Université Claude Bernard Lyon 1

M1 EADM – Géométrie

Corrigé du partiel du XX octobre 2010

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Soient s_D et $s_{D'}$ deux réflexions planes d'axe deux droites D et D' sécantes en I. Soit θ l'angle $\angle 2(D, D')$. Montrer que $s_{D'} \circ s_D$ est la rotation de centre I et d'angle θ.

Rép.– Soit $M \in E$, $N = s_D(M)$ et $M' = s_{D'}(N)$. On note $\overrightarrow{u}$ (resp. $\overrightarrow{u'}$) un vecteur directeur (non nul) de D (resp. de D'). Les droites D et D' sont les bissectrices de $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN})$ et $(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IM'})$ respectivement. Donc

$$\angle(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}) = 2\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{IN}) \quad \text{et} \quad \angle(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IM'}) = 2\angle(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{u'})$$

Ainsi

$$\angle(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}) = 2\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}) = \theta.$$

De plus, $IM = IN = IM'$ car s_D et $s_{D'}$ sont des isométries. Il en résulte $s_{D'} \circ s_D = R_{I,\theta}$.

2.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une isométrie, $F = Fix\ f$, $A \in E \setminus F$, $A' = f(A)$, H l'hyperplan médiateur de $[A, A']$ et s_H la réflexion hyperplane d'hyperplan H. Montrer que $Fix\ g$ où $g = s_H \circ f$ contient F et A.

Rép.– Notons que A est fixe par g puisque $s_H(A') = A$.
Soit $M \in F$ alors $A'M' = AM$ car f est une isométrie et $A'M = AM$ car M est fixe. Donc M est dans l'hyperplan médiateur de $[A, A']$, i. e. $M \in H$. Mais alors $g(M) = M$ et $M \in Fix\ g$.

3.– Soient $n+1$ points $A_1, ..., A_{n+1}$ formant un repère affine de E. Soient M et N deux points de E tels que, pour tout $i \in \{1, ..., n+1\}$, $MA_i = NA_i$.

Montrer que $M = N$.

Rép.– Si M et N étaient distincts, alors les points A_i seraient dans l'hyperplan médiateur de $[M, N]$ ce qui contredirait l'indépendance affine des $(n + 1)$ points.

4.– Soit (ABC) un triangle non plat d'un plan orienté. Montrer que la somme des angles orientés (de façon cohérente) est égale à π mod 2π.

Rép.– On a

$$\begin{aligned} S &= \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \\ &= \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + \angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) \end{aligned}$$

car $-Id \in SO(2)$. D'où

$$\begin{aligned} S &= \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) + \angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \\ &= \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}). \end{aligned}$$

5.– Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R, Δ une droite coupant C en deux points distincts A et B. Montrer que $\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle = OM^2 - R^2$.

Rép.– Soit C le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à B. On a

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle &= \langle \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB} \rangle & &= \langle \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} \rangle & &= OM^2 - R^2. \end{aligned}$$

Le problème. – (10 pts) Soit E un espace affine de dimension $n \geq 2$.

1) Soient A, B et C trois points alignés, A distinct de C, et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de la droite vectoriel $\overrightarrow{(AC)}$. On rappelle que la mesure algébrique $\overline{AB}$ de (A, B) est le réel λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{u}$. Il dépend du choix de $\overrightarrow{u}$ mais le *rapport vectoriel* $\overline{AB}/\overline{AC}$ lui n'en dépend pas. Montrer qu'une application affine conserve le rapport vectoriel.

Rép.– Soient A, B et C les trois points alignés de l'énoncé, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$. Notons que k est la mesure algébrique de $\overline{AB}$ pour le choix $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC}$. Bien sûr $\overline{AC} = 1$, si bien que

$$k = \overline{AB}/\overline{AC}.$$

Par linéarité de $\overrightarrow{f}$, $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'C'}$ et comme précédemment k est le rapport $\overline{A'B'}/\overline{A'C'}$. Le rapport vectoriel est donc bien conservé.

2) Soit H un hyperplan affine de E et $\overrightarrow{D}$ une direction de droite telle que $\overrightarrow{H} \oplus \overrightarrow{D} = \overrightarrow{E}$. On rappelle que la projection sur D parallèlement à $\overrightarrow{H}$ est l'application $p : E \longrightarrow E$ telle que, pour tout $M \in E$, $M' = p(M) \in D$ et $\overrightarrow{MM'} \in \overrightarrow{H}$. Montrer que p est une application affine (on pensera à introduire un point intermédiaire $O \in D$).

Rép.– On a

$$\overrightarrow{p(M)p(N)} = \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'}$$

Notons $\pi : \overrightarrow{E} \longrightarrow \overrightarrow{E}$ la projection vectorielle sur $\overrightarrow{D}$ parallèlement à $\overrightarrow{H}$. Par définition d'une projection vectorielle, si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{d} + \overrightarrow{h} \in \overrightarrow{D} \oplus \overrightarrow{H}$ on a $\pi(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{d}$. Puisque

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$$

avec $\overrightarrow{OM'} \in \overrightarrow{D}$ (car O et M' sont dans D) et $\overrightarrow{M'M} \in \overrightarrow{H}$ (par définition), il s'en suit que

$$\pi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM'}.$$

Au bilan

$$\overrightarrow{p(M)p(N)} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = \pi(\overrightarrow{ON}) - \pi(\overrightarrow{OM}) = \pi(\overrightarrow{MN}).$$

Ainsi p est affine et $\overrightarrow{p} = \pi$.

3) Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine, on suppose que $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \longrightarrow \overrightarrow{E}$ est la projection vectorielle sur $\overrightarrow{D}$ parallèlement à $\overrightarrow{H}$. L'application f est-elle une projection affine ?

Rép.– Pas nécessairement. Soit $\overrightarrow{d} \in \overrightarrow{D}$ un vecteur non nul et $f = t_{\overrightarrow{d}} \circ p$. Alors $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{p}$ mais f n'est pas une projection affine puisqu'elle est sans point fixe.

4) Soient H, H' et H'' trois hyperplans parallèles, D_1 et D_2 deux droites donc aucune n'est contenue dans un hyperplan parallèle à H. Soient $A_i = D_i \cap H$, $A'_i = D_i \cap H'$ et $A''_i = D_i \cap H''$, $i = 1$ ou 2. Montrer que

$$\frac{\overline{A_1A''_1}}{\overline{A_1A'_1}} = \frac{\overline{A_2A''_2}}{\overline{A_2A'_2}}.$$

Rép.– Soit $p : E \longrightarrow E$ la projection sur D_2 parallèlement à $\overrightarrow{H}$. Cette projection envoie A_1 sur A_2, A'_1 sur A'_2 et A''_1 sur A''_2. Puisque p est une application est affine, p conserve le rapport vectoriel et donc

$$\frac{\overline{A_1A''_1}}{\overline{A_1A'_1}} = \frac{\overline{A_2A''_2}}{\overline{A_2A'_2}}.$$

5) Soit B un point de D_1 vérifiant l'égalité

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1A_1'}} = \frac{\overline{A_2A_2''}}{\overline{A_2A_2'}}.$$

Montrer que $B = A_1''$.

Rép.– L'égalité $\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1A_1'}} = \frac{\overline{A_2A_2''}}{\overline{A_2A_2'}}$ implique que

$$\overrightarrow{A_1B} = \frac{\overline{A_2A_2''}}{\overline{A_2A_2'}}\overrightarrow{A_1A_1'}.$$

De même, l'égalité $\frac{\overline{A_1A_1''}}{\overline{A_1A_1'}} = \frac{\overline{A_2A_2''}}{\overline{A_2A_2'}}$ implique que

$$\overrightarrow{A_1A_1''} = \frac{\overline{A_2A_2''}}{\overline{A_2A_2'}}\overrightarrow{A_1A_1'}.$$

La comparaisons de ces deux résultats conduit à $B = A_1''$.

6) Soit ABC un triangle non plat et Δ une droite du plan (ABC) ne passant pas par les sommets et coupant (BC), (CA) et (AB) respectivement en P, Q, R. Soit enfin B' intersection de la droite (AC) avec la parallèle à Δ passant par B. Montrer que

a) $\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB'}}$,

b) $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{QB'}}{\overline{QC}}$,

c) $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1.$

Rép.– a) C'est une conséquence immédiate du théorème de Thalès (question 4)
b) Idem
c) On a

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{QB'}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{QA}}{\overline{QB'}} = 1.$$

7) Si f et g sont deux applications affines, montrer que $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$.

Rép.– On note $M' = g(M)$ et $N' = g(N)$. On a

$$\overrightarrow{f \circ g(M) f \circ g(N)} = \overrightarrow{f(M')f(N')} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{M'N'}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{g(M)g(N)}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{g}(\overrightarrow{MN})).$$

Ainsi $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$.

8) Démontrer que h est une homothétie affine de rapport k ($\neq 1$) ssi $\overrightarrow{h}$ est une homothétie vectorielle de même rapport [1]. En déduire que si h_1 et h_2 sont deux homothéties de E de rapport k_1 et k_2 respectivement et si $k_1 k_2 \neq 1$ alors $h_1 \circ h_2$ est une homothétie de rapport $k_1 k_2$.

Rép.– On a

$$\overrightarrow{h(M)h(N)} = \overrightarrow{(\Omega + k\overrightarrow{\Omega M})(\Omega + k\overrightarrow{\Omega N})} = \overrightarrow{(\Omega + k\overrightarrow{\Omega M})(\Omega + k\overrightarrow{\Omega M} + k\overrightarrow{MN})} = k\overrightarrow{MN}.$$

Donc $\overrightarrow{h}$ est une homothétie vectorielle de rapport k.

Réciproquement, si $\overrightarrow{h}$ est une homothétie vectorielle de rapport k ($\neq 1$) alors h a nécessairement un point fixe unique. En effet, soit $O \in E$ un point quelconque, la relation de Grassmann s'écrit

$$h(M) = h(O) + \overrightarrow{h}(\overrightarrow{OM}) = O' + k\overrightarrow{OM} = O' + k\overrightarrow{OO'} + k\overrightarrow{O'M}$$

d'où

$$-\overrightarrow{O'M'} = k\overrightarrow{OO'} + k\overrightarrow{O'M}.$$

Ainsi M est point fixe de h ssi

$$-\overrightarrow{O'M} = k\overrightarrow{OO'} + k\overrightarrow{O'M} \iff \overrightarrow{O'M} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{OO'}.$$

On note Ω ce point fixe. Si on écrit de nouveau la relation de Grassmann, on obtient cette fois

$$h(M) = h(\Omega) + \overrightarrow{h}(\overrightarrow{\Omega M}) = \Omega + k\overrightarrow{\Omega M}$$

l'application h est donc une homothétie de rapport k et de centre Ω.

La déduction est immédiate. On a en effet

$$\overrightarrow{h_1 \circ h_2} = \overrightarrow{h_1} \circ \overrightarrow{h_2} = k_1 k_2 Id.$$

Puisque $k_1 k_2 \neq 1$, $h_1 \circ h_2$ est une homothétie et son rapport est celui de $\overrightarrow{h_1 \circ h_2}$, c'est-à-dire $k_1 k_2$.

1. Conventionnellement, l'identité n'est *pas* une homothétie.

9) On se propose de retrouver le résultat du 6) c) en introduisant trois homothéties du plan (ABC) judicieusement choisies. Soit h_1 l'homothétie de centre R et de rapport $\dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$, h_2 l'homothétie de centre Q et de rapport $\dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}}$ et h_3 l'homothétie de centre P et de rapport $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$.

a) Montrer que $h_3 \circ h_2 \circ h_1(\Delta) \subset \Delta$.

b) Montrer que $h_3 \circ h_2 \circ h_1$ n'est pas une homothétie.

c) En déduire que $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$.

Rép.– a) La droite Δ contient les trois centres des trois homothéties, donc $h = h_3 \circ h_2 \circ h_1$ préserve Δ.
b) On a $h_1(B) = A$, $h_2(A) = C$, $h_3(C) = B$ et donc $h_3 \circ h_2 \circ h_1(B) = B$. Or B n'est pas dans Δ par hypothèse, par conséquent $h_3 \circ h_2 \circ h_1$ ne peut être une homothétie sur (ABC).
c) D'après les questions 7 et 8, le produit des rapports $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$ des homothéties h_1, h_2 et h_3 vaut nécesairement 1 car sinon h serait une homothétie.