Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Partiel du jeudi 24 septembre 2020 - Durée 2h

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points. Sauf mention explicite du contraire, les espaces affines (et vectoriels) considérés sont de dimension finie.

1.– Soit $f : E \to E$ une application affine et $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}$ son application linéaire associée. On suppose que $\overrightarrow{f}$ est bijective, montrer que f est bijective.

2.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine. Montrer que si $Fix\ f$ est non vide alors c'est un sous-espace affine de E.

3.– Soit $\varphi : GA(E) \to GL(\overrightarrow{E})$ l'application $f \mapsto \overrightarrow{f}$. Montrer que φ est surjective.

4.– Soient $f_1 = t_{\overrightarrow{u}_1} \circ g_1$ et $f_2 = t_{\overrightarrow{u}_2} \circ g_2$. Montrer que

$$f_1 \circ f_2 = t_{\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{g}_1(\overrightarrow{u}_2)} \circ g_1 \circ g_2.$$

(on démontrera la relation de conjugaison).

5.– Soit $f : E \to E$ une application affine. On suppose que $\overrightarrow{f} = k\overrightarrow{id}$ avec $k \neq 1$. Montrer que f a un unique point fixe.

Le problème. – (10 pts) On note E un espace affine de dimension quelconque $n > 0$ et $\overrightarrow{E}$ sa direction. Le but de ce problème est d'établir le *théorème de Carathéodory.*

Première partie : Ensembles convexes.– Un point pondéré est un couple (A, α) avec $A \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère un système de $m+1$ *points* *pondérés* $((A_0, \alpha_0), ..., (A_m, \alpha_m))$ avec $\sum_{i=0}^m \alpha_i \neq 0$.

1) Montrer que l'équation

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0} \qquad (1)$$

où $G \in E$ est l'inconnue admet une unique solution donnée par

$$G = O + \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{m} \alpha_i}.$$

où $O \in E$ est une origine quelconque. Cette solution est appelée le *barycentre* du système de points pondérés et on note

$$G = bar((A_0, \alpha_0), ..., (A_m, \alpha_m)).$$

2) Soient A et B deux points quelconques de E. Le segment $[AB]$ est le sous-ensemble de E défini par

$$\{A + \lambda\overrightarrow{AB} \mid \lambda \in \ [0, 1]\}.$$

a) Soit $P \in [A, B]$. Montrer qu'il existe $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ tels que

$$P = bar((A, \alpha), (B, \beta)).$$

b) Réciproquement montrer que si $P = bar((A, \alpha), (B, \beta))$ avec $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ alors $P \in [A, B]$.

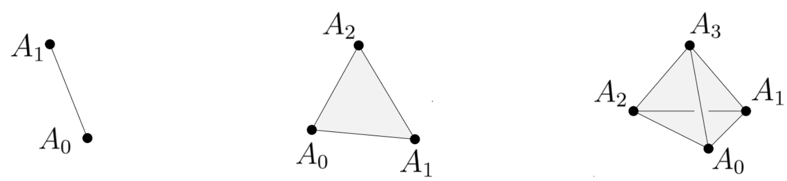
3) On dit qu'une partie $C \subset E$ est convexe si, quels que soient $P_1 \in C, P_2 \in C$, le segment $[P_1P_2]$ est entièrement contenu dans C.

a) Soient A et B deux points de E et P_1, P_2 deux points de $[A, B]$ et $P \in [P_1, P_2]$. Montrer que $P \in [A, B]$. Indication : écrire P_1 et P_2 sous la forme $P_1 = A + \lambda_1\overrightarrow{AB}$ et $P_2 = A + \lambda_2\overrightarrow{AB}$.

b) En déduire que tout segment est convexe.

4) Soient $A_0, ..., A_m$, $m+1$ points affinement indépendants de l'espace affine E. On appelle *simplexe* de dimension m et de sommets $A_0, ..., A_m$ l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de ces $m+1$ points :

$$\begin{aligned} Simp(A_0, ..., A_m) &= \{G = bar((A_0, \alpha_0), ..., (A_m, \alpha_m)) \mid \\ &\qquad \alpha_0 \geq 0, ..., \alpha_m \geq 0, \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \neq 0\} \end{aligned}$$



Un simplexe de dimension 1 est un segment, un simplexe de dimension 2 est un triangle plein et un simplexe de dimension 3, un tétraèdre plein.

a) Soient $P_1 = bar((A_0, \alpha_0), ..., (A_m, \alpha_m))$ et $P_2 = bar((A_0, \beta_0), ..., (A_m, \beta_m))$ avec $\alpha = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \neq 0$ et $\beta = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \neq 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le point $P := P_1 + \lambda \overrightarrow{P_1 P_2}$. Montrer que

$$P = bar((A_0, \gamma_0), ..., (A_m, \gamma_m))$$

avec $\gamma_i = (1-\lambda)\frac{\alpha_i}{\alpha} + \lambda \frac{\beta_i}{\beta}$.

b) En déduire que $Simp(A_0, ..., A_m)$ est convexe.

5) Soient $A_0, ..., A_m$, $m+1$ points affinement indépendants de l'espace affine E. Soient $P_0, ..., P_m$, $m+1$ points de $Simp(A_0, ..., A_m)$ et $(\alpha_0, ..., \alpha_m)$, $m+1$ réels positifs ou nuls tels que $\alpha = \alpha_0 + ... + \alpha_m \neq 0$.

a) On considère

$$G = bar((P_0, \alpha_0), ..., (P_m, \alpha_m)).$$

Montrer qu'il existe des réels $\gamma_0 \geq 0, ..., \gamma_m \geq 0$, $\gamma_0 + ... + \gamma_m \neq 0$, tels que

$$G = bar((A_0, \gamma_0), ..., (A_m, \gamma_m)).$$

b) En déduire que $Simp(P_0, ..., P_m) \subset Simp(A_0, ..., A_m)$.

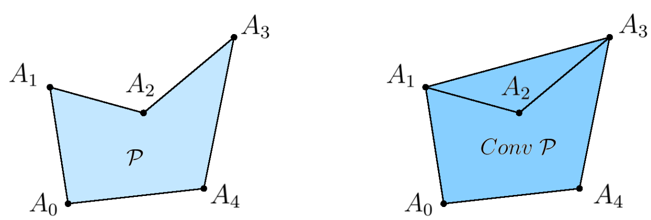
Seconde partie : Enveloppes convexes.– Soit $\mathcal{P} \subset E$ un sous-ensemble de E. L'enveloppe convexe $Conv\,\mathcal{P}$ de $\mathcal{P}$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de $\mathcal{P}$. Précisément

$$Conv\ \mathcal{P} = \bigcup_{N\in\mathbb{N}^*} Bar_N(\mathcal{P})$$

avec

$$Bar_N(\mathcal{P}) = \{bar((A_0,\alpha_0),...,(A_N,\alpha_N)) \mid A_0 \in \mathcal{P},...,A_N \in \mathcal{P},$$

$$\alpha_0 \geq 0,...,\alpha_N \geq 0, \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \neq 0\}$$



Un pentagone plein $\mathcal{P}$ (à gauche) et son enveloppe convexe $Conv\ \mathcal{P}$ (à droite).

6) Soit G un point quelconque de E et soient $A_0,...,A_m$, $(m+1)$ affinement dépendants (autrement dit les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}$,...,$\overrightarrow{A_0A_m}$ forment une famille liée).

a) Montrer qu'il existe $m+1$ réels $\alpha_0,...,\alpha_m$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}.$$

b) Soient $\lambda_0,...,\lambda_m$, $m+1$ réels positifs non tous nuls et $G = bar((A_0,\lambda_0),...,(A_m,\lambda_m))$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\sum_{i=0}^{m} (\lambda_i - t\alpha_i)\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}.$$

c) Soit $I = \{i_1, i_2, ...\}$ l'ensemble des indices i tels que $\alpha_i > 0$. Montrer que I est non vide.

d) On choisit $t = \min_{i \in I} \dfrac{\lambda_i}{\alpha_i}$. Montrer que, pour tout $i = 0, ..., m$, on a

$$\lambda_i - t\alpha_i \geq 0.$$

e) Montrer qu'il existe (au moins) un indice $j \in \{1, ..., m\}$ tel que

$$\lambda_j - t\alpha_j = 0.$$

f) En déduire que G peut s'écrire comme un barycentre à coefficients tous positifs des points A_i, $i \neq j$.

7) On suppose que $\dim E = m$. Déduire de la question précédente, le *théorème de Carathéodory*, à savoir que

$$Conv\ \mathcal{P} = Bar_m(\mathcal{P}).$$

8) Montrer que

$$Conv\ Simp(A_0, ..., A_m) = Simp(A_0, ..., A_m).$$