Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Corrigé du partiel du 10 octobre 2019

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points. Sauf mention explicite du contraire, les espaces affines (et vectoriels) considérés sont de dimension finie.

1.– Si f et g sont deux applications affines, montrer que $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$.

Rép.– On note $M' = g(M)$ et $N' = g(N)$. On a

$$\overrightarrow{f \circ g(M) f \circ g(N)} = \overrightarrow{f(M')f(N')} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{M'N'}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{g(M)g(N)}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{g}(\overrightarrow{MN})).$$

Ainsi $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$.

2.– Soient $F \subset E$ un sous-espace affine non vide et $f : E \longrightarrow H$ une application affine. Montrer que $f(F) \subset H$ est un sous-espace affine.

Rép.– Soit $A \in F$, il faut montrer que $\overrightarrow{f(F)} = \{\overrightarrow{A'M'} \mid M' \in f(F)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{H}$. Or,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f(F)} &= \{\overrightarrow{A'M'} \mid \exists M \in F,\ M' = f(M)\} \\
&= \{\overrightarrow{A'M'} \mid \exists M \in F,\ \overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{f(A)f(M)}\} \\
&= \{\overrightarrow{A'M'} \mid \exists M \in F,\ \overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM})\}
\end{aligned}$$

car f est affine. Ainsi $\overrightarrow{f(F)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM})$. Par conséquent $\overrightarrow{f(F)}$ est un sous-espace vectoriel car c'est l'image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.

3.– Montrer que si $\overrightarrow{f} = kId$, $k \neq 1$, alors f est une homothétie dont on déterminera le rapport et le centre.

Rép.– Montrons d'abord que f a un point fixe. Soient O et M deux points quelconques, la formule de Grassmann s'écrit

$$f(M) = f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})$$

soit encore
$$M' = O' + k\overrightarrow{OM} = O' + k\overrightarrow{OO'} + k\overrightarrow{O'M}$$
d'où
$$\overrightarrow{O'M'} - k\overrightarrow{O'M} = k\overrightarrow{OO'}$$
et M est fixe si et seulement si
$$\overrightarrow{O'M'} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{OO'}.$$
On note I l'unique point fixe de f caractérisé par la relation
$$\overrightarrow{O'I} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{OO'}.$$
On a
$$M' = I + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{IM}) \Rightarrow IM' = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{IM}) = k\overrightarrow{IM}$$
et f est une homothétie de centre I et de rapport k.

4.– Soit $O \in E$. Montrer que tout élément $f \in GA(E)$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $f = t \circ g$ où t est une translation et g un élément de $GA(E)$ qui fixe O.

Rép.– Soit $O' = f(O)$. On définit g en posant
$$g := t_{-\overrightarrow{OO'}} \circ f \qquad (*)$$
On a $g(O) = 0$ et g est composée de deux éléments de $GA(E)$, donc $g \in GA(E)$. Il suffit d'inverser $(*)$ pour obtenir $f = t \circ g$. Supposons $f = t_1 \circ g_1 = t_2 \circ g_2$ Ceci implique $t_1 \circ g_1(O) = t_2 \circ g_2(O)$ d'où $t_1(O) = t_2(O)$ et donc $t_1 = t_2$. Mais alors $g_1 = t_1^{-1} \circ f = t_2^{-1} \circ f = g_2$ d'où l'unicité de la décomposition.

5.– Soient D et D' deux droites parallèles du plan et s_D, $s_{D'}$ les réflexions par rapport à ces droites. Déterminer $s_{D'} \circ s_D$.

Rép.– Soit M un point du plan et $M' = s_D(M)$, $M'' = s_{D'}(M')$. On note H (resp. H') la projection orthogonale de M sur D (resp. de M' sur D'). On a
$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HM'} = 2\overrightarrow{HM'}$$
et
$$\overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{M'H'} + \overrightarrow{H'M''} = 2\overrightarrow{M'H'}$$
D'où $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{HH'}$. Observons que le vecteur $\overrightarrow{HH'}$ ne dépend pas de M. C'est l'unique vecteur tel que $\overrightarrow{HH'} \perp \overrightarrow{D}$ et $t_{\overrightarrow{HH'}}(D) = D'$. Ainsi $s_{D'} \circ s_D = t_{2\overrightarrow{HH'}}$

Le problème. – (10 pts) On note E un espace affine de dimension deux et $\overrightarrow{E}$ sa direction. Le but de ce problème est d'étudier les applications $f : E \to E$ telle que $f \circ f = f$. De telles applications sont dites *idempotentes* d'ordre 2.

Première partie : applications idempotentes.– On note $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ un repère de E et (x, y) les coordonnées dans ce repère.

1) Soit $f : E \to E$ donnée dans le repère $\mathcal{R}$ par $f(x, y) = (|x|, |y|)$. Ceci signifie que si $M = O + x\overrightarrow{e}_1 + y\overrightarrow{e}_2$ alors

$$f(M) = O + |x|\overrightarrow{e}_1 + |y|\overrightarrow{e}_2$$

a) Montrer que f est idempotente d'ordre 2.

b) Soit $\tilde{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}$ définie par $\tilde{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)}$. Montrer que $\tilde{f}(\overrightarrow{e}_1) = \overrightarrow{e}_1$ et que $\tilde{f}(-\overrightarrow{e}_1) = \overrightarrow{e}_1$.

c) L'application f est-elle affine ? Justifier.

Rép.– a) Notons $f = (f_1, f_2)$ les fonctions coordonnées. On a

$$f(f(x,y)) = f(f_1(x,y), f_2(x,y)) = (\big|f_1(x,y)\big|, \big|f_2(x,y)\big|) = (\big||x|\big|, \big||y|\big|) = (|x|, |y|).$$

b) Notons que $f(O) = O$ et que donc $\tilde{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)} = |x|\overrightarrow{e}_1 + |y|\overrightarrow{e}_2$. Ainsi $\tilde{f}(\overrightarrow{e}_1) = \overrightarrow{e}_1$ et que $\tilde{f}(-\overrightarrow{e}_1) = \overrightarrow{e}_1$.

c) L'application $\tilde{f}$ n'est pas linéaire car sinon

$$\tilde{f}(\overrightarrow{e}_1) = \overrightarrow{e}_1 \implies \tilde{f}(-\overrightarrow{e}_1) = -\overrightarrow{e}_1$$

ce qui n'est pas le cas d'après la question précédente. Donc f n'est pas une application affine.

2) Soit $f : E \to E$ donnée dans le repère $\mathcal{R}$ par $f(x, y) = (x, 1)$.

a) Montrer que f est idempotente d'ordre 2.

b) L'application f est-elle affine ? Justifier.

Rép.– a) On a

$$f(f(x,y)) = f(f_1(x,y), f_2(x,y)) = f(x, 1) = (x, 1)$$

ainsi f est idempotente d'ordre 2.

b) Notons que $f(O) = O + \overrightarrow{e}_2$ et $f(M) = O + x\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2$. Par conséquent

$$\tilde{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)} = x\overrightarrow{e}_1$$

Puisque $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e}_1 + y\overrightarrow{e}_2$, il s'en suit que l'application $\tilde{f}$ est la projection sur $Vect(\overrightarrow{e}_1)$ parallèlement à $Vect(\overrightarrow{e}_2)$. C'est une application linéaire.

3) Soit $f : E \to E$ une application idempotente d'ordre 2 (non nécessairement affine). On note $Fix\ f = \{M \in E \mid f(M) = M\}$ et $Im\ f = \{N \in E \mid \exists M \in E, f(M) = N\}$.

a) Montrer que $Im\ f \subset Fix\ f$.

b) Montrer que $Fix\ f \subset Im\ f$ et en déduire que $Fix\ f = Im\ f$.

c) Montrer que f possède au moins un point fixe.

d) Montrer que si f admet un unique point fixe alors f est une application constante.

e) Une application $f : E \to E$ qui est constante est-elle affine ? Justifier.

Rép.– a) Soit $N \in Im\ f$. Il existe $M \in E$ tel que $N = f(M)$ et puisque $f \circ f = f$ on a

$$f(N) = f \circ f(M) = f(M) = N$$

donc $N \in Fix\, f$

b) Soit $N \in Fix\ f$. On a $f(N) = N$ par conséquent $N \in Im\ f$.

c) Puisque $Im\ f$ n'est jamais vide, $Fix\ f$ est non vide et f admet donc au moins un point fixe.

d) Puisque $Fix\ f = Im\ f$, l'image de f est réduite à un point et f est donc une application constante.

c) Oui. On vérifie immédiatement que $\tilde{f}$ est l'application identiquement nulle, donc linéaire.

Seconde partie : projections.– On suppose désormais que $f : E \to E$ une application à la fois affine et idempotente d'ordre 2.

4) Montrer que soit f est constante, soit f est l'identité sur E, soit $Im\ f$ est une droite de E.

Rép.– Puisque f est affine, $Im\ f$ est un sous-espace affine de E, c'est donc soit un singleton, soit une droite, soit E tout entier. Si $Im\ f$ est réduit à un point, c'est que f est une application constante. Si $Im\ f$ est tout E, c'est que f est l'identité car $Im\ f = Fix\ f$.

5) Soit $\overrightarrow{f}$ l'application linéaire associée à f. Montrer que $\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{f}$.

Rép.– Pour tout $(M, N) \in E^2$, on a

$$\overrightarrow{f \circ f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{(f \circ f)(M)(f \circ f)(N)} = \overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{MN}).$$

Ainsi $\overrightarrow{f\circ f}=\overrightarrow{f}$. Comme $\overrightarrow{f\circ g}=\overrightarrow{f}\circ\overrightarrow{g}$, on en déduit $\overrightarrow{f}\circ\overrightarrow{f}=\overrightarrow{f}$.

6) Montrer que $Ker\overrightarrow{f}\cap Im\overrightarrow{f}=\{\overrightarrow{0}\}$ et en déduire que $\overrightarrow{E}=Ker\overrightarrow{f}\oplus Im\overrightarrow{f}$.

Rép.– Soit $\overrightarrow{v}\in Ker\overrightarrow{f}\cap Im\overrightarrow{f}$. Puisque $\overrightarrow{v}\in Im\overrightarrow{f}$, il existe $\overrightarrow{w}$ tel que $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{f}(\overrightarrow{w})$. Puisque $\overrightarrow{v}\in Ker\overrightarrow{f}$ on a aussi $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})=\overrightarrow{0}$. Ainsi

$$\overrightarrow{0}=\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})=\overrightarrow{f}\circ\overrightarrow{f}(\overrightarrow{w})=\overrightarrow{f}(\overrightarrow{w})=\overrightarrow{v}.$$

Donc $Ker\overrightarrow{f}\cap Im\overrightarrow{f}=\{\overrightarrow{0}\}$. Par le théorème du rang, on a

$$dim\ Ker\overrightarrow{f}+dim\ Ker\overrightarrow{f}=dim\ \overrightarrow{E}$$

ce qui implique $\overrightarrow{E}=Ker\overrightarrow{f}\oplus Im\overrightarrow{f}$.

7) On suppose dans cette question que $Im\ f$ est une droite et on choisit le repère $\mathcal{R}=(O,\overrightarrow{e}_1,\overrightarrow{e}_2)$ de telle façon que $Im\ \overrightarrow{f}=Vect(\overrightarrow{e}_1)$ et $Ker\ \overrightarrow{f}=Vect(\overrightarrow{e}_2)$.

a) Montrer que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}_1)=\overrightarrow{e}_1$.

b) Écrire la matrice A de $\overrightarrow{f}$ dans la base $(\overrightarrow{e}_1,\overrightarrow{e}_2)$.

c) Reconnaître l'application $\overrightarrow{f}$.

d) Montrer que pour tout $M=O+x\overrightarrow{e}_1+y\overrightarrow{e}_2\in E$, l'application f s'écrit

$$f(M)=f(O)+x\overrightarrow{e}_1$$

Rép.– a) Ceci découle directement de la question 3b) mais on peut le retrouver par un calcul direct. Puisque $\overrightarrow{e}_1\in Im\overrightarrow{f}$, il existe $\overrightarrow{w}$ tel que $\overrightarrow{e}_1=\overrightarrow{f}(\overrightarrow{w})$, d'où

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}_1)=\overrightarrow{f}\circ\overrightarrow{f}(\overrightarrow{w})=\overrightarrow{f}(\overrightarrow{w})=\overrightarrow{e}_1$$

b) Puisque $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}_2)=\overrightarrow{0}$, on a

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

c) L'application $\overrightarrow{f}$ est la projection vectorielle sur $Vect(\overrightarrow{e}_1)$ parallèlement à $Vect(\overrightarrow{e}_2)$.

d) Puisque $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}_1)=\overrightarrow{e}_1$ et $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}_2)=\overrightarrow{0}$, la formule de Grassmann s'écrit

$$\begin{aligned}f(M)&=f(O)+\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})\\&=f(O)+\overrightarrow{f}(x\overrightarrow{e}_1+y\overrightarrow{e}_2)\\&=f(O)+x\overrightarrow{e}_1.\end{aligned}$$

8) Réciproquement, on considère une application affine $f:E\to E$ définie pour tout $M=O+x\overrightarrow{e}_1+y\overrightarrow{e}_2$ par

$$f(M)=f(O)+x\overrightarrow{e}_1$$

(en particulier $\overrightarrow{f}(x\overrightarrow{e}_1 + y\overrightarrow{e}_2) = x\overrightarrow{e}_1$). Montrer que f est idempotente d'ordre 2 si et seulement si $f(O) \in O + Vect(\overrightarrow{e}_2)$.

Rép.– a) On a

$$f \circ f(M) = f(f(O) + x\overrightarrow{e}_1) = f(f(O)) + \overrightarrow{f}(x\overrightarrow{e}_1) = f(f(O)) + x\overrightarrow{e}_1$$

Ainsi

$$f \circ f = f \iff f(f(O)) = f(O) \iff \overrightarrow{f}(\overrightarrow{Of(O)}) = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{Of(O)} \in Ker\overrightarrow{f}.$$

Or $Ker\overrightarrow{f} = Vect(\overrightarrow{e}_2)$, on a donc $f \circ f = f \iff f(O) \in O + Vect(\overrightarrow{e}_2)$.

9) Soient $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ deux sous espace vectoriels de $\overrightarrow{E}$ pas nécessairement de dimension 1 mais tels que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$ et on note

$$\begin{array}{rccc} \overrightarrow{p} : & \overrightarrow{E} & \longrightarrow & \overrightarrow{E} \\ & \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} & \longmapsto & \overrightarrow{u} \end{array}$$

la projection vectorielle sur $\overrightarrow{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{G}$. On pose $F = O + \overrightarrow{F}$ et $G = O + \overrightarrow{G}$.

a) Soit $M \in E$. Montrer que le sous-espace affine $M + \overrightarrow{G}$ intersecte F en un point unique que l'on note M'.

b) On appelle *projection affine* sur F parallèlement à G l'application affine $f : E \to E$ qui à tout $M \in E$ associe le point M'. Montrer que f est affine et que son application linéaire associée est $\overrightarrow{p}$.

c) Montrer que l'ensemble des applications affines de E idempotentes de degré 2 est précisément l'ensemble des projections affines de E.

Rép.– a) Puisque $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'écrit d'une façon unique sous la forme $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{G}$. Soit $N = O + \overrightarrow{u}$. Puisque $O \in F$ et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$ on a $N \in F$. Puisque $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{v}$ on a $N \in M + \overrightarrow{G}$. Donc $F \cap (M + \overrightarrow{G})$ contient au moins un point. Supposons qu'il en contienne un deuxième distinct de N, disons P, alors $\overrightarrow{PN}$ serait à la fois dans $\overrightarrow{F}$ et dans $\overrightarrow{G}$, on aurait donc $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{0}$. Contradiction.
b) Notons que $f(O) = O$ car $O \in F \cap G$. On a

$$\tilde{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)} = \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{u} = \overrightarrow{p}(\overrightarrow{OM})$$

où, comme dans la question précédente, on a noté $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{G}$. Ainsi f est affine et son application linéaire associée est $\overrightarrow{p}$.
c) Soit f une projection affine. Puisque $M' \in (M' + \overrightarrow{G}) \cap F$, on a $f(M') = M'$ et donc $f \circ f(M) = M$ pour tout $M \in E$. Les projections affines sont donc idempotentes de

degré 2.
Réciproquement, soit f une application affine idempotente de degré 2. Si $Im\ f$ est de dimension 0 alors f est une application constante c'est-à-dire une projection affine sur un point. Si $Im\ f$ est de dimension 2 alors f est l'identité c'est-à-dire la projection affine sur E tout entier. Si $Im\ f$ est de dimension 1 alors d'après la question 8,

$$f(M) = f(O) + x\overrightarrow{e}_1.$$

Ceci incite à poser $\overrightarrow{F} = Vect(\overrightarrow{e}_1)$ et $F = f(O) + \overrightarrow{F}$. Ainsi $f(M) \in F$. Posons également $\overrightarrow{G} = Vect(\overrightarrow{e}_2)$. On sait, toujours grâce à la question 8, que $f(O) \in O+Vect(\overrightarrow{e}_2) = O+\overrightarrow{G}$. On a

$$\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{Mf(O)} + x\overrightarrow{e}_1 = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{Of(O)} + x\overrightarrow{e}_1 = -y\overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{Of(O)} \in \overrightarrow{G}.$$

Ainsi $f(M) \in M + \overrightarrow{G}$ et donc $f(M) = (M + \overrightarrow{G}) \cap F$. L'application f est donc une projection affine sur F et parallèlement à $\overrightarrow{G}$.