Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Corrigé du partiel du 12 octobre 2015

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points.

1.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une isométrie. Montrer que f est injective.

Rép.– Supposons qu'il existe M et N deux points distincts de E tels que $M' = N'$. Ainsi $M'N' = 0$. Puisque f est une isométrie, $M'N' = MN$ et comme M et N sont distincts, on a $MN \neq 0$. Contradiction.

2.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine bijective. Montrer que f^{-1} est affine.

Rép.– Soit $A \in E$. Pour tout $M \in E$, on définit une application affine $g : E \longrightarrow E$ par

$$g(M) := g(A') + (\overrightarrow{f})^{-1}(\overrightarrow{A'M})$$

où $A' = f(A)$. Notons que f étant inversible, $\overrightarrow{f}$ est également inversible car s'il existait $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{E}$ tel que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = 0$ alors la formule de Grassmann impliquerait $f(A) = f(B)$ ce qui contredirait la bijectivité de f. Montrons que $f \circ g = id_E$ et $g \circ f = id_E$ ce qui montrera que $g = f^{-1}$ et donc que f^{-1} est affine. On a

$$\begin{array}{rcl} f \circ g(M) & = & f(g(A') + (\overrightarrow{f})^{-1}(\overrightarrow{A'M})) \\ & = & f(g(A')) + \overrightarrow{f} \circ (\overrightarrow{f})^{-1}(\overrightarrow{A'M}) \\ & = & A' + \overrightarrow{A'M} \\ & = & M \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} g \circ f(M) & = & g(f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM})) \\ & = & g(f(A)) + (\overrightarrow{f})^{-1} \circ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}) \\ & = & A + \overrightarrow{AM} \\ & = & M \end{array}$$

3.– Soient $F \subset E$ un sous-espace affine non vide et $f : E \longrightarrow H$ une application affine. Montrer que $f(F) \subset H$ est un sous-espace affine.

Rép.– Soit $A \in F$, il faut montrer que $\overrightarrow{f(F)} = \{\overrightarrow{A'M'} \mid M' \in f(F)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{H}$. Or,

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{f(F)} & = & \{\overrightarrow{A'M'} \mid \exists M \in F,\ M' = f(M)\} \\ & = & \{\overrightarrow{A'M'} \mid \exists M \in F,\ \overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{f(A)f(M)}\} \\ & = & \{\overrightarrow{A'M'} \mid \exists M \in F,\ \overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM})\} \end{array}$$

car f est affine. Ainsi $\overrightarrow{f(F)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM})$. Par conséquent $\overrightarrow{f(F)}$ est un sous-espace vectoriel car c'est l'image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.

4.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine inversible et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$. Montrer que $f \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ f^{-1} = t_{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})}$.

Rép.– Soit M' un point de E et $M = f^{-1}(M')$. On a

$$f \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ f^{-1}(M') = f \circ t_{\overrightarrow{u}}(M) = f(M + \overrightarrow{u}) = f(M) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = M' + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$$

5.– Soient $h_{I,k}$ (resp. $h_{J,k^{-1}}$) l'homothétie de centre $I \in E$ (resp. $J \in E$) et de rapport $k > 0$ (resp. k^{-1}). Montrer que $h_{I,k} \circ h_{J,k^{-1}}$ est une translation de vecteur $(k-1)\overrightarrow{IJ}$. On admettra que les applications affines dont la partie linéaire est l'identité sont des translations.

Rép.– La partie linéaire de $h_{I,k} \circ h_{J,k^{-1}}$ est une homothétie vectorielle de rapport $kk^{-1} = 1$, c'est donc l'identité. Ainsi $h_{I,k} \circ h_{J,k^{-1}}$ est une translation $t_{\overrightarrow{v}}$ avec $\overrightarrow{v} = JJ'$ où $J' = h_{I,k} \circ h_{J,k^{-1}}(J)$. Puisque $\overrightarrow{IJ'} = k\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IJ'} = (k-1)\overrightarrow{IJ}$.

Le problème. – (10 pts) Dans tout ce problème on identifie l'espace affine euclidien orienté $\mathbb{R}^2$ au corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. On note $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$ tel que $0 = O$, $1 = O + \overrightarrow{u}$ et $i = O + \overrightarrow{v}$. Comme toujours, on commet l'abus de notation consistant à confondre un nombre complexe et son affixe, en particulier $z = x + iy = O + x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.

1) a) Soit $f : \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ une application affine. Montrer qu'il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{R}^6$ tels que

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad f(z) = (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1) + i(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)$$

et interpréter géométriquement les cœfficients $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1$ et γ_2.
b) Montrer qu'il existe $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$ et $c = c_1 + ic_2$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = az + b\bar{z} + c$$

et déterminer a, b et c en fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$.

Rép.– a) Dans le repère affine $(O; A_1, A_2)$ on a

$$z = O + x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}.$$

Ainsi, puisque f est affine,

$$\begin{aligned} f(z) &= f(O + x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}) \\ &= f(O) + x\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) + y\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) \end{aligned}$$

avec

$$f(O) = O + \gamma_1\overrightarrow{u} + \gamma_2\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \alpha_1\overrightarrow{u} + \alpha_2\overrightarrow{v}, \quad \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = \beta_1\overrightarrow{u} + \beta_2\overrightarrow{v}$$

d'où l'existence des $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ et leur interprétation géométrique.
b) Il suffit de développer $f(z) = az + b\bar{z} + c$ et d'identifier avec a). On obtient

$$f(z) = (a_1 + b_1)x + (b_2 - a_2)y + i(a_2 + b_2)x + i(a_1 - b_1)y$$

d'où

$$a_1 = \frac{\alpha_1 + \beta_2}{2},\ a_2 = \frac{\alpha_2 - \beta_1}{2},\ b_1 = \frac{\alpha_1 - \beta_2}{2},\ b_2 = \frac{\alpha_2 + \beta_1}{2},\ c_1 = \gamma_1, c_2 = \gamma_2.$$

2) On appelle *similitudes* du plan les transformations $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui conservent le rapport des distances, i. e. il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, p \neq q, \quad \frac{|f(p) - f(q)|}{|p - q|} = k$$

Montrer qu'une application affine $f(z) = az + b\bar{z} + c$ est une similitude du plan si et seulement si

$$(a = 0 \text{ et } b \neq 0) \quad \text{ou} \quad (a \neq 0 \text{ et } b = 0).$$

Rép.– On a

$$\frac{|f(p) - f(q)|}{|p - q|} = \frac{|a(p - q) + b\overline{(p - q)}|}{|p - q|} = \begin{cases} |a + b| & \text{if } p - q \in \mathbb{R} \\ |a - b| & \text{if } p - q \in i\mathbb{R} \end{cases}$$

Il faut donc nécessairement que $a = 0$ ou $b = 0$ (mais pas simultanément car alors $k = 0$ et f ne serait pas une transformation). Réciproquement, il est facile de vérifier que toute application de la forme

$$f(z) = az + c \quad \text{ou} \quad f(z) = b\bar{z} + c$$

est une similitude de rapport $k = |a|$ ou $|b|$.

3) On va montrer que les similitudes du plan sont nécessairement des applications affines. Soit

$$\begin{array}{cccc} \tilde{f}: & \overrightarrow{\mathbb{R}^2} & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathbb{R}^2} \\ & \overrightarrow{w} & \longmapsto & \overrightarrow{f(O)f(O+\overrightarrow{w})} \end{array}$$

a) Montrer que pour tout $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{\mathbb{R}^2}$, on a $\|\tilde{f}(\overrightarrow{w})\| = k\|\overrightarrow{w}\|$

b) Montrer que pour tout $(\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2) \in \overrightarrow{\mathbb{R}^2} \times \overrightarrow{\mathbb{R}^2}$, on a

$$\|\tilde{f}(\overrightarrow{w}_1) - \tilde{f}(\overrightarrow{w}_2)\| = k\|\overrightarrow{w}_1 - \overrightarrow{w}_2\|$$

c) Montrer que pour tout $(\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2) \in \overrightarrow{\mathbb{R}^2} \times \overrightarrow{\mathbb{R}^2}$, on a

$$\langle \tilde{f}(\overrightarrow{w}_1), \tilde{f}(\overrightarrow{w}_2)\rangle = k^2\langle \overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2\rangle$$

d) Montrer que pour tout $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, tout $(\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2) \in \overrightarrow{\mathbb{R}^2} \times \overrightarrow{\mathbb{R}^2}$, on a

$$\|\tilde{f}(\alpha_1\overrightarrow{w}_1 + \alpha_2\overrightarrow{w}_2) - \alpha_1\tilde{f}(\overrightarrow{w}_1) - \alpha_2\tilde{f}(\overrightarrow{w}_2)\| = 0$$

e) En déduire de que les similitudes du plan sont les applications de la forme $f(z) = az + c$ (similitudes directes) ou $f(z) = a\bar{z} + c$ (similitudes indirectes) avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $c \in \mathbb{C}$.

Rép.– a) Puisque $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$, il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$. Ainsi

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f}(\overrightarrow{w}) & = & \overrightarrow{f(O)f(O+\overrightarrow{w})} \\ & = & \overrightarrow{f(O)f(O+x\overrightarrow{u}+y\overrightarrow{v})} \\ & = & \overrightarrow{f(0)f(z)} \\ & = & f(z) - f(0) \end{array}$$

et

$$\|\tilde{f}(\overrightarrow{w})\| = |f(z) - f(0)| = k|z - 0| = k\|\overrightarrow{w}\|$$

b) On a, avec des notations évidentes,

$$\begin{array}{rcl}\tilde{f}(\overrightarrow{w}_1)-\tilde{f}(\overrightarrow{w}_2) & = & \overrightarrow{f(O)f(O+\overrightarrow{w}_1)}-\overrightarrow{f(O)f(O+\overrightarrow{w}_2)}\\ & = & (f(z_1)-f(0))-(f(z_2)-f(0))\\ & = & f(z_1)-f(z_2)\end{array}$$

et

$$\|\tilde{f}(\overrightarrow{w}_1)-\tilde{f}(\overrightarrow{w}_2)\|=|f(z_1)-f(z_2)|=k|z_1-z_2|=k\|\overrightarrow{w}_1-\overrightarrow{w}_2\|$$

c) On remarque d'abord que,

$$-2\langle\tilde{f}(\overrightarrow{w}_1),\tilde{f}(\overrightarrow{w}_2)\rangle=\|\tilde{f}(\overrightarrow{w}_1)-\tilde{f}(\overrightarrow{w}_2)\|^2-\|\tilde{f}(\overrightarrow{w}_1)\|^2-\|\tilde{f}(\overrightarrow{w}_2)\|^2$$

D'après les question b) et c), on a donc

$$\begin{array}{rcl}-2\langle\tilde{f}(\overrightarrow{w}_1),\tilde{f}(\overrightarrow{w}_2)\rangle & = & \|\overrightarrow{w}_1-\overrightarrow{w}_2\|^2-\|\overrightarrow{w}_1\|^2-\|\overrightarrow{w}_2\|^2\\ & = & -2\langle\overrightarrow{w}_1,\overrightarrow{w}_2\rangle\end{array}$$

d) Notons

$$A(\tilde{f}):=\tilde{f}(\alpha_1\overrightarrow{w}_1+\alpha_2\overrightarrow{w}_2)-\alpha_1\tilde{f}(\overrightarrow{w}_1)-\alpha_2\tilde{f}(\overrightarrow{w}_2)$$

On a

$$\begin{array}{rcl}\|A(\tilde{f})\|^2 & = & \langle A(\tilde{f}),A(\tilde{f})\rangle\\ & = & \langle\tilde{f}(\alpha_1\overrightarrow{w}_1+\alpha_2\overrightarrow{w}_2),\tilde{f}(\alpha_1\overrightarrow{w}_1+\alpha_2\overrightarrow{w}_2)\rangle+...\\ & = & \langle\alpha_1\overrightarrow{w}_1+\alpha_2\overrightarrow{w}_2,\alpha_1\overrightarrow{w}_1+\alpha_2\overrightarrow{w}_2\rangle+...\\ & = & \langle A(id),A(id)\rangle\end{array}$$

Mais $A(id)=0$.

e) De la question d), on déduit $A(\tilde{f})=0$, c'est-à-dire que $\tilde{f}$ est linéaire et donc f est affine. D'après la question 2, f est nécessairement de la forme annoncée dans la question.

4) Montrer qu'une similitude $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ de rapport $k\neq 1$ possède un unique point fixe Ω. Ce point fixe est appelé le *centre* de la similitude.

Rép.– Supposons d'abord que f soit de la forme $f(z)=az+c$ avec $a\in\mathbb{C}^*$ et $c\in\mathbb{C}$. Alors z est point fixe de f si seulement si

$$f(z)=z\iff az+c=z\iff z=\frac{c}{1-a}$$

Notons que le numérateur ne s'annule pas puisque $k=|a|\neq 1$ Ainsi f admet un unique point fixe Ω d'affixe $\omega=\frac{c}{1-a}$.
Supposons maintenant que f est de la forme $f(z)=a\bar{z}+c$. On a

$$f(z)=z\Rightarrow f(f(z))=z\iff a(\ \bar{a}z+\bar{c})+c=z\iff z=\frac{c+a\bar{c}}{1-|a|^2}$$

Ainsi $\omega=\frac{c+a\bar{c}}{1-|a|^2}$ est l'unique point fixe de $f\circ f$ et l'ensemble des fixes de f est soit vide, soit le singleton $\{\omega\}$. Un simple calcul montre que $f(\omega)=\omega$ qui est donc l'unique point fixe de f.

5) Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une similitude de centre Ω et de rapport $k \neq 1$. On considère l'homothétie $h_{\Omega,1/k} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de centre Ω et de rapport $1/k$ et on pose $g := h_{\Omega,1/k} \circ f$.
a) Montrer que g admet Ω comme point fixe.
b) On suppose $f(z) = az + c$. Montrer que g est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle en fonction de a et de ω.
c) On suppose $f(z) = a\bar{z} + c$. Donner l'écriture complexe de g en fonction de a et de ω puis décrire la nature géométrique de g.

Rép.– a) Clairement Ω est point fixe de g car il l'est de f et de $h_{\Omega,1/k}$.
b) L'homothétie $h_{\Omega,1/k}$ a pour écriture complexe

$$h_{\Omega,1/k}(z) = \frac{1}{k}(z - \omega) + \omega$$

Supposons que $f(z) = az + c$ alors

$$\begin{aligned} g(z) &= h_{\Omega,1/k} \circ f(z) = \tfrac{1}{k}(az + c - \omega) + \omega = \tfrac{1}{|a|}(az + c - \tfrac{c}{1-a}) + \omega \\ &= \tfrac{a}{|a|}(z - \tfrac{c}{1-a}) + \omega = \tfrac{a}{|a|}(z - \omega) + \omega \end{aligned}$$

Ainsi g est une rotation affine de centre Ω et d'angle l'argument du nombre complexe a.
c) Supposons que $f(z) = a\bar{z} + c$ alors

$$\begin{aligned} g(z) &= h_{\Omega,1/k} \circ f(z) = \tfrac{1}{k}(a\bar{z} + c - \omega) + \omega = \tfrac{1}{|a|}(a\bar{z} + c - \tfrac{c+a\bar{c}}{1-|a|^2}) + \omega \\ &= \tfrac{a}{|a|}(\bar{z} - \tfrac{\bar{a}c+\bar{c}}{1-|a|^2}) + \omega = \tfrac{a}{|a|}(\bar{z} - \bar{\omega}) + \omega \end{aligned}$$

Ainsi g est une réflexion affine dont l'axe passe par Ω et fait un angle $\frac{1}{2}Arg(a)$ avec l'horizontale.

6) Montrer que toute similitude f avec $k \neq 1$ est la composée commutative d'une homothétie et d'une isométrie admettant le centre de l'homothétie comme point fixe.

Rép.– D'après la question précédente

$$g := h_{\Omega,1/k} \circ f \iff f = h_{\Omega,k} \circ g$$

où g est une isométrie (rotation ou réflexion) dont Ω est point fixe. (Si on se refuse d'admettre *a priori* que g est une isométrie, on peut le démontrer directement par le calcul. Par exemple dans le cas d'une similitude directe, on a

$$|g(p) - g(q)| = \left|\frac{a}{|a|}(p - \omega) - \frac{a}{|a|}(q - \omega)\right| = \left|\frac{a}{|a|}(p - q)\right| = |p - q|$$

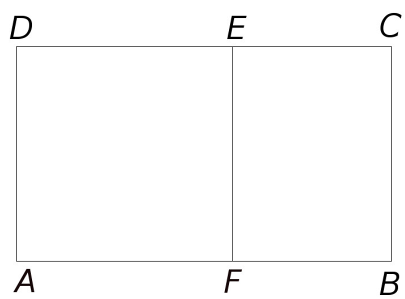
ainsi g est une isométrie. Le calcul est tout à fait similaire dans le cas indirect). La commutativité s'obtient par le calcul. Si $f(z) = az + c$ alors $g(z) = \frac{a}{|a|}(z - \omega) + \omega$

$$h_{\Omega,k} \circ g(z) = \frac{1}{k}(g(z) - \omega) + \omega = \frac{1}{|a|}(\frac{a}{|a|}(z - \omega) + \omega - \omega) + \omega = \frac{a}{|a|^2}(z - \omega) + \omega$$

$$g \circ h_{\Omega,k}(z) = \frac{a}{|a|}(h_{\Omega,k}(z) - \omega) + \omega = \frac{a}{|a|}(\frac{1}{k}(z - \omega) + \omega - \omega) + \omega = \frac{a}{|a|^2}(z - \omega) + \omega$$

Ainsi $h_{\Omega,k} \circ g = g \circ h_{\Omega,k}$. Calculs similaires dans le cas indirect.

7) Soit $R = (ABCD)$ un rectangle avec $AB > BC$ et $R' = (BCEF)$ un autre rectangle tel que $E \in]CD[$ et $F \in]AB[$. On suppose qu'il existe une similitude directe f telle que $f(R) = R'$.
a) Montrer par l'absurde que $f([AB]) = [EF]$ ou $[BC]$. En déduire le rapport k de la similitude et montrer que son angle vaut $\pm\frac{\pi}{2}$
b) Montrer que $f([AC]) = [EB]$.
c) On suppose désormais que $f(A) = B$. Que valent $f(B)$, $f(C)$ et $f(D)$?
d) Montrer que $f \circ f$ est une homothétie de même centre que f.
e) Déterminer le centre de f.



Rép.– a) Supposons $f([AB]) = [BF]$ ou $[EC]$ alors $f([AD]) = [EF]$ ou $[CB]$. La conservation des rapports de longueurs implique

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BF}{EF}$$

or $AD = EF$ donc $AB = BF$. Puisque $F \in]AB[$, on a $BF < AB$. Contradiction. On a donc $f([AB]) = [EF]$ ou $[BC]$. Par conséquent le rapport de la similitude vaut $k = BC/AB$. Puisque (EF) et (BC) sont perpendiculaires à (AB), on en déduit que l'angle vaut $\pm\frac{\pi}{2}$.
b) $f([AC])$ est l'un des $6 = C_4^2$ segments obtenus en choisissant deux sommets parmi les quatre du rectangle $BCEF$. Les quatre segments correspondant aux côtés du rectangle

$BCEF$ sont à exclure car ils sont déjà l'image des quatre côtés du rectangle $ABCD$ et une similitude est inversible. Il ne reste donc que les diagonales $[EB]$ et $[FC]$. Mais $[FC]$ n'est pas perpendiculaire à $[AC]$, nécessairement $f([AC]) = [EB]$.
c) Puisque $f(A) = B$ alors d'après la question a), on doit avoir $f([AB]) = [BC]$ et donc $f(B) = C$. D'après la question b), $f([AC]) = [EB]$ et donc $f(C) = E$. Enfin, $f(E) = A$.
d) D'après la question 5 et la question a), on a $f = h_{\Omega,k} \circ g = g \circ h_{\Omega,k}$ où g est une rotation d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$ et de centre Ω Ainsi

$$f \circ f = (h_{\Omega,k} \circ g) \circ (g \circ h_{\Omega,k}) = h_{\Omega,k} \circ (g \circ g) \circ h_{\Omega,k} = h_{\Omega,k} \circ -Id \circ h_{\Omega,k} = -h_{\Omega,k^2}$$

e) Notons $\mathcal{H} = f \circ f$. D'après c) l'homothétie $\mathcal{H}$ conserve la droite (AC) et la droite (BE). Le centre Ω de $\mathcal{H}$ (et de f) est donc le point d'intersection de (AC) et de (BE).