Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Corrigé du partiel du 13 octobre 2014

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Si f et g sont deux applications affines, montrer que $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$.

Rép.– On note $M' = g(M)$ et $N' = g(N)$. On a

$$\overrightarrow{f \circ g(M) f \circ g(N)} = \overrightarrow{f(M')f(N')} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{M'N'}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{g(M)g(N)}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{g}(\overrightarrow{MN})).$$

Ainsi $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$.

2.– Soit g une application affine. On suppose que $g \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ g$. Montrer que $\overrightarrow{u} \in Ker(\overrightarrow{g} - id)$.

Rép.– La relation de conjugaison s'écrit $g \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ g^{-1} = t_{\overrightarrow{g}(\overrightarrow{u})}$ d'où $g \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{g}(\overrightarrow{u})} \circ g$. L'hypothèse $g \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ g$ implique donc $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ *i. e.* $\overrightarrow{u} \in Ker(\overrightarrow{g} - id)$.

3.– Montrer que si le sous-espace affine $Fix\ f$ des points fixes d'une isométrie plane f est une droite, alors f est une réflexion par rapport à $D = Fix\ f$.

Rép.– Soient $N \in D$ et $M \notin D$. Puisque f est une isométrie, $M'N' = MN$ et comme $N \in D$ on a aussi $M'N' = M'N$. En fin de compte, $M'N = MN$ et donc N appartient à la médiatrice Δ de $[M, M']$. Ainsi $D = Fix\ f \subset \Delta$ et pour des questions de dimension $D = \Delta$. En particulier M' est le symétrique de M par rapport à D et f est une réflexion.

4.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une isométrie. Montrer que $Ker(\overrightarrow{f} - id) \perp Im(\overrightarrow{f} - id)$.

Rép.– Soit $\overrightarrow{x} \in \ Ker(\overrightarrow{f} - id)$ et $\overrightarrow{y} \in Im(\overrightarrow{f} - id)$. On a donc $(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$ et il existe $\overrightarrow{z} \in \overrightarrow{E}$ tel que $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{z}) - \overrightarrow{z}$. Ainsi

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{z}) - \overrightarrow{z} \rangle = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{z}) \rangle - \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{z} \rangle = \langle \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{z}) \rangle - \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{z} \rangle = 0$$

car $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle.

5.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une isométrie, $F = Fix\ f$, $A \in E \setminus F$, $A' = f(A)$, H l'hyperplan médiateur de $[A, A']$ et s_H la réflexion hyperplane d'hyperplan H. Montrer que $Fix\ g$ où $g = s_H \circ f$ contient F et A.

Rép.– Notons que A est fixe par g puisque $s_H(A') = A$.
Soit $M \in F$ alors $A'M' = AM$ car f est une isométrie et $A'M = AM$ car M est fixe. Donc M est dans l'hyperplan médiateur de $[A, A']$, i. e. $M \in H$. Mais alors $g(M) = M$ et $M \in Fix\ g$.

Le problème. – (10 pts)

1) Soient E un espace affine et $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme affine [1] non constante.

a) Montrer que $\overrightarrow{\varphi} : \overrightarrow{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ est non constante et que son noyau ker $\overrightarrow{\varphi}$ est un hyperplan vectoriel de $\overrightarrow{E}$

b) Montrer que $H := \{M \in E \mid \varphi(M) = 0\}$ est non vide.

c) Montrer que H est un hyperplan affine de direction $\overrightarrow{H} = \ker \overrightarrow{\varphi}$.

Rép.– a) Soit $O \in E$. La formule de Grassmann

$$\varphi(M) = \varphi(O) + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OM})$$

implique que si φ n'est pas constante, alors $\overrightarrow{\varphi}$ est non nulle. Ainsi dim $Im\ \overrightarrow{\varphi} = 1$. La formule de la dimension

$$\dim\ \ker \overrightarrow{\varphi} + \dim\ Im\ \overrightarrow{\varphi} = \dim\ \overrightarrow{E}$$

montre que le noyau de $\overrightarrow{\varphi}$ est un hyperplan vectoriel.

b) Soit $O \in E$. Si $\varphi(O) = 0$ alors $O \in H$ et H est non vide. Supposons $\varphi(O) = a \neq 0$. Puisque $\overrightarrow{\varphi}$ est une forme non nulle, elle est surjective sur $\mathbb{R}$ et il existe $A \in E$ tel que $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OA}) = -a$. La formule de Grassmann

$$\varphi(A) = \varphi(O) + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AM})$$

1. Autrement dit, une application affine à valeur dans $\mathbb{R}$.

montre alors que $\varphi(A)=0$. Ainsi $A\in H$ et H est non vide.

c) Puisque H est non vide, il existe $A\in H$ et

$$\begin{array}{rcl} H & = & \{M\in E \mid \varphi(M)=0\} \\ & = & \{M\in E \mid \varphi(A)+\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AM})=0\} \\ & = & \{M\in E \mid \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AM})=0\} \\ & = & \{M\in E \mid \overrightarrow{AM}\in \ker\overrightarrow{\varphi}\} \\ & = & \{M\in E \mid M\in A+\ker\overrightarrow{\varphi}\} \\ & = & A+\ker\overrightarrow{\varphi}. \end{array}$$

2) Soit $\overrightarrow{u}\in\overrightarrow{H}$ un vecteur non nul. On pose

$$\begin{array}{rccl} t: & E & \longrightarrow & E \\ & M & \longmapsto & M'=M+\varphi(M)\overrightarrow{u} \end{array}$$

Une telle application s'appelle une *transvection* d'hyperplan H.

a) Montrer que t est une application affine.

b) Montrer que t est injective.

Rép.– a) Soit $O\in E$, on a

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{t(O)t(M)} & = & \overrightarrow{(O+\varphi(O)\overrightarrow{u})(M+\varphi(M)\overrightarrow{u})} \\ & = & \overrightarrow{(M+\overrightarrow{MO}+\varphi(O)\overrightarrow{u})(M+\varphi(M)\overrightarrow{u})} \end{array}$$

Posons $N=M+\overrightarrow{MO}+\varphi(O)\overrightarrow{u}$. On a maintenant

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{t(O)t(M)} & = & \overrightarrow{N(N-\overrightarrow{MO}-\varphi(O)\overrightarrow{u}+\varphi(M)\overrightarrow{u})} \\ & = & -\overrightarrow{MO}-\varphi(O)\overrightarrow{u}+\varphi(M)\overrightarrow{u} \\ & = & \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OM})\overrightarrow{u}. \end{array}$$

L'application $\overrightarrow{t}:\overrightarrow{E}\longrightarrow\overrightarrow{E}$ définie par $\overrightarrow{t}(\overrightarrow{v}):=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{v})\overrightarrow{u}$ est évidemment linéaire et vérifie pour tout $M\in E$, $\overrightarrow{t(O)t(M)}=\overrightarrow{t}(\overrightarrow{OM})$. Par conséquent t est une application affine.

b) Soient A et B deux points de E tels que $t(A)=t(B)$. Alors :

$$A+\varphi(A)\overrightarrow{u}=B+\varphi(B)\overrightarrow{u}$$

d'où, en utilisant la formule de Grassmann, $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AB})\overrightarrow{u}$. Si $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AB})=0$ alors A=B. Supposons $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AB})\neq 0$. Ceci entraîne que $\overrightarrow{AB}\in Vect(\overrightarrow{u})$. Or $\overrightarrow{u}\in\overrightarrow{H}=\ker\ \overrightarrow{\varphi}$. Donc $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AB})=0$. Contradiction. En fin de compte, l'application t est injective.

3) Montrer que tout application affine $f : E \longrightarrow E$ qui est injective est bijective. En déduire que t est bijective.

Rép.– Montrons d'abord que si f est injective alors $\overrightarrow{f}$ l'est également. Si $\overrightarrow{AB}$ est tel que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = 0$ alors, par la formule de Grassmann, $f(A) = f(B)$ et comme f est injective cela implique $A = B$. Donc $\ker \overrightarrow{f} = \{\overrightarrow{0}\}$ et $\overrightarrow{f}$ est injective. La formule de la dimension

$$\dim \overrightarrow{E} = \dim \ker \overrightarrow{f} + \dim \operatorname{im} \overrightarrow{f}$$

montre ensuite que $\overrightarrow{f}$ est surjective. Soit $O \in E$ une origine et $O' = f(O)$ son image. Pour montrer que f est surjective, il faut trouver un antécédant à tout point $M' \in E$. Puisque $\overrightarrow{f}$ est surjective, il existe $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$ tel que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{O'M'}$. Soit M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{v}$. La formule de Grassmann montre que $f(M) = M'$. Ainsi f est surjective.

4) On considère la transvection

$$\begin{array}{rccl} \bar{t}: & E & \longrightarrow & E \\ & M & \longmapsto & M' = M - \varphi(M)\overrightarrow{u}. \end{array}$$

Déterminer $t \circ \bar{t}$ et $\bar{t} \circ t$.

Rép.– On a

$$\begin{array}{rcl} t \circ \bar{t}(M) & = & \bar{t}(M) + \varphi(\bar{t}(M))\overrightarrow{u} \\ & = & (M - \varphi(M)\overrightarrow{u}) + \varphi(M - \varphi(M)\overrightarrow{u})\overrightarrow{u} \\ & = & M - \varphi(M)\overrightarrow{u} + \varphi(M)\overrightarrow{u} - \overrightarrow{\varphi}(\varphi(M)\overrightarrow{u})\overrightarrow{u} \\ & = & M - \varphi(M)\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{u})\overrightarrow{u} \end{array}$$

Or $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{H} = \ker \overrightarrow{\varphi}$, donc $t \circ \bar{t}(M) = M$. De même, $\bar{t} \circ t(M) = M$. Ainsi $\bar{t} = t^{-1}$. L'inverse d'une transvection est une transvection.

5) Soit $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$. On note $T_{\overrightarrow{v}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$. Montrer que
a) $Fix\ t = H$.
b) $t(T_{\overrightarrow{v}}(H)) \subset T_{\overrightarrow{v}}(H)$.

Rép.– a) On a $t(M) = M$ si et seulement si $\varphi(M) = 0$. Donc $Fix\ t = H$.
b) Soit $B \in T_{\overrightarrow{v}}(H)$ et soit $A \in H$ tel que $B = T_{\overrightarrow{v}}(A)$. On a

$$\begin{array}{rcl} t(B) & = & B + \varphi(B)\overrightarrow{u} \\ & = & (A + \overrightarrow{v}) + \varphi(B)\overrightarrow{u} \\ & = & (A + \varphi(B)\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v} \\ & = & T_{\overrightarrow{v}}(A + \varphi(B)\overrightarrow{u}). \end{array}$$

Puisque $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{H}$, le point $A + \varphi(B)\overrightarrow{u}$ est dans $\overrightarrow{H}$ et donc $t(B) \in T_{\overrightarrow{v}}(H)$.

6) On appelle *transvection vectorielle* toute application de la forme

$$\begin{array}{rccl} \overrightarrow{t}: & \overrightarrow{E} & \longrightarrow & \overrightarrow{E} \\ & \overrightarrow{v} & \longmapsto & \overrightarrow{v} + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{v})\overrightarrow{u} \end{array}$$

où $\overrightarrow{\varphi} : \overrightarrow{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire.

a) Les transvections affines sont-elles caractérisées par le fait que leurs parties linéaires sont des transvections vectorielles ? Justifier.

b) Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine ayant au moins un point fixe et dont la partie linéaire est une transvection vectorielle. Montrer que f est une transvection affine.

Rép.– a) Non. Soit $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$ un vecteur non nul et non colinéaire à $\overrightarrow{u}$. On note $T_{\overrightarrow{v}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$. L'application affine $T_{\overrightarrow{v}} \circ t$ a pour partie linéaire une transvection vectorielle. Or $T_{\overrightarrow{v}} \circ t$ n'admet pas de point fixe. En effet

$$T_{\overrightarrow{v}} \circ t(M) = M \iff M + \varphi(M)\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = M \iff \overrightarrow{v} = -\varphi(M)\overrightarrow{u}$$

or $\overrightarrow{v}$ est choisi non colinéaire à $\overrightarrow{u}$. Donc $Fix\ T_{\overrightarrow{v}} \circ t = \emptyset$ et $T_{\overrightarrow{v}} \circ t$ ne peut être une transvection affine d'après la question précédente.

b) Soit O un point fixe pour f. La formule de Grassmann montre que pour tout $M \in E$ on a

$$\begin{array}{rcl} f(M) & = & O + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) \\ & = & O + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OM})\overrightarrow{u} \\ & = & M + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OM})\overrightarrow{u} \end{array}$$

On définit une forme affine $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ au moyen de la formule de Grassmann

$$\forall\, M \in E, \quad \varphi(M) := \varphi(O) + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OM})$$

et en posant $\varphi(O) = 0$. On constate alors que pour tout $M \in E$

$$f(M) = M + \varphi(M)\overrightarrow{u}.$$

Ainsi f est une transvection affine.

7) Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine qui fixe tous les points d'un hyperplan H et qui conserve globalement tous les plans parallèles à H.

i) Montrer que $\overrightarrow{f}$ est l'identité sur $\overrightarrow{H}$

ii) Montrer que le rang de $\overrightarrow{f} - \overrightarrow{id}$ est 1.

iii) Montrer que pour tout $\vec{v} \in \vec{E}$, $(\vec{f} - \vec{id})(\vec{v}) \in \vec{H}$.

Suggestion.– On pourra considérer un point A de $T_{\vec{v}}(H)$ et son image A' par f.

iv) Déduire de ii) et de iii) qu'il existe une forme linéaire $\vec{\varphi} : \vec{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ et un vecteur $\vec{u} \in \vec{H}$ non nul tel que pour tout

$$\forall \vec{v} \in \vec{E}, \quad (\vec{f} - \vec{id})(\vec{v}) = \vec{\varphi}(\vec{v})\vec{u}.$$

v) Montrer que f est une transvection.

Rép.– i) Il suffit de montrer que pour tout couple $(A, B) \in H \times H$ on a $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}$. La formule de Grassmann donne

$$f(B) = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AB})$$

et comme $f(B) = B$ et $f(A) = A$ on obtient $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}$.

ii) D'après i), $\ker(\vec{f} - \vec{id}) = \vec{H}$. La formule de la dimension montre alors que $\dim \ \mathrm{im}\ (\vec{f} - \vec{id}) = 1$.

iii) Soit $A \in T_{\vec{v}}(H)$. Il existe $O \in H$ tel que $A = O + \vec{v}$. La formule de Grassmann implique

$$A' = O + \vec{f}(\vec{v})$$

car $O \in H$ est fixe par f. Puisque f conserve globalement $T_{\vec{v}}(H)$, on a $A' \in T_{\vec{v}}(H)$ et par conséquent $\overrightarrow{AA'} \in \vec{H}$. Or $\overrightarrow{AA'} = \vec{f}(\vec{v}) - \vec{v}$. Donc $(\vec{f} - \vec{id})(\vec{v}) \in \vec{H}$.

iv) D'après ii), il existe $\vec{u} \in \vec{E}$ non nul tel que

$$\mathrm{im}\ (\vec{f} - \vec{id}) = \mathbb{R}\vec{u}$$

et d'après iii) $\vec{u} \in \vec{H}$. Ainsi, il existe $\vec{\varphi} : \vec{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall \vec{v} \in \vec{E}, \ (\vec{f} - \vec{id})(\vec{v}) = \vec{\varphi}(\vec{v})\vec{u}$$

et puisque $\vec{f} - \vec{id}$ est linéaire, $\vec{\varphi}$ est nécessairement linéaire.

v) D'après iv), $\vec{f}$ est une transvection linéaire et l'application f fixe au moins un point puisque qu'elle fixe tout l'hyperplan H. D'après 6.b. f est une transvection affine.