Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Examen du 22 janvier 2025 - durée 2h

Corrigé

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Vrai-Faux. – Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toute réponse « vrai » ou « faux » non argumentée ne sera pas prise en compte. Sauf mention explicite du contraire, les espaces affines (et vectoriels) considérés sont de dimension finie.

1.– [2pts] On sait qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base. Soit E un espace affine de dimension n. Est-il vrai qu'une application affine $f : E \to E$ est entièrement déterminée par l'image d'un repère affine $\mathcal{R} = (A_0, A_1, ..., A_n)$?

Rép.– VRAI - Soit M un point quelconque de E. Puisque $\mathcal{B} = (\overrightarrow{A_0A_1}, ..., \overrightarrow{A_0A_1})$ est une base de $\overrightarrow{E}$, il existe $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\overrightarrow{A_0M} = \alpha_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{A_0A_n}.$$

La formule de Grassmann s'écrit donc

$$\begin{aligned} f(M) &= f(A_0) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_0M}) \\ &= f(A_0) + \overrightarrow{f}(\alpha_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{A_0A_n}) \\ &= f(A_0) + \alpha_1\overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_0A_1}) + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_0A_n}). \end{aligned}$$

Puisque f est affine, on a

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_0A_1}) = \overrightarrow{f(A_0)f(A_1)}, \quad \cdots \quad \overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_0A_n}) = \overrightarrow{f(A_0)f(A_n)}.$$

Ainsi

$$f(M) = f(A_0) + \alpha_1\overrightarrow{f(A_0)f(A_1)} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{f(A_0)f(A_n)}$$

est entièrement déterminée par l'image du repère affine $\mathcal{R} = (A_0, A_1, ..., A_n)$.

2.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une isométrie. Est-il vrai que $Ker(\overrightarrow{f} - id) \perp Im(\overrightarrow{f} - id)$?

Rép.– VRAI. Soit $\overrightarrow{x} \in Ker(\overrightarrow{f} - id)$ et $\overrightarrow{y} \in Im(\overrightarrow{f} - id)$. On a donc $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$ et il existe $\overrightarrow{z} \in \overrightarrow{E}$ tel que $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{z}) - \overrightarrow{z}$. Ainsi

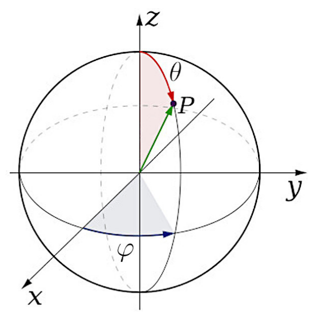
$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{z}) - \overrightarrow{z} \rangle = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{z}) \rangle - \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{z} \rangle = \langle \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{z}) \rangle - \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{z} \rangle = 0$$

car $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle.

3.– Le paramétrage colatitude-longitude de la sphère unité $\mathbb{S}^2$ est donné par

$$\begin{array}{rccc} f : & [0,\pi] \times [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{E}^3 \\ & (\theta, \varphi) & \longmapsto & (\sin(\theta), \cos(\theta)\cos(\varphi), \cos(\theta)\sin(\varphi)) \end{array}$$

où les paramètres (θ, φ) sont ceux de la figure ci dessous.



Rép.– FAUX. Le paramétrage colatitude-longitude est donné par :

$$\begin{array}{rccl} f : & [0,\pi] \times [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \\ & (\theta, \varphi) & \longmapsto & (\sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta)). \end{array}$$

4.– On rappelle que le birapport de quatre nombres complexes distincts a, b, c, d est donné par

$$[a, b, c, d] := \frac{a-c}{b-c} \cdot \frac{b-d}{a-d}.$$

On affirme que le birapport est invariant par similitudes directes et par l'inversion $\sigma(z) = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C}^*$.

Rép.– VRAI. Toute similitude directe s'écrit sous la forme

$$f(z) = \alpha z + \beta$$

où $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$. Un calcul direct montre alors que

$$[f(a), f(b), f(c), f(d)] = [a, b, c, d].$$

Pour l'inversion, on écrit

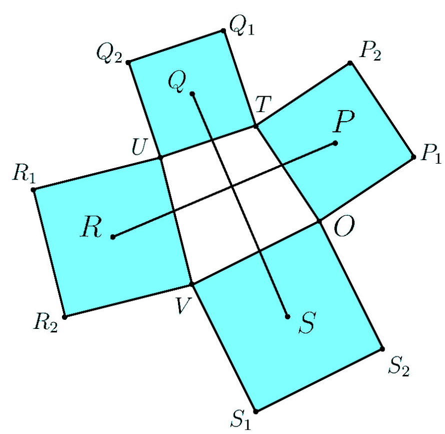
$$[\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c), \sigma(d)] = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{c}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{c}} \cdot \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{d}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{d}} = \frac{\frac{c-a}{ac}}{\frac{c-b}{bc}} \cdot \frac{\frac{d-b}{bd}}{\frac{d-a}{ad}} = [a, b, c, d].$$

5.– Soient $a > 0$ et $b > 0$. Un paramétrage d'une des branches de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

est donné par $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ où $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$.

Rép.– Faux. Un paramétrage est donné par $\gamma(t) = (a \text{ ch t}, \text{b sh t})$.



Quatre carrés s'appuyant sur les côtés d'un quadrilatère convexe quelconque.

Le problème. – [$\geq$ 10 pts] Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien. On considère quatre carrés s'appuyant sur les côtés d'un quadrilatère convexe quelconque $OTUV$. On note P, Q, R et S les centres respectifs énumérés dans le sens trigonométrique. Le but du problème est d'établir par deux méthodes différentes le résultat suivant : *les segments PR et QS ont même longueur et sont orthogonaux.*

Première partie : Approche fondée sur les nombres complexes.– On identifie le plan $\mathcal{P}$ avec celui des nombres complexes, le point O étant identifié avec zéro. On note p, q, r et s les affixes des points P, Q, R et S et a, b, c, d les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OT}$, $\overrightarrow{TU}$, $\overrightarrow{UV}$ et $\overrightarrow{VO}$. Dans la rédaction, on pourra commettre le léger abus d'écriture consistant à confondre les points ou les vecteurs avec leurs affixes.

0) a) Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul. Montrer que les vecteurs d'affixes z et iz sont orthogonaux et de même norme.

b) La base (z, iz) est-elle directe ou indirecte ? Justifier.

Rép.– a) En coordonnées réelles le vecteur d'affixe z est $(x, y)^T$ et celui d'affixe iz, $(-y, x)^T$ et

$$\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \| = \| \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \rangle = 0$$

b) Le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 + y^2 > 0$$

est positif ainsi (z, iz) est directe.

1) Montrer que $a + b + c + d = 0$.

Rép.– Puisque

$$\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TU} + \overrightarrow{UV} + \overrightarrow{VO} = \overrightarrow{0}$$

on déduit $a + b + c + d = 0$.

2) On considère l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = -z + (1 - i)a$.

a) L'application f est-elle affine ? On justifiera sa réponse.

b) Montrer que f est une isométrie.

c) Montrer que f a un unique point fixe Ω que l'on déterminera.

d) Énoncer précisément le théorème de classification des isométries du plan.

e) En déduire que f est une symétrie centrale (=une rotation d'angle π).

Rép.– a) Montrons que l'application est affine. Soient M et N deux points quelconques de $\mathcal{P}$ d'affixe z et w. On a :

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = (-w + (1 - i)a) - (-z + (1 - i)a) = -(w - z) = -\overrightarrow{MN}$$

Ainsi f est une application affine dont l'application linéaire associée est $\overrightarrow{f} = -\overrightarrow{id}$.
b) Montrons que f est une isométrie. On a en effet

$$f(M)f(N) = \|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = |(-w + (1 - i)a) - (-z + (1 - i)a)| = | - (w - z)| = \|MN\|.$$

c) Cherchons les points fixes de f :

$$f(z) = z \iff 2z = (1-i)a \iff z = \frac{(1-i)a}{2}$$

Ainsi f possède un unique point fixe dont l'affixe est $\frac{(1-i)a}{2}$.
d) Le théorème de classification des isométries planes s'énonce ainsi : Une isométrie plane est soit l'identité, soit une réflexion par rapport à une droite, soit une rotation, soit une symétrie glissée ou une translation.
e) Dans la liste ci-dessus, les seules isométries ayant un seul point fixe sont les rotations. Ainsi, f est une rotation. Son angle est donnée par $\overrightarrow{f} = -\overrightarrow{id}$, il vaut donc π.

3) On note P_1, P_2 les deux autres sommets du carré de centre P de manière à ce que O, P_1, P_2 et T soient énumérés dans le sens trigonométrique.
a) Montrer que l'affixe de $f(T)$ est $-ia$
b) En déduire que $f(T) = P_1$.
c) Montrer que l'on a $P = \Omega$ où Ω est le point fixe de f.
d) En déduire que l'affixe de P est $p = \frac{(1-i)a}{2}$.

Rép.– a) L'affixe du point T est a, par conséquent l'affixe de $f(T)$ est

$$f(T) = -a + (1-i)a = -ia.$$

b) D'après la question 0, $f(T)$ ne peut être que P_1 ou son symétrique par rapport à O. Cette dernière possibilité est exclue car alors $(a, -ia)$ serait une base directe or $(\overrightarrow{OT}, \overrightarrow{OP_1})$ est indirecte.
c) Puisque f est une symétrie centrale, son point fixe est le milieu du segment $Tf(T)$, autrement dit, le centre P du carré.
d) D'après une question précédente, l'affixe de Ω - c'est-à-dire également l'affixe de P - vaut $\frac{(1-i)a}{2}$.

4) a) Justifier pourquoi les affixes de Q, R et S sont

$$q = a + \frac{(1-i)b}{2}, \quad r = a + b + \frac{(1-i)c}{2}, \quad s = a + b + c + \frac{(1-i)d}{2}.$$

b) Déterminer les parties réelles et imaginaires des affixes z_{PR} et z_{QS} des vecteurs $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{QS}$.
c) Montrer que $z_{PR} = -iz_{QS}$.
d) Conclure.

Rép.– a) Considérons le carré UTQ_1Q_2. Si l'origine était placée en T, un raisonnement en tout point similaire au précédent montrerait que l'affixe de Q dans ce repère serait $\frac{(1-i)b}{2}$. Pour obtenir l'affixe dans la même base mais avec O comme origine, il suffit d'ajouter l'affixe correspondant au vecteur $\overrightarrow{OT}$, c'est-à-dire le nombre a. Même raisonnement pour r et s.

b) On a

$$\begin{aligned} z_{PR} &= \left(a+b+\frac{(1-i)c}{2}\right)-\frac{(1-i)a}{2} \\ &= \left(\frac{a}{2}+b+\frac{c}{2}\right)+i\frac{a-c}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} z_{QS} &= \left(a+b+c+\frac{(1-i)d}{2}\right)-\left(a+\frac{(1-i)b}{2}\right) \\ &= \left(\frac{b}{2}+c+\frac{d}{2}\right)+i\frac{b-d}{2} \end{aligned}$$

c) Faisons jouer la relation $a+b+c+d=0$ dans l'expression de

$$iz_{QS} = \frac{d-b}{2}+i\left(\frac{b}{2}+c+\frac{d}{2}\right)$$

On a

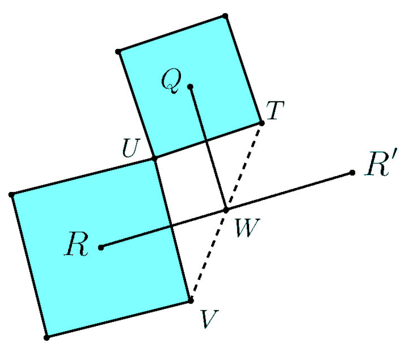
$$Re(iz_{QS}) = \frac{d-b}{2} = \frac{-(a+b+c)-b}{2} = -\left(\frac{a}{2}+b+\frac{c}{2}\right)$$

et

$$Im(iz_{QS}) = \frac{b+d}{2}+c = \frac{-(a+c)}{2}+c = -\frac{(a-c)}{2}$$

Ainsi $z_{PR} = -iz_{QS}$.

d) D'après la question 0, les segments PR et QS ont même longueur et sont orthogonaux.



Le point W est le milieu du segment TV.

Seconde partie : Approche fondée sur les transformations.– Le résultat de la première partie se déduit facilement de la propriété suivante :

si W est le milieu du segment TV alors les segment RW et QW sont perpendiculaires et de même longueur. Le but de cette seconde partie est d'établir cette propriété.

5) On note $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ deux nombres complexes. On suppose que $Z = e^{i\theta} z$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

a) Écrire la matrice M_θ reliant $(x, y)^T$ à $(X, Y)^T$:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = M_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

b) Reconnaître la matrice M_θ.

Rép.– a) En effectuant la multiplication complexe, on constate que

$$X = \cos\theta\, x - \sin\theta\, y \quad \text{et} \quad Y = \sin\theta\, x + \cos\theta\, y$$

ainsi

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

b) On reconnaît la matrice d'une rotation vectorielle d'angle θ.

6) Soit ω un nombre complexe quelconque fixé et $\theta \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} g : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & e^{i\theta} z + (1 - e^{i\theta})\omega \end{array}$$

a) Reconnaître l'application g dans le cas où $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.

b) On suppose désormais $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que g a un unique point fixe.

c) Déterminer l'expression du vecteur $\overrightarrow{\omega g(z)}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\omega z}$ et de θ.

d) En déduire la nature de l'application g.

Rép.– a) Dans ce cas, g est l'application identité id.

b) Un point z est fixe par g si

$$g(z) = z \iff e^{i\theta} z + (1 - e^{i\theta})\omega = z \iff (1 - e^{i\theta})\omega = (1 - e^{i\theta})z \iff z = \omega.$$

Notons que la simplification par $1 - e^{i\theta}$ est licite car $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. On constate que l'équation $g(z) = z$ a une unique solution qui est ω.

c) Puisque ω est point fixe de g :

$$\overrightarrow{\omega g(z)} = \overrightarrow{g(\omega) g(z)} = (e^{i\theta} z + c) - (e^{i\theta}\omega + c) = e^{i\theta}(z - \omega) = e^{i\theta}\overrightarrow{\omega z}.$$

d) Le calcul précédent montre que g est la rotation affine de centre ω et d'angle θ.

7) On note $Rot_{\omega_1}^{\theta_1}$ et $Rot_{\omega_2}^{\theta_2}$ les rotations de centre ω_1 et ω_2 et d'angles θ_1 et θ_2.

a) On suppose que $\theta_1 + \theta_2 \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Utiliser la question précédente pour montrer que la composée $Rot_{\omega_1}^{\theta_1} \circ Rot_{\omega_2}^{\theta_2}$ est la rotation affine Rot_{ω}^{θ} de centre et d'angle donnés par

$$\omega = \frac{e^{i\theta_1}(1-e^{i\theta_2})\omega_2 + (1-e^{i\theta_1})\omega_1}{1-e^{i(\theta_1+\theta_2)}} \quad \text{et} \quad \theta = \theta_1 + \theta_2.$$

b) On suppose maintenant que $\theta_1 + \theta_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$. Décrire le résultat de la composée $Rot_{\omega_1}^{\theta_1} \circ Rot_{\omega_2}^{\theta_2}$.

Rép.– La question précédente donne l'expression analytique d'une rotation affine de centre ω_i et d'angle θ_j :

$$Rot_{\omega_j}^{\theta_j}(z) = e^{i\theta_j} z + (1-e^{i\theta_j})\omega_j$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
Rot_{\omega_1}^{\theta_1} \circ Rot_{\omega_2}^{\theta_2}(z) &= Rot_{\omega_1}^{\theta_1}(Rot_{\omega_2}^{\theta_2}(z)) \\
&= Rot_{\omega_1}^{\theta_1}(e^{i\theta_2} z + (1-e^{i\theta_2})\omega_2) \\
&= e^{i\theta_1}\left(e^{i\theta_2} z + (1-e^{i\theta_2})\omega_2\right) + (1-e^{i\theta_1})\omega_1 \\
&= e^{i(\theta_1+\theta_2)} z + e^{i\theta_1}(1-e^{i\theta_2})\omega_2 + (1-e^{i\theta_1})\omega_1 \\
&= e^{i(\theta_1+\theta_2)} z + (1-e^{i(\theta_1+\theta_2)})\omega
\end{aligned}$$

avec

$$\omega = \frac{e^{i\theta_1}(1-e^{i\theta_2})\omega_2 + (1-e^{i\theta_1})\omega_1}{1-e^{i(\theta_1+\theta_2)}}.$$

b) Si $\theta_1 + \theta_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$, le calcul précédent reste valable jusqu'à la quatrième ligne

$$\begin{aligned}
Rot_{\omega_1}^{\theta_1} \circ Rot_{\omega_2}^{\theta_2}(z) &= e^{i(\theta_1+\theta_2)} z + e^{i\theta_1}(1-e^{i\theta_2})\omega_2 + (1-e^{i\theta_1})\omega_1 \\
&= z + (e^{i\theta_1} - 1)\omega_2 + (1-e^{i\theta_1})\omega_1 \\
&= z + (1-e^{i\theta_1})(\omega_1 - \omega_2).
\end{aligned}$$

La composée est donc une translation de vecteur $(1-e^{i\theta_1})(\omega_1-\omega_2)$.

8) Soit W le point milieu du segment TV (voir figure de la seconde partie). On note w son affixe et on considère la triple composition

$$\tau = Rot_w^{\pi} \circ Rot_q^{\frac{\pi}{2}} \circ Rot_r^{\frac{\pi}{2}}.$$

a) Montrer que τ est une translation.

b) Montrer que $\tau(V) = V$ et en déduire que τ est l'identité.

c) Soit $R' = Rot_w^{\pi}(R)$. Montrer que $R' = Rot_q^{\frac{\pi}{2}}(R)$.

d) En déduire que les segment RW et QW sont perpendiculaires et de même longueur.

Rép.– a) Puisque la somme des angles vaut 2π, d'après la question précédente τ est une translation.
b) On a $Rot_r^{\frac{\pi}{2}}(V) = U$ puis $Rot_q^{\frac{\pi}{2}}(U) = T$ et enfin $Rot_w^{\pi}(T) = V$ car W est le milieu du segment TV. Puisque τ est une translation qui fixe un point, τ est l'identité.
c) La rotation Rot_w^{π} est une symétrie centrale, c'est donc une involution et par conséquent

$$Rot_w^{\pi} \circ Rot_q^{\frac{\pi}{2}} \circ Rot_r^{\frac{\pi}{2}} = id \quad \Longleftrightarrow \quad Rot_w^{\pi} = Rot_q^{\frac{\pi}{2}} \circ Rot_r^{\frac{\pi}{2}}.$$

Puisque $Rot_r^{\frac{\pi}{2}}(R) = R$, on en déduit

$$R' = Rot_w^{\pi}(R) = Rot_q^{\frac{\pi}{2}}(R).$$

d) D'après la question précédente, le triangle RQR' est isocèle donc les segment RW et QW sont perpendiculaires et de même longueur.