumérés dans le sens trigonométrique. Le but du problème est d'établir par deux méthodes différentes le résultat suivant : *les segments PR et QS ont même longueur et sont orthogonaux.*

Première partie : Approche fondée sur les nombres complexes.– On identifie le plan $\mathcal{P}$ avec celui des nombres complexes, le point O étant identifié avec zéro. On note p, q, r et s les affixes des points P, Q, R et S et a, b, c, d les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OT}$, $\overrightarrow{TU}$, $\overrightarrow{UV}$ et $\overrightarrow{VO}$. Dans la rédaction, on pourra commettre le léger abus d'écriture consistant à confondre les points ou les vecteurs avec leurs affixes.

0) a) Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul. Montrer que les vecteurs d'affixes z et iz sont orthogonaux et de même norme.

b) La base (z, iz) est-elle directe ou indirecte ? Justifier.

1) Montrer que $a + b + c + d = 0$.

2) On considère l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = -z + (1-i)a$.

a) L'application f est-elle affine ? On justifiera sa réponse.

b) Montrer que f est une isométrie.

c) Montrer que f a un unique point fixe Ω que l'on déterminera.

d) Énoncer précisément le théorème de classification des isométries du plan.

e) En déduire que f est une symétrie centrale (=une rotation d'angle π).

3) On note P_1, P_2 les deux autres sommets du carré de centre P de manière à ce que O, P_1, P_2 et T soient énumérés dans le sens trigonométrique.

a) Montrer que l'affixe de $f(T)$ est $-ia$

b) En déduire que $f(T) = P_1$.

c) Montrer que l'on a $P = \Omega$ où Ω est le point fixe de f.

d) En déduire que l'affixe de P est $p = \frac{(1-i)a}{2}$.

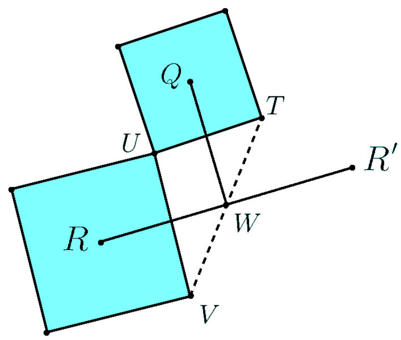
4) a) Justifier pourquoi les affixes de Q, R et S sont

$$q = a + \frac{(1-i)b}{2}, \quad r = a + b + \frac{(1-i)c}{2}, \quad s = a + b + c + \frac{(1-i)d}{2}.$$

b) Déterminer les parties réelles et imaginaires des affixes z_{PR} et z_{QS} des vecteurs $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{QS}$.

c) Montrer que $z_{PR} = -iz_{QS}$.

d) Conclure.



Le point W est le milieu du segment TV.

Seconde partie : Approche fondée sur les transformations.– Le résultat de la première partie se déduit facilement de la propriété suivante : *si W est le milieu du segment TV alors les segment RW et QW sont perpendiculaires et de même longueur*. Le but de cette seconde partie est d'établir cette propriété.

5) On note $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ deux nombres complexes. On suppose que $Z = e^{i\theta}z$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

a) Écrire la matrice M_θ reliant $(x, y)^T$ à $(X, Y)^T$:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = M_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

b) Reconnaître la matrice M_θ.

6) Soit ω un nombre complexe quelconque fixé et $\theta \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & e^{i\theta}z + (1 - e^{i\theta})\omega \end{array}$$

a) Reconnaître l'application g dans le cas où $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.

b) On suppose désormais $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que g a un unique point fixe.

c) Déterminer l'expression du vecteur $\overrightarrow{\omega g(z)}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\omega z}$ et de θ.

d) En déduire la nature de l'application g.

7) On note $Rot_{\omega_1}^{\theta_1}$ et $Rot_{\omega_2}^{\theta_2}$ les rotations de centre ω_1 et ω_2 et d'angles θ_1 et θ_2.

a) On suppose que $\theta_1 + \theta_2 \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Utiliser la question précédente pour montrer que la composée $Rot_{\omega_1}^{\theta_1} \circ Rot_{\omega_2}^{\theta_2}$ est la rotation affine Rot_{ω}^{θ} de centre et d'angle donnés par

$$\omega = \frac{e^{i\theta_1}(1 - e^{i\theta_2})\omega_2 + (1 - e^{i\theta_1})\omega_1}{1 - e^{i(\theta_1+\theta_2)}} \quad \text{et} \quad \theta = \theta_1 + \theta_2.$$

b) On suppose maintenant que $\theta_1 + \theta_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$. Décrire le résultat de la composée $Rot_{\omega_1}^{\theta_1} \circ Rot_{\omega_2}^{\theta_2}$.

8) Soit W le point milieu du segment TV (voir figure de la seconde partie). On note w son affixe et on considère la triple composition

$$\tau = Rot_w^{\pi} \circ Rot_q^{\frac{\pi}{2}} \circ Rot_r^{\frac{\pi}{2}}.$$

a) Montrer que τ est une translation.

b) Montrer que $\tau(V) = V$ et en déduire que τ est l'identité.

c) Soit $R' = Rot_w^{\pi}(R)$. Montrer que $R' = Rot_q^{\frac{\pi}{2}}(R)$.

d) En déduire que les segment RW et QW sont perpendiculaires et de même longueur.