Université Claude Bernard Lyon 1

# M1 MEEF – Géométrie

## Examen du 15 décembre 2025 - durée 2h

Corrigé

*Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.*

**Vrai-Faux.** – Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse (0.5pt) puis justifier la réponse donnée (1.5pt). Sauf mention explicite du contraire, les espaces affines (et vectoriels) considérés sont de dimension finie.

**1.– [2pts]** On sait qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base. Soit $E$ un espace affine de dimension $n$. Est-il vrai qu'une application affine $f : E \to E$ est entièrement déterminée par l'image d'un repère affine $\mathcal{R} = (A_0, A_1, ..., A_n)$ ?

**Rép.**– VRAI - Soit $M$ un point quelconque de $E$. Puisque $\mathcal{B} = (\overrightarrow{A_0A_1}, ..., \overrightarrow{A_0A_1})$ est une base de $\overrightarrow{E}$, il existe $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\overrightarrow{A_0M} = \alpha_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{A_0A_n}.$$

La formule de Grassmann s'écrit donc

$$\begin{aligned} f(M) &= f(A_0) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_0M}) \\ &= f(A_0) + \overrightarrow{f}(\alpha_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{A_0A_n}) \\ &= f(A_0) + \alpha_1\overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_0A_1}) + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_0A_n}). \end{aligned}$$

Puisque $f$ est affine, on a

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_0A_1}) = \overrightarrow{f(A_0)f(A_1)}, \quad \cdots \quad \overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_0A_n}) = \overrightarrow{f(A_0)f(A_n)}.$$

Ainsi

$$f(M) = f(A_0) + \alpha_1\overrightarrow{f(A_0)f(A_1)} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{f(A_0)f(A_n)}$$

est entièrement déterminée par l'image du repère affine $\mathcal{R} = (A_0, A_1, ..., A_n)$.

**2.–** Soit $E$ un espace affine euclidien de dimension trois et $f : E \to E$ une isométrie dont la partie linéaire est $\overrightarrow{f} = -\overrightarrow{Id}$. Est-il vrai que $f$ est un retournement ?

**Rép.**– FAUX. Un retournement est une rotation d'angle $\pi$ autour d'un axe. C'est un déplacement. Sa partie linéaire est donc un élément de $SO(3)$. Or $\overrightarrow{f} = -\overrightarrow{Id} \in O_-(3)$. Donc $f$ est un anti-déplacement. Ce ne peut être un retournement. On peut aussi constater que si $\overrightarrow{f} = -\overrightarrow{Id}$ alors $f$ est une anti-rotation d'axe quelconque et d'angle $\pi$.

**3.**– Soit $f : E \longrightarrow E$ une isométrie, $F = Fix\ f$, $A \in E \setminus F$, $A' = f(A)$, $H$ l'hyperplan médiateur de $[A, A']$, $s_H$ la réflexion hyperplane d'hyperplan $H$ et $g = s_H \circ f$. Est-il vrai que $Fix\ g$ contient $F$ et $A$ ?

**Rép.**– VRAI. Notons que $A$ est fixe par $g$ puisque $s_H(A') = A$. Soit $M \in F$ alors $A'M' = AM$ car $f$ est une isométrie et $A'M = AM$ car $M$ est fixe. Donc $M$ est dans l'hyperplan médiateur de $[A, A']$, i. e. $M \in H$. Mais alors $g(M) = M$ et $M \in Fix\ g$.

**4.**– Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier inscrit dans le cube $[-1,1]^3$. Précisément $A = (1,1,1)$, $B = (1,-1,-1)$, $C = (-1,-1,1)$ et $D = (-1,1,-1)$. Est-il vrai que la droite $(AA')$ où $A' = (-1,-1,-1)$ coupe le plan $(BCD)$ perpendiculairement ?

**Rép.**– VRAI. Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ engendrent le plan $(BCD)$. Un vecteur directeur de $(AA')$ est $\overrightarrow{u} = (2,2,2)$. On a $\overrightarrow{BC} = (-2,0,2)$ et $\overrightarrow{BD} = (-2,2,0)$. Il est immédiat de constater que

$$\langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{u} \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{u} \rangle = 0$$

donc $(AA')$ et $(BCD)$ sont orthogonaux. Ceci montre que la droite $(AA')$ coupe le plan $(BCD)$ perpendiculairement

**5.**– On note $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $(x, y)$ les coordonnées d'un point dans cette base. Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$. Est-il vrai qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\epsilon}_1, \overrightarrow{\epsilon}_2)$ dans laquelle la conique $\mathcal{C}$ s'écrit

$$\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1 \quad ?$$

**Rép.**– VRAI. Dans la base $\mathcal{B}_0$, la matrice $Q$ de la forme quadratique à l'infini $q(x, y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2$ est donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'une matrice symétrique. Elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Le calcul montre que les valeurs propres de $Q$ sont 2 et 8. Ainsi, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ dans laquelle la forme quadratique à l'infini s'écrit

$$q(X,Y) = (X,Y)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 2X^2 + 8Y^2.$$

Par conséquent la conique $\mathcal{C}$ s'écrit dans cette base

$$2X^2 + 8Y^2 = 8 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{X^2}{4} + Y^2 = 1.$$

**Le problème. –** [$\geq$ 10 pts] Étant donnés $n$ points $A_1, \cdots, A_n$ d'un espace affine euclidien $E$, une *médiane géométrique* est un point minimisant la fonction $\Phi : E \to \mathbb{R}_+$ de la somme des distances aux points

$$M \longmapsto \Phi(M) = A_1M + \cdots + A_nM$$

On montre qu'un tel point existe toujours et qu'il est unique dès que les points $A_1, \cdots, A_n$ ne sont pas tous alignés. Le but de ce problème est l'étude de la médiane géométrique d'un ensemble de points du plan.

Première partie : Étude d'un cas particulier.– Dans cette partie, on se place dans un plan euclidien orienté $E = \mathcal{P}$. On suppose $n = 3$ et on note les points $A$, $B$ et $C$ plutôt que $A_1$, $A_2$ et $A_3$. On s'intéresse au cas particulier où $A$, $B$ et $C$ forment un triangle équilatéral.

1) On identifie $\mathcal{P}$ à $\mathbb{C}$ et on note $a$, $b$ et $c$ les affixes de $A$, $B$ et $C$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que $a \neq 0$ et que

$$b = ja \quad \text{et} \quad c = j^2 a$$

où $j = e^{2i\pi/3}$. On rappelle que $1 + j + j^2 = 0$ et $|j| = |j^2| = 1$.

a) Montrer que $ABC$ est un triangle équilatéral

b) Faire un dessin soigné du triangle $ABC$.

**Rép.–** a) Il suffit de vérifier que les longueurs des trois côtés sont les mêmes :

$$\begin{array}{rcl} AB & = & |b-a| = |(j-1)a| \\ BC & = & |c-b| = |(j^2-j)a| = |j(j-1)a| = |j||(j-1)a| = |(j-1)a| \\ CA & = & |a-c| = |(1-j^2)a| = |(1+j)(1-j)a| = |1+j||(1-j)a| = |(j-1)a| \end{array}$$

car, d'après la relation $1 + j + j^2 = 0$, on a $|1+j| = |-j^2| = 1$.

b) Les nombres 1, $b/a$ et $c/a$ sont les racines troisièmes de l'unité. Les nombres $a$, $b$ et $c$

se répartissent donc sur un cercle de centre le nombre 0 et de rayon $|a|$.

2) a) Montrer que le point $O$ d'affixe nulle vérifie

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$$

au sens de la mesure des angles orientés.

b) On note

$$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|}, \quad \overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OB}\|} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{w} = \frac{\overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OC}\|}.$$

Montrer que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

**Rép.**– a) La mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est donnée par l'argument

$$\arg\left(\frac{b-0}{a-0}\right) = \arg(j) = \arg\left(e^{2i\pi/3}\right) = 2\pi/3$$

et similairement pour les autres angles.
b) Il suffit de remarquer que l'affixe de $\overrightarrow{u}$ est $\frac{a}{|a|}$, celle de $\overrightarrow{v}$ est $j\frac{a}{|a|}$ et celle de $\overrightarrow{w}$ est $j^2\frac{a}{|a|}$ ainsi

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (1 + j + j^2)\frac{a}{|a|}.$$

Puisque $1 + j + j^2 = 0$, le résultat demandé s'en suit.

3) Soit $M$ un point quelconque de $\mathcal{P}$.

a) En partant du fait que

$$OA = \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{u} \rangle, \quad OB = \langle \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{v} \rangle \quad \text{et} \quad OC = \langle \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{w} \rangle,$$

montrer que

$$OA + OB + OC = \langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \rangle + \langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{u} \rangle + \langle \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{w} \rangle.$$

b) En déduire que

$$OA + OB + OC = \langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{u} \rangle + \langle \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{w} \rangle.$$

c) Montrer en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$OA + OB + OC \leq MA + MB + MC.$$

d) Montrer que $O$ est une médiane géométrique des points $A$, $B$ et $C$.

**Rép.–** a) L'énoncé suggère d'écrire

$$OA + OB + OC = \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{u} \rangle + \langle \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{w} \rangle$$

On a donc

$$\begin{aligned} OA + OB + OC &= \langle \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{u} \rangle + \langle \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{w} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \rangle + \langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{u} \rangle + \langle \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{w} \rangle. \end{aligned}$$

b) Puisque $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, on déduit

$$OA + OB + OC = \langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{u} \rangle + \langle \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{w} \rangle$$

c) L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne immédiatement

$$\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{u} \rangle \leq MA, \quad \langle \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{v} \rangle \leq MB \quad \text{et} \quad \langle \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{w} \rangle \leq MC$$

En la relation obtenue en b) permet donc de déduire

$$OA + OB + OC \leq MA + MB + MC.$$

d) L'inégalité établie en c) montre que $O$ est un point minimisant la fonction

$$M \longmapsto MA + MB + MC$$

c'est donc une médiane géométrique.

Deuxième partie : Point de Fermat.– On se donne $ABC$ un triangle quelconque, mais non plat, du plan $\mathcal{P}$ euclidien orienté. On dit qu'un point $F \in \mathcal{P}$ est un *point de Fermat*[1] si l'on a

$$(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB}) = (\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FC}) = (\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{FA}) = \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$$

au sens de la mesure des angles orientés. À titre d'exemple, le point $O$ de la partie précédente est un point de Fermat (voir question 2a). Comme plus haut, on identifie le plan $\mathcal{P}$ avec celui des nombres complexes.

4) On suppose que $F$ est un point de Fermat du triangle $ABC$ et on note

$$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{FA}}{\|\overrightarrow{FA}\|}, \quad \overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{FB}}{\|\overrightarrow{FB}\|} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{w} = \frac{\overrightarrow{FC}}{\|\overrightarrow{FC}\|}.$$

1. Plusieurs appellation cohabitent : on trouve aussi *point de Torricelli* et *point de Steiner*.

a) On considère la rotation linéaire $\overrightarrow{r}$ d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Donner une écriture de $\overrightarrow{r}$ sous forme complexe.

b) Montrer que $\overrightarrow{r}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{r}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{r}(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}$.

c) En déduire que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

d) Déduire de la première partie que $F$ est une médiane géométrique des points $A$, $B$ et $C$.

**Rép.–** a) Soit $z$ l'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$ quelconque, la rotation $\overrightarrow{r}$ s'écrit

$$\overrightarrow{r}(z) = e^{2i\pi/3}z \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{r}(z) = jz$$

.

b) Puisque

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB}) = \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$$

et que $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 1$, on en déduit $\overrightarrow{r}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$. On raisonne similairement pour $\overrightarrow{r}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{r}(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}$.

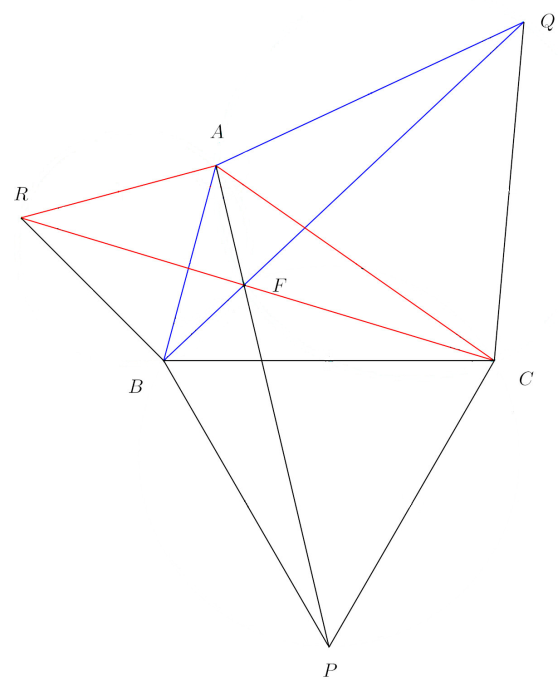
c) Par linéarité

$$\overrightarrow{r}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$$

et comme le seul vecteur fixe par $\overrightarrow{r}$ est $\overrightarrow{0}$, on en déduit $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

d) Le raisonnement développé à la question 3 de la première partie s'applique intégralement. Il montre que $F$ est une médiane géométrique des trois points $A$, $B$ et $C$.

On suppose pour tout le reste de cette partie que le triangle (non plat) $ABC$ ne possède aucun angle dont la mesure excède $2\pi/3$. On note $R$, $P$ et $Q$ trois nouveaux points, extérieurs au triangle $ABC$ et tels que les trois triangles $ARB$, $BPC$ et $CQA$ soient équilatéraux (figure dans l'énoncé).




Trois triangles équilatéraux s'appuyant sur les côtés du triangle $ABC$. Le point de Fermat $F$ est à l'intersection des droites $(AP)$, $(CR)$ et $(BQ)$.

5) On considère la rotation affine $r_A$ de centre $A$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Montrer que $r_A$ envoie le triangle $ARC$ sur le triangle $ABQ$.

b) Soit $F$ le point d'intersection des droites $(RC)$ et $(BQ)$. Montrer que

$$(\overrightarrow{RF}, \overrightarrow{RA}) = (\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BA}) \quad [\pi]$$

au sens de la mesure des angles orientés.

c) Énoncer le résultat de cocyclicité du cours qui fait intervenir une égalité d'angle orientée modulo $\pi$.

d) Montrer que les points $ARBF$ sont cocycliques.

**Rép.–** a) En effet, puisque $ARB$ est équilatéral $r_A(R) = B$ et puisque que $ACQ$ est équilateral $r_A(C) = Q$. Bien sûr, $r_A(A) = A$. D'où le résultat demandé.
b) Puisque $r_A$ est une isométrie directe, elle préserve la mesure des angles orientés :

$$(\overrightarrow{RC}, \overrightarrow{RA}) = (\overrightarrow{BQ}, \overrightarrow{BA}) \quad [2\pi]$$

Puisque $F \in (RC)$, $F \neq R$, il existe $\alpha \neq 0$ tel que $\overrightarrow{RF} = \alpha \overrightarrow{RC}$, et l'on aura

$$(\overrightarrow{RF}, \overrightarrow{RA}) = \begin{cases} (\overrightarrow{RC}, \overrightarrow{RA}) \quad [2\pi] & \text{if } \alpha > 0 \\ (\overrightarrow{RC}, \overrightarrow{RA}) + \pi \quad [2\pi] & \text{if } \alpha < 0 \end{cases}$$

et similairement pour $(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BA})$. Dans tous les cas, on aura donc

$$(\overrightarrow{RF}, \overrightarrow{RA}) = (\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BA}) \quad [\pi]$$

c) Le théorème demandé s'énonce ainsi : *Quatre points distincts du plan $A, B, R, F$ sont cocycliques ou alignés si et seulement si* $(\overrightarrow{RF}, \overrightarrow{RA}) = (\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BA}) \quad [\pi]$.
d) Les points $A, B, R, F$ ne sont pas alignés car les trois points $A$, $B$ et $R$ forment un triangle équilatéral, donc d'après le résultat du b), ils sont cocycliques.

6) a) Déduire de 5) que

$$(\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FA}) = (\overrightarrow{RB}, \overrightarrow{RA}) \quad [\pi]$$

au sens de la mesure des angles orientés.
b) Montrer, au sens de la mesure des angles orientés, que

$$(\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FA}) = \frac{\pi}{3} \quad [\pi]$$

puis que

$$(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB}) = \frac{2\pi}{3} \quad [\pi].$$

c) Montrer que $F$ est un point de Fermat du triangle $A$, $B$ et $C$.

**Rép.–** a) C'est un conséquence immédiate du fait que $A$, $B$, $R$ et $F$ sont cocycliques.
b) On a

$$(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB}) = -(\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FA}) = -\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad [\pi]$$

c) En répétant circulairement les arguments, on obtient

$$(\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FC}) = \frac{2\pi}{3} \quad [\pi] \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{FA}) = \frac{2\pi}{3} \quad [\pi]$$

ce qui montre que $F$ est un point de Fermat du triangle $A$, $B$ et $C$.

**Remarque :** Où l'hypothèse "*$ABC$ ne possède aucun angle dont la mesure excède* $2\pi/3$" a-t-elle joué ? Si l'angle en $A$ est plus grand que $2\pi/3$ alors l'intersection de $(RC)$ et de $(QB)$ donne un point hors de $ABC$ sur le complémentaire de la demi-droite $[AP)$. Sur la droite $(AP)$ la position relative de $F$ par rapport à $A$ est donc inverse de celle de la figure. Cela invalide le raisonnement permettant d'affirmer que $(\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FA}) = \frac{2\pi}{3}$.

Troisième partie : Résultats généraux.– On se place dans le cas général où $n \geq 3$ et où l'espace affine euclidien $E$ est de dimension plus grande ou égale à deux.

7) On suppose que l'on a trouvé un point $O$, distinct des points $A_1, ..., A_n$, tel que

$$(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}) = (\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}) = \cdots = (\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OA_1}) = \frac{2\pi}{n} \quad [2\pi]$$

Montrer que $O$ est une médiane géométrique. *Indication :* s'inspirer des questions 2 et 3.

**Rép.–** Pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, on pose

$$\overrightarrow{u}_k = \frac{\overrightarrow{OA_k}}{OA_k}$$

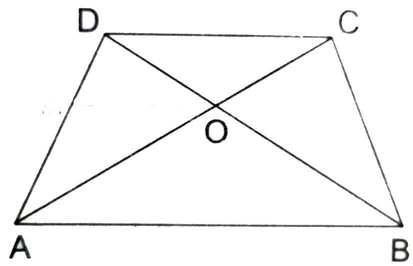
Le même raisonnement que celui suivi dans les questions 2 et 3 montre que

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{u}_k = \overrightarrow{0}$$

puis que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} OA_k &= \sum_{k=1}^{n} \langle \overrightarrow{OA_k}, \overrightarrow{u}_k \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{u}_k \rangle + \sum_{k=1}^{n} \langle \overrightarrow{MA_k}, \overrightarrow{u}_k \rangle \\
&= \langle \overrightarrow{OM}, \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{u}_k \rangle + \sum_{k=1}^{n} \langle \overrightarrow{MA_k}, \overrightarrow{u}_k \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle \overrightarrow{MA_k}, \overrightarrow{u}_k \rangle \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} MA_k.
\end{aligned}$$

Ainsi $O$ est un point minimisant de $M \mapsto \sum_{k=1}^{n} MA_k$.




Un quadrilatère convexe et le point d'intersection de ses diagonales.

8) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe quelconque et $O$ l'intersection des deux diagonales et $M$ un point quelconque.

a) Montrer que $AO + OC \leq AM + MC$ et $BO + OD \leq BM + MD$.

b) En déduire que $O$ est une médiane géométrique.

c) À votre avis, la réciproque au résultat énoncé dans la question 7 est-elle valide ? Justifier.

**Rép.–** a) Puisque $O \in [AC]$, on a $AO + OC = AC$. Puis, par inégalité triangulaire $AC \leq AM + MC$ d'où le fait que $AO + OC \leq AM + MC$. On raisonne similairement pour $BO + OD \leq BM + MD$.
b) En sommant les deux inégalités, on trouve

$$OA + OB + OC + OD \leq MA + MB + MC + MD$$

ce qui montre que $O$ est un point minimisant de

$$M \longmapsto MA + MB + MC + MD$$

c'est-à-dire une médiane géométrique.
c) La réciproque est fausse en générale. Il n'est pas difficile de construire un quadrilatère tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \neq (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$.

9) On suppose que $O$ est une médiane géométrique des points $A_1, \cdots, A_n$ et que $f : E \to E$ est une transformation. Dire si les affirmations ci-dessous sont exactes. Justifier votre réponse en donnant une démonstration ou un contre-exemple.

a) Si $f$ est une isométrie alors $f(O)$ est une médiane géométrique des points $f(A_1), \cdots, f(A_n)$.

b) Si $f$ est une similitude (de rapport $k \neq 0$) alors $f(O)$ est une médiane géométrique des points $f(A_1), \cdots, f(A_n)$.

c) Si $f$ est une application affine alors $f(O)$ est une médiane géométrique des points $f(A_1), \cdots, f(A_n)$.

**Rép.**– a) L'affirmation est exacte. En effet, si $f$ est une isométrie, $O$ une médiane géométrique de $A_1, \cdots, A_n$ et $M$ un point quelconque alors, pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$ on a $M'A'_j = MA_j$ et $O'A'_j = OA_j$ donc

$$\sum_{j=1}^{n} OA_j \leq \sum_{j=1}^{n} MA_j \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} O'A'_j \leq \sum_{j=1}^{n} M'A'_j.$$

Ainsi $O' = f(O)$ est une médiane géométrique de $A'_1, \cdots, A'_n$.
b) L'affirmation est exacte. En effet, si $f$ est une similitude alors pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$ on a on a $M'A'_j = kMA_j$ et $O'A'_j = kOA_j$ donc

$$\sum_{j=1}^{n} O'A'_j \leq \sum_{j=1}^{n} M'A'_j \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} kOA_j \leq \sum_{j=1}^{n} kMA_j \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} OA_j \leq \sum_{j=1}^{n} MA_j.$$

Ainsi $O' = f(O)$ est une médiane géométrique de $A'_1, \cdots, A'_n$.
c) L'affirmation est inexacte. Il n'est pas facile de donner un contre exemple... mais c'est la dernière question de l'examen. Soit $ABC$ le triangle équilatéral de la question 1. La médiane géométrique est l'origine $O$ et elle est aussi à l'intersection des médianes de $ABC$. Soit $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ une application affine définie comme suit par l'image des trois points $A$, $B$ et $C$ (qui forment une base affine de $\mathcal{P}$) :

$$A' = (0, 0), \quad B' = (3, 0) \quad \text{C'} = (0, 3).$$

Le triangle $A'B'C'$ est rectangle et isocèle en $A'$. Une application affine envoyant le milieu d'un segment sur le milieu du segment image, elle envoie donc les médianes de $ABC$ sur les médianes de $A'B'C'$. Par conséquent, $O$ est envoyé sur l'intersection des médianes de $A'B'C'$. Il est facile de déterminer les coordonnées du point image $O' = (1, 1)$. Pour se convaincre que $O'$ n'est pas la médiane géométrique, il suffit de vérifier que la mesure de l'angle $(\overrightarrow{O'B'}, \overrightarrow{O'C'})$ n'est pas $2\pi/3 \bmod 2\pi$. Or

$$\frac{\overrightarrow{O'B'}}{O'B'} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2) \quad \text{et} \quad \frac{\overrightarrow{O'C'}}{O'C'} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$$

et donc

$$\langle \frac{\overrightarrow{O'B'}}{O'B'}, \frac{\overrightarrow{O'C'}}{O'C'} \rangle = -\frac{4}{5} \neq \cos\frac{2\pi}{3} = -1/2.$$