Université Claude Bernard Lyon 1

M1 EADM – Géométrie

XX octobre 2010 - Durée 2 heures

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Soient s_D et $s_{D'}$ deux réflexions planes d'axe deux droites D et D' sécantes en I. Soit θ l'angle $\angle 2(D, D')$. Montrer que $s_{D'} \circ s_D$ est la rotation de centre I et d'angle θ.

2.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une isométrie, $F = Fix\ f$, $A \in E \setminus F$, $A' = f(A)$, H l'hyperplan médiateur de $[A, A']$ et s_H la réflexion hyperplane d'hyperplan H. Montrer que $Fix\ g$ où $g = s_H \circ f$ contient F et A.

3.– Soient $n+1$ points $A_1, ..., A_{n+1}$ formant un repère affine de E. Soient M et N deux points de E tels que, pour tout $i \in \{1, ..., n+1\}$, $MA_i = NA_i$. Montrer que $M = N$.

4.– Soit (ABC) un triangle non plat d'un plan orienté. Montrer que la somme des angles orientés (de façon cohérente) est égale à π mod 2π.

5.– Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R, Δ une droite coupant C en deux points distincts A et B. Montrer que $\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle = OM^2 - R^2$.

Le problème. – (10 pts) Soit E un espace affine de dimension $n \geq 2$.

1) Soient A, B et C trois points alignés, A distinct de C, et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de la droite vectoriel $\overrightarrow{(AC)}$. On rappelle que la mesure algébrique $\overline{AB}$ de (A, B) est le réel λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{u}$. Il dépend du choix de $\overrightarrow{u}$ mais le *rapport vectoriel* $\overline{AB}/\overline{AC}$ lui n'en dépend pas. Montrer qu'une application

affine conserve le rapport vectoriel.

2) Soit H un hyperplan affine de E et $\overrightarrow{D}$ une direction de droite telle que $\overrightarrow{H} \oplus \overrightarrow{D} = \overrightarrow{E}$. On rappelle que la projection sur D parallèlement à $\overrightarrow{H}$ est l'application $p : E \longrightarrow E$ telle que, pour tout $M \in E$, $M' = p(M) \in D$ et $\overrightarrow{MM'} \in \overrightarrow{H}$. Montrer que p est une application affine (on pensera à introduire un point intermédiaire $O \in D$).

3) Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine, on suppose que $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \longrightarrow \overrightarrow{E}$ est la projection vectorielle sur $\overrightarrow{D}$ parallèlement à $\overrightarrow{H}$. L'application f est-elle une projection affine ?

4) Soient H, H' et H'' trois hyperplans parallèles, D_1 et D_2 deux droites donc aucune n'est contenue dans un hyperplan parallèle à H. Soient $A_i = D_i \cap H$, $A'_i = D_i \cap H'$ et $A''_i = D_i \cap H''$, $i = 1$ ou 2. Montrer que

$$\frac{\overline{A_1A''_1}}{\overline{A_1A'_1}} = \frac{\overline{A_2A''_2}}{\overline{A_2A'_2}}.$$

5) Soit B un point de D_1 vérifiant l'égalité

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1A'_1}} = \frac{\overline{A_2A''_2}}{\overline{A_2A'_2}}.$$

Montrer que $B = A''_1$.

6) Soit ABC un triangle non plat et Δ une droite du plan (ABC) ne passant pas par les sommets et coupant (BC), (CA) et (AB) respectivement en P, Q, R. Soit enfin B' intersection de la droite (AC) avec la parallèle à Δ passant par B. Montrer que

a) $\dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \dfrac{\overline{QA}}{\overline{QB'}}$,

b) $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \dfrac{\overline{QB'}}{\overline{QC}}$,

c) $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$.

7) Si f et g sont deux applications affines, montrer que $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$.

8) Démontrer que h est une homothétie affine de rapport k ($\neq 1$) ssi $\overrightarrow{h}$ est une homothétie vectorielle de même rapport [1]. En déduire que si h_1 et h_2 sont deux homothéties de E de rapport k_1 et k_2 respectivement et si $k_1 k_2 \neq 1$ alors $h_1 \circ h_2$ est une homothétie de rapport $k_1 k_2$.

9) On se propose de retrouver le résultat du 6) c) en introduisant trois homothéties du plan (ABC) judicieusement choisies. Soit h_1 l'homothétie de centre R et de rapport $\dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$, h_2 l'homothétie de centre Q et de rapport $\dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}}$ et h_3 l'homothétie de centre P et de rapport $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$.

a) Montrer que $h_3 \circ h_2 \circ h_1(\Delta) \subset \Delta$.

b) Montrer que $h_3 \circ h_2 \circ h_1$ n'est pas une homothétie.

c) En déduire que $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$.

1. Conventionnellement, l'identité n'est *pas* une homothétie.