Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Corrigé du partiel du jeudi 24 septembre 2020

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points. Sauf mention explicite du contraire, les espaces affines (et vectoriels) considérés sont de dimension finie.

1.– Soit $f : E \to E$ une application affine et $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}$ son application linéaire associée. On suppose que $\overrightarrow{f}$ est bijective, montrer que f est bijective.

Rép.– Commençons par l'injectivité. Supposons que A et B soient deux points tels que $f(A) = f(B)$. De la formule de Grassmann

$$f(B) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB})$$

on déduit que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{0}$ et par conséquent $\overrightarrow{AB} \in \ker \overrightarrow{f}$. Puisque $\overrightarrow{f}$ est bijective, elle est injective ce qui signifie que $\ker \overrightarrow{f} = \{\overrightarrow{0}\}$. Ainsi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ et $A = B$. Ceci montre l'injectivité de f.
Abordons maintenant la surjectivité. On veut montrer que pour tout $P \in E$, il existe $Q \in E$ tel que $f(Q) = P$. On introduit une origine $O \in E$ et on écrit la formule de Grassmann

$$f(M) = f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}).$$

Ainsi

$$f(Q) = P \iff O' + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = P.$$

Cette dernière équation est équivalente à

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'P}.$$

Puisque $\overrightarrow{f}$ est bijective, il existe un unique vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$ tel que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{O'P}$. L'équation ci-dessus est donc équivalente à

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}.$$

Il suffit donc de prendre $Q = O + \overrightarrow{u}$ pour avoir un antécédent à P.

2.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine. Montrer que si $Fix\, f$ est non vide alors c'est un sous-espace affine de E.

Rép.– Soit $A \in Fix\, f$ (qui est non vide). On va montrer que $\overrightarrow{F} = \{\overrightarrow{AM} \mid M \in Fix\, f\}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$. Or

$$\begin{array}{rcll}\{\overrightarrow{AM} \mid M \in Fix\, f\} & = & \{\overrightarrow{AM} \mid f(M) = M\} & \\ & = & \{\overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{AM}\} & \\ & = & \{\overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM}\} & \text{car } f \text{ affine} \\ & = & Ker\,(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{E}}). & \end{array}$$

3.– Soit $\varphi : GA(E) \to GL(\overrightarrow{E})$ l'application $f \mapsto \overrightarrow{f}$. Montrer que φ est surjective.

Rép.– Soient $L \in GL(\overrightarrow{E})$ et O une origine de E. On définit $f : E \to E$ en posant

$$f(M) := O + L(\overrightarrow{OM})$$

pour tout $M \in E$. Par construction f est une application affine dont l'application linéaire associée est $\overrightarrow{f} = L$. Il reste à montrer que f est inversible. Pour cela, on définit une application $g : E \to E$ par

$$g(M) := O + L^{-1}(\overrightarrow{OM})$$

pour tout $M \in E$. On a

$$f \circ g(M) = f(O + L^{-1}(\overrightarrow{OM})) = f(O) + \overrightarrow{f}(L^{-1}(\overrightarrow{OM}))$$

Or $f(O) = O$ et $\overrightarrow{f} = L$ d'où

$$f \circ g(M) = O + \overrightarrow{OM} = M$$

Ainsi $f \circ g = id$. On vérifie similairement que $g \circ f = id$. Ceci montre que g est l'inverse de f et que par conséquent $f \in GA(E)$. Par construction $\varphi(f) = L$ ce qui montre que φ est surjective.

4.– Soient $f_1 = t_{\overrightarrow{u}_1} \circ g_1$ et $f_2 = t_{\overrightarrow{u}_2} \circ g_2$. Montrer que

$$f_1 \circ f_2 = t_{\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{g}_1(\overrightarrow{u}_2)} \circ g_1 \circ g_2.$$

(on démontrera la relation de conjugaison).

Rép.– On a

$$f_1 \circ f_2 = t_{\overrightarrow{u}_1} \circ g_1 \circ t_{\overrightarrow{u}_2} \circ g_2.$$

Or

$$f \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})} \circ f.$$

En effet, soient $M \in E$ et $M' = f(M)$. On a

$$f \circ t_{\overrightarrow{u}} f^{-1}(M') = f \circ t_{\overrightarrow{u}}(M) = f(M + \overrightarrow{u}) = M' + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = t_{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})}(M').$$

Ainsi $f \circ t_{\overrightarrow{u}} f^{-1} = t_{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})}$ et en composant à droite par f^{-1} on obtient la relation $f \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})} \circ f$. Ainsi

$$g_1 \circ t_{\overrightarrow{u}_2} = t_{\overrightarrow{g}_1(\overrightarrow{u}_2)} \circ g_1.$$

En remplaçant, il vient

$$f_1 \circ f_2 = t_{\overrightarrow{u}_1} \circ t_{\overrightarrow{g}_1(\overrightarrow{u}_2)} \circ g_1 \circ g_2$$

qui est la relation demandée.

5.– Soit $f : E \to E$ une application affine. On suppose que $\overrightarrow{f} = k\overrightarrow{id}$ avec $k \neq 1$. Montrer que f a un unique point fixe.

Rép.– Soit O un point de E. La relation de Grassmann s'écrit

$$f(M) = f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}).$$

L'équation $f(M) = M$ est donc équivalente à

$$f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = M$$

Puisque $\overrightarrow{f} = k\overrightarrow{id}$, cette équation est équivalente à

$$f(O) + k\overrightarrow{OM} = M$$

soit encore

$$\overrightarrow{Of(O)} + k\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}$$

c'est-à-dire

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{Of(O)}}{1-k} \quad \Longleftrightarrow \quad M = O + \frac{\overrightarrow{Of(O)}}{1-k}.$$

Ainsi l'équation $f(M) = M$ admet une unique solution ce qui montre que f a un unique point fixe.

Le problème. – (10 pts) On note E un espace affine de dimension quelconque $n > 0$ et $\overrightarrow{E}$ sa direction. Le but de ce problème est d'établir le *théorème de Carathéodory.*

Première partie : Ensembles convexes.– Un point pondéré est un couple (A, α) avec $A \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère un système de $m+1$ *points pondérés* $((A_0, \alpha_0), ..., (A_m, \alpha_m))$ avec $\sum_{i=0}^m \alpha_i \neq 0$.

1) Montrer que l'équation

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0} \qquad (1)$$

où $G \in E$ est l'inconnue admet une unique solution donnée par

$$G = O + \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{m} \alpha_i}.$$

où $O \in E$ est une origine quelconque. Cette solution est appelée le *barycentre* du système de points pondérés et on note

$$G = bar((A_0, \alpha_0), ..., (A_m, \alpha_m)).$$

Rép.– Soit $O \in E$ une origine. On a :

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0} \iff \sum_{i=0}^{m} \alpha_i (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_i}) = \overrightarrow{0} \iff \left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i\right) \overrightarrow{OG} = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}.$$

Puisque $\sum_{i=0}^m \alpha_i \neq 0$, on peut écrire

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{OG} = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{m} \alpha_i} \iff G = O + \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{m} \alpha_i}.$$

Ainsi l'équation (1) admet une unique solution G, déterminée par le système de points pondérés et l'origine O.

2) Soient A et B deux points quelconques de E. Le segment $[AB]$ est le sous-ensemble de E défini par

$$\{A + \lambda \overrightarrow{AB} \mid \lambda \in [0, 1]\}.$$

a) Soit $P \in [A, B]$. Montrer qu'il existe $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ tels que

$$P = bar((A, \alpha), (B, \beta)).$$

b) Réciproquement montrer que si $P = bar((A, \alpha), (B, \beta))$ avec $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ alors $P \in [A, B]$.

Rép.– a) Puisque $P \in [A, B]$, il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $P = A + \lambda\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Ainsi

$$\overrightarrow{AP} = \lambda(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}) \iff \overrightarrow{0} = (1 - \lambda)\overrightarrow{PA} + \lambda\overrightarrow{PB} \iff P = bar((A, 1 - \lambda), (B, \lambda)).$$

Par conséquent $\alpha = 1 - \lambda$ et $\beta = \lambda$ conviennent.
b) On a

$$\begin{aligned} \alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{0} \quad &\iff \quad \alpha\overrightarrow{PA} + \beta(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB}) \iff \overrightarrow{0} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{AB} \\ &\iff \quad \overrightarrow{0} = \overrightarrow{PA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

avec $\lambda = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \in [0, 1]$.

3) On dit qu'une partie $C \subset E$ est convexe si, quels que soient $P_1 \in C, P_2 \in C$, le segment $[P_1 P_2]$ est entièrement contenu dans C.

a) Soient A et B deux points de E et P_1, P_2 deux points de $[A, B]$ et $P \in [P_1, P_2]$. Montrer que $P \in [A, B]$. Indication : écrire P_1 et P_2 sous la forme $P_1 = A + \lambda_1\overrightarrow{AB}$ et $P_2 = A + \lambda_2\overrightarrow{AB}$.

b) En déduire que tout segment est convexe.

Rép.– a) Puisque P_1 et P_2 sont des points de $[A, B]$, il existe $\lambda_1 \in [0, 1]$ et $\lambda_2 \in [0, 1]$ tels que $P_1 = A + \lambda_1\overrightarrow{AB}$ et $P_2 = A + \lambda_2\overrightarrow{AB}$. Puisque P est un point de $[P_1, P_2]$, il existe $\mu \in [0, 1]$ tel que $P = P_1 + \mu\overrightarrow{P_1P_2}$. Notons que

$$P_2 = A + \lambda_1\overrightarrow{AB} + (\lambda_2 - \lambda_1)\overrightarrow{AB} = P_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)\overrightarrow{AB}.$$

Par conséquent

$$P = P_1 + \mu\overrightarrow{P_1P_2} = A + \lambda_1\overrightarrow{AB} + \mu(\lambda_2 - \lambda_1)\overrightarrow{AB} = A + (\lambda_1 + \mu(\lambda_2 - \lambda_1))\overrightarrow{AB}.$$

Supposons pour fixer les idées que $\lambda_2 \geq \lambda_1$, alors

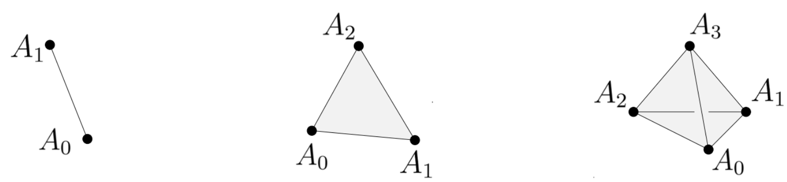
$$\lambda_1 \leq \lambda_1 + \mu(\lambda_2 - \lambda_1) \leq \lambda_2$$

et donc, puisque $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 1$, on a $\lambda_1 + \mu(\lambda_2 - \lambda_1) \in [0, 1]$.
b) Le raisonnement précédent montre que pour tout couple de points (P_1, P_2) de $[A, B]$,

le segment $[P_1P_2]$ est entièrement contenu dans $[A, B]$. Ainsi $[A, B]$ est connexe.

4) Soient $A_0, ..., A_m$, $m+1$ points affinement indépendants de l'espace affine E. On appelle *simplexe* de dimension m et de sommets $A_0, ..., A_m$ l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de ces $m+1$ points :

$$\begin{aligned} Simp(A_0, ..., A_m) \quad &= \quad \{G = bar((A_0, \alpha_0), ..., (A_m, \alpha_m)) \mid \\ &\qquad \alpha_0 \geq 0, ..., \alpha_m \geq 0, \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \neq 0\} \end{aligned}$$



Un simplexe de dimension 1 est un segment, un simplexe de dimension 2 est un triangle plein et un simplexe de dimension 3, un tétraèdre plein.

a) Soient $P_1 = bar((A_0, \alpha_0), ..., (A_m, \alpha_m))$ et $P_2 = bar((A_0, \beta_0), ..., (A_m, \beta_m))$ avec $\alpha = \sum_{i=0}^m \alpha_i \neq 0$ et $\beta = \sum_{i=0}^m \beta_i \neq 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le point $P := P_1 + \lambda \overrightarrow{P_1P_2}$. Montrer que

$$P = bar((A_0, \gamma_0), ..., (A_m, \gamma_m))$$

avec $\gamma_i = (1-\lambda)\frac{\alpha_i}{\alpha} + \lambda \frac{\beta_i}{\beta}$.

b) En déduire que $Simp(A_0, ..., A_m)$ est convexe.

Rép.– Soit O une origine de E, on a

$$\overrightarrow{OP_1} = \frac{\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=0}^{m} \alpha_i} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OP_2} = \frac{\sum_{i=0}^{m} \beta_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=0}^{m} \beta_i}$$

Ainsi

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \lambda \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_1} + \lambda(\overrightarrow{P_1O} + \overrightarrow{OP_2}) = (1-\lambda)\overrightarrow{OP_1} + \lambda \overrightarrow{OP_2}.$$

Par conséquent

$$\overrightarrow{OP} = (1-\lambda)\frac{\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=0}^{m} \alpha_i} + \lambda \frac{\sum_{i=0}^{m} \beta_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=0}^{m} \beta_i} = \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{(1-\lambda)\alpha_i}{\alpha} + \frac{\lambda \beta_i}{\beta} \right) \overrightarrow{OA_i}$$

où l'on a noté $\alpha = \sum_{i=0}^m \alpha_i$ et $\beta = \sum_{i=0}^m \beta_i$. On en déduit

$$P = bar((A_0, \gamma_0), ..., (A_m, \gamma_m))$$

avec

$$\gamma_i = \frac{(1-\lambda)\alpha_i}{\alpha} + \frac{\lambda \beta_i}{\beta}.$$

b) Soient P_1 et P_2 deux points de $Simp(A_0, ..., A_m)$. Par définition, il existe $\alpha_0 \geq 0, ..., \alpha_m \geq 0$ et $\beta_0 \geq 0, ..., \beta_m \geq 0$ tels que

$$P_1 = bar((A_0, \alpha_0), ..., (A_m, \alpha_m)) \quad \text{et} \quad P_2 = bar((A_0, \beta_0), ..., (A_m, \beta_m)).$$

Soit $P \in [P_1, P_2]$. Il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $P = P_1 + \lambda \overrightarrow{P_1P_2}$. D'après la question précédente, $P = bar((A_0, \gamma_0), ..., (A_m, \gamma_m))$ avec $\gamma_i = \frac{(1-\lambda)\alpha_i}{\alpha} + \frac{\lambda\beta_i}{\beta}$. On remarque que les γ_i sont positifs car ils s'expriment comme combinaison linéaire à coefficient positif de quantités positives. On conclut que $P \in Simp(A_0, ..., A_m)$.

5) Soient $A_0, ..., A_m$, $m+1$ points affinement indépendants de l'espace affine E. Soient $P_0, ..., P_m$, $m+1$ points de $Simp(A_0, ..., A_m)$ et $(\alpha_0, ..., \alpha_m)$, $m+1$ réels positifs ou nuls tels que $\alpha = \alpha_0 + ... + \alpha_m \neq 0$.

a) On considère

$$G = bar((P_0, \alpha_0), ..., (P_m, \alpha_m)).$$

Montrer qu'il existe des réels $\gamma_0 \geq 0, ..., \gamma_m \geq 0$, $\gamma_0 + ... + \gamma_m \neq 0$, tels que

$$G = bar((A_0, \gamma_0), ..., (A_m, \gamma_m)).$$

b) En déduire que $Simp(P_0, ..., P_m) \subset Simp(A_0, ..., A_m)$.

Rép.– a) Puisque $P_j \in Simp(A_0, ..., A_m)$, il existe $\beta_{j,0} \geq 0, ..., \beta_{j,m} \geq 0$, $\beta_j = \beta_{j,0} + ... + \beta_{j,m} \neq 0$ tel que

$$\overrightarrow{OP_j} = \sum_{i=0}^m \frac{\beta_{j,i}}{\beta_j} \overrightarrow{OA_i}$$

et ceci pour tout $i \in \{1, ..., m\}$. En remplaçant dans l'expression donnant $G = bar((P_0, \alpha_0), ..., (P_m, \alpha_m))$, on obtient

$$\overrightarrow{OG} = \sum_{j=0}^m \frac{\alpha_j}{\alpha} \overrightarrow{OP_j} = \sum_{j=0}^m \frac{\alpha_j}{\alpha} \left(\sum_{i=0}^m \frac{\beta_{j,i}}{\beta_j} \overrightarrow{OA_i} \right) = \sum_{i=0}^m \left(\sum_{j=0}^m \frac{\alpha_j}{\alpha} \frac{\beta_{j,i}}{\beta_j} \right) \overrightarrow{OA_i}.$$

Posons $\gamma_i := \sum_{j=0}^m \frac{\alpha_j}{\alpha} \frac{\beta_{j,i}}{\beta_j}$ et constatons que comme toutes les quantités sont positives : $\gamma_i \geq 0$. Notons enfin que

$$\sum_{i=0}^m \gamma_i = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \frac{\alpha_j}{\alpha} \frac{\beta_{j,i}}{\beta_j} = \sum_{j=0}^m \frac{\alpha_j}{\alpha} \frac{1}{\beta_j} \sum_{i=0}^m \beta_{j,i} = \sum_{j=0}^m \frac{\alpha_j}{\alpha} = 1.$$

Ceci montre que $G = bar((A_0, \gamma_0), ..., (A_m, \gamma_m))$ avec les propriétés demandées sur les γ_i.
b) On vient de démontrer que

$$\{G = bar((P_0, \alpha_0), ..., (P_m, \alpha_m))\,|\alpha_0 \geq 0, ..., \alpha_m \geq 0, \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \neq 0\}$$

est inclus dans

$$\{G = bar((A_0, \alpha_0), ..., (A_m, \alpha_m))\,|\alpha_0 \geq 0, ..., \alpha_m \geq 0, \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \neq 0\}$$

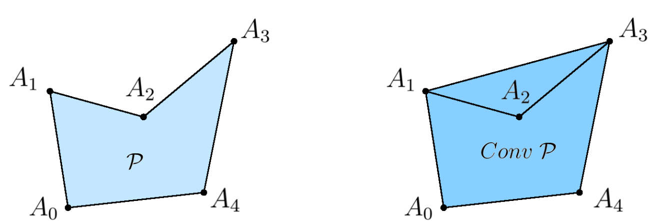
ce qui est exactement dire que $Simp(P_0, ..., P_m) \subset Simp(A_0, ..., A_m)$.

Seconde partie : Enveloppes convexes.– Soit $\mathcal{P} \subset E$ un sous-ensemble de E. L'enveloppe convexe $Conv\,\mathcal{P}$ de $\mathcal{P}$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de $\mathcal{P}$. Précisément

$$Conv\ \mathcal{P} = \bigcup_{N \in \mathbb{N}^*} Bar_N(\mathcal{P})$$

avec

$$Bar_N(\mathcal{P}) = \{bar((A_0, \alpha_0), ..., (A_N, \alpha_N))\,|\,A_0 \in \mathcal{P}, ..., A_N \in \mathcal{P},$$
$$\alpha_0 \geq 0, ..., \alpha_N \geq 0, \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \neq 0\}$$



Un pentagone plein $\mathcal{P}$ (à gauche) et son enveloppe convexe $Conv\ \mathcal{P}$ (à droite).

6) Soit G un point quelconque de E et soient $A_0, ..., A_m$, $(m+1)$ affinement dépendants (autrement dit les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}$,...,$\overrightarrow{A_0A_m}$ forment une famille liée).

a) Montrer qu'il existe $m+1$ réels $\alpha_0, ..., \alpha_m$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}.$$

b) Soient $\lambda_0, ..., \lambda_m$, $m+1$ réels positifs non tous nuls et $G = bar((A_0, \lambda_0), ..., (A_m, \lambda_m))$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\sum_{i=0}^{m} (\lambda_i - t\alpha_i)\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}.$$

c) Soit $I = \{i_1, i_2, ...\}$ l'ensemble des indices i tels que $\alpha_i > 0$. Montrer que I est non vide.

d) On choisit $t = \min_{i \in I} \dfrac{\lambda_i}{\alpha_i}$. Montrer que, pour tout $i = 0, ..., m$, on a

$$\lambda_i - t\alpha_i \geq 0.$$

e) Montrer qu'il existe (au moins) un indice $j \in \{1, ..., m\}$ tel que

$$\lambda_j - t\alpha_j = 0.$$

f) En déduire que G peut s'écrire comme un barycentre à coefficients tous positifs des points A_i, $i \neq j$.

Rép.– a) Puisque la famille $\overrightarrow{A_0A_1}$,...,$\overrightarrow{A_0A_m}$ est liée, il existe $\alpha_1, ..., \alpha_m$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i} = \overrightarrow{0}.$$

On a donc

$$\overrightarrow{0} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(\overrightarrow{A_0G} + \overrightarrow{GA_i}) = -\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\right)\overrightarrow{GA_0} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}.$$

Il suffit de poser $\alpha_0 := -\sum_{i=1}^{m} \alpha_i$ pour obtenir les $m+1$ réels demandés
b) Puisque $G = bar((A_0, \lambda_0), ..., (A_m, \lambda_m))$ on a

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}.$$

et d'après la question précédente

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$$

d'où par combinaison linéaire

$$\sum_{i=0}^{m} (\lambda_i - t\alpha_i)\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.
c) L'ensemble I est non vide car les α_i sont de somme nulle et ne sont pas tous nuls.
d) Puisque $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, ..., m\}$ et que $\alpha_i > 0$ pour tout $i \in I$, on a $t \geq 0$. Notons J l'ensemble des indices i tels que $\alpha_i \leq 0$. On a $I \cup J = \{1, ..., m\}$. Si $i \in J$, on a $-t\alpha_i \geq 0$ et donc $\lambda_i - t\alpha_i \geq 0$. Si $i \in I$, alors par définition de t :

$$t \leq \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \iff \lambda_i - t\alpha_i \geq 0.$$

e) Notons j un indice pour lequel le minimun $\min_{i \in I} \dfrac{\lambda_i}{\alpha_i}$ est réalisé. Pour un tel indice $t = \frac{\lambda_j}{\alpha_j}$ et par conséquent $\lambda_j - t\alpha_j = 0$.
f) La relation

$$\sum_{i=0}^{m} (\lambda_i - t\alpha_i)\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$$

indique que $G = bar((A_0, \mu_0), ..., (A_m, \mu_m))$ avec $\mu_i = \lambda_i - t\alpha_i$. Puisque $\mu_j = 0$, on a aussi

$$G = bar((A_0, \mu_0), ..., (A_{j-1}, \mu_{j-1}), (A_{j+1}, \mu_{j+1}), ..., (A_m, \mu_m)).$$

7) On suppose que $\dim E = m$. Déduire de la question précédente, le *théorème de Carathéodory*, à savoir que

$$Conv\ \mathcal{P} = Bar_m(\mathcal{P}).$$

Rép.– Supposons $N > m$ alors tout ensemble de N points est nécessairement affinement dépendant et d'après la question précédente

$$Bar_N \mathcal{P} = Bar_{N-1} \mathcal{P}.$$

Une récurrence immédiate montre que pour tout $N > m$:

$$Bar_N \mathcal{P} = Bar_m \mathcal{P}.$$

Si $N < m$ alors $Bar_N \mathcal{P} \subset Bar_m \mathcal{P}$ (il suffit pour cela de compléter le système de points avec des pondérations nulles). Au bilan

$$Conv\ \mathcal{P} = \bigcup_{N \in \mathbb{N}^*} Bar_N(\mathcal{P}) = Bar_m \mathcal{P}.$$

8) Montrer que

$$Conv\ Simp(A_0, ..., A_m) = Simp(A_0, ..., A_m).$$

Rép.– D'après la question précédente

$$Conv\ Simp(A_0, ..., A_m) = Bar_m Simp(A_0, ..., A_m).$$

et d'après la question 5

$$Bar_m Simp(A_0, ..., A_m) = \{bar((A_0, \alpha_0), ..., (A_m, \alpha_m)) \,|\alpha_0 \geq 0, ..., \alpha_m \geq 0, \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \neq 0\}$$

Ce dernier ensemble est précisément $Simp(A_0, ..., A_m)$.