Université Claude Bernard Lyon 1

M1 – Géométrie

Contrôle continu 2 du 25 octobre 2017 - 1h30

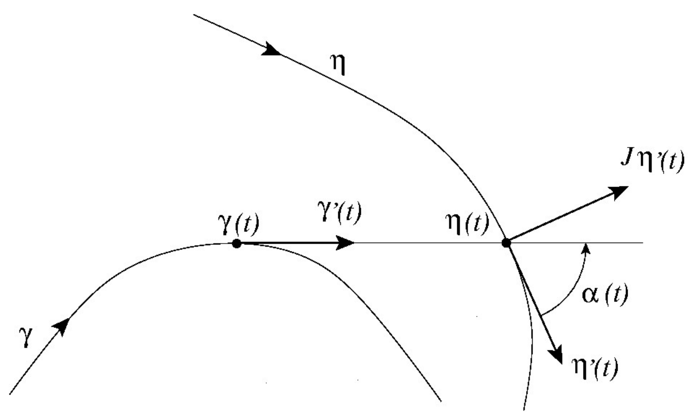
Les documents sont autorisés mais les calculettes et les téléphones portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Problème. – Soit I un intervalle et $\eta : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe plane paramétrée par la longueur d'arc. Soit $\ell > 0$ et $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe telle que, pour tout $t \in I$, on ait :

a) $\|\eta(t) - \gamma(t)\| = \ell$

b) $\gamma'(t)$ est proportionnelle au vecteur $\eta(t) - \gamma(t)$.

Une telle courbe est appelée *tractrice de la courbe* η : le point $\gamma(t)$ est tracté depuis $\eta(t)$ via la tige $\eta(t) - \gamma(t)$ qui est de longueur ℓ.



Première partie.– On suppose que $I = \mathbb{R}$ et que $\eta(t) = (t, 0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On considère la courbe $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\gamma(t) = \left(t - \ell \operatorname{th}\left(\frac{t}{\ell}\right), \frac{\ell}{\operatorname{ch}\left(\frac{t}{\ell}\right)} \right).$$

1) Déterminer $\|\gamma'(t)\|$ et trouver les points réguliers de γ (un formulaire de trigonométrie hyperbolique figure en fin de sujet).

2) Montrer que $\gamma'(t)$ est proportionnel à $\eta(t)-\gamma(t)$ et déterminer le coefficient de proportionnalité.

3) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\|\eta(t)-\gamma(t)\| = \ell$. En déduire que γ est une tractrice de η.

4) On note $\alpha(t)$ l'angle orienté entre $\eta'(t)$ et $\eta(t)-\gamma(t)$. Montrer que

$$\cos\alpha(t) = \operatorname{th}\left(\frac{t}{\ell}\right).$$

5) Montrer qu'en tout point t tel que $\alpha(t) \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\alpha'(t) + \frac{1}{\ell}\sin\alpha(t) = 0.$$

Seconde partie.– On ne suppose plus que $\eta(t) = (t, 0)$. On considère le cas général où $\eta : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe C^∞ régulière et paramétrée par la longueur d'arc. On note $k_{alg} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sa courbure algébrique et $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une tractrice de η (attention, γ n'est pas paramétrée par la longueur d'arc en général). On suppose que $\mathbb{R}^2$ est orientée de façon standard et on note Jv le vecteur obtenu par rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ du vecteur v.

1) Trouver les coordonnées du vecteur $\eta(t)-\gamma(t)$ dans la base $(\eta'(t), J\eta'(t))$ en fonction de $\alpha(t)$ et de ℓ.

2) Montrer que pour tout $t \in I$ on a

$$\gamma'(t) = (1 + \ell(\alpha'(t) + k_{alg}(t))\sin\alpha(t))\,\eta'(t) - \ell(\alpha'(t) + k_{alg}(t))\cos\alpha(t) J\eta'(t).$$

3) Montrer que pour tout $t \in I$ on a

$$\alpha'(t) + \frac{1}{\ell}\sin\alpha(t) = -k_{alg}(t).$$

Indication : On pourra calculer $\gamma'(t) \wedge (\eta(t)-\gamma(t))$ en considérant $\mathbb{R}^2$ comme un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ pour donner un sens au produit vectoriel.

Troisième partie.– On suppose maintenant que $I = \mathbb{R}$ et que $\eta(t) = \left(R\cos\frac{t}{R}, R\sin\frac{t}{R}\right)$ où $R > \ell$.

1) Déterminer $k_{alg}(t)$ (on prendra soin du signe) ?

2) Soit $\alpha_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Sous quelle(s) condition(s) la fonction constante $\alpha \equiv \alpha_0$ peut-elle être solution de l'équation obtenue au 3) de la seconde partie ?

3) On suppose que α est une fonction constante égale à $\alpha_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$. Montrer que $\|\gamma(t)\|^2 = \sqrt{R^2 - \ell^2}$ et en déduire la nature du support de la tractrice.

Formulaire de trigonométrie hyperbolique :

$$\begin{array}{lll} \operatorname{ch}' t = \operatorname{sh} t & \operatorname{sh}' t = \operatorname{ch} t & \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1 \\ \operatorname{th} t = \dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} & \operatorname{th}' t = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t} = 1 - \operatorname{th}^2 t & \end{array}$$