Université Claude Bernard Lyon 1

Licence 3 Calcul Différentiel

Examen, première session

Jeudi XX décembre 2008 - Durée 3 heures

Les documents et les calculettes sont interdits. Les exercices sont indépendants les uns des autres. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Question de cours. – (2 pts) Enoncer le théorème du point fixe de Picard.

L'exercice du cours. – (2 pts) Soient D_+ (resp. D_-) le disque fermé de rayon 1 et de centre $(0,1)$ (resp. le disque fermé de rayon 1 et de centre $(0,-1)$) et $A = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup D_+ \cup D_-$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction indicatrice de A i.e. $f(x) = 1$ si $x \in A$ et $f(x) = 0$ sinon. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$ mais qu'elle est différentiable en ce point *au sens de Gateaux*.

Exercice 1. – (3 pts) Soient

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{cccc} g : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & x + 2y + 3z + 4. \end{array}$$

On note $\Gamma = g^{-1}(0)$.
1) Montrer qu'il existe au plus un point $p \in \mathbb{R}^3$ en lequel f est susceptible de présenter un extremum relatif sous la contrainte Γ.
2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ on a

$$f(x) = f(p) + \|x - p\|^2.$$

En déduire les extrema globaux de $f_{|\Gamma}$.
3) Quelle est la signification géométrique de $\sqrt{f(p)}$?

Exercice 2. – (3 pts) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le but de cet exercice est de déterminer la solution générale de l'équation différentielle :

$$X' = AX + B$$

où ${}^tX = (x_1, x_2, x_3)$ est l'inconnue.

1) Déterminer e^{tA} pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2) Résoudre le système homogène $X' = AX$.

3) Résoudre $X' = AX + B$.

Problème (10 pts) Soient $\epsilon \geq 0$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$(\Sigma_\epsilon) \quad \begin{cases} x' &= 2y \\ y' &= -2x - 4x^3 - \epsilon y \end{cases}$$

et on note

$$\gamma :]t_-, t_+[\longrightarrow \mathbb{R}^2$$

la solution maximale de (Σ_ϵ) telle que $\gamma(0) = (x_0, y_0)$. On note enfin $E : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $E(x, y) = x^2 + y^2 + x^4$.

PARTIE A. – On suppose $\epsilon = 0$.

1) Montrer que E est constant le long des solutions de Σ_0.

2) Soit $c \in \mathbb{R}_+$. On note Γ_c l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + x^4 = c\}$. L'ensemble Γ_c est-il

a) un fermé de $\mathbb{R}^2$?

b) un compact de $\mathbb{R}^2$?

3) Montrer que $t_+ = +\infty$ et $t_- = -\infty$.

4) On suppose désormais que $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Montrer qu'alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|\gamma(t)\| \neq 0.$$

5) On note $x(t) = \rho(t) \cos \theta(t)$ et $y(t) = \rho(t) \sin \theta(t)$ les expressions de $\gamma(t)$ en coordonnées polaires. En évaluant la quantité

$$\frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2}$$

montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\theta'(t)| \geq 2.$$

6) Soit $c > 0$. Donner un paramétrage $\rho = f(\theta)$ de Γ_c en coordonnées polaires. Montrer que $f(0) = f(2\pi)$.

7) a) Montrer que la trajectoire passant par $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ en $t = 0$ est périodique.
b) Soient t_0 tel que $x(t_0) < 0$ et $y(t_0) = 0$, T la période de la trajectoire et a la racine positive de $x^2 + x^4 = c$. Montrer que $t \mapsto x(t)$ est inversible sur $]t_0, t_0 + \frac{T}{2}[$. En déduire la période T sous forme d'une intégrale simple faisant intervenir x, a et c (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale).

PARTIE B. – On suppose $\epsilon > 0$

8) Montrer que $E \circ \gamma$ est décroisante, en déduire que $t_+ = +\infty$.

9) Montrer que si ϵ est suffisamment petit les trajectoires tournent une infinité de fois autour de $(0, 0)$.