Université Claude Bernard Lyon 1

M1 – Géométrie

Corrigé du contrôle continu 2 du 25 octobre 2017

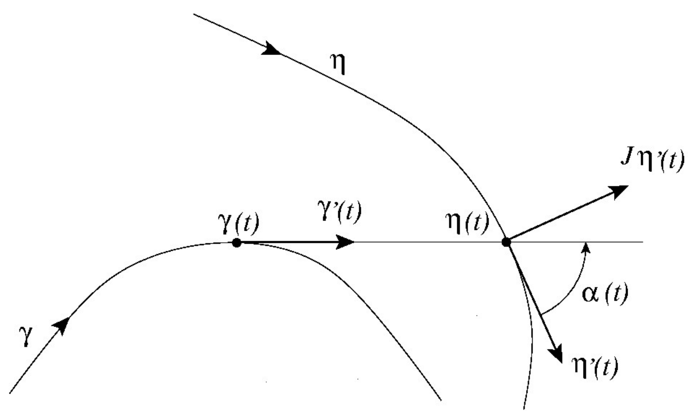
Les documents sont autorisés mais les calculettes et les téléphones portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Problème. – Soit I un intervalle et $\eta : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe plane paramétrée par la longueur d'arc. Soit $\ell > 0$ et $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe telle que, pour tout $t \in I$, on ait :

a) $\|\eta(t) - \gamma(t)\| = \ell$

b) $\gamma'(t)$ est proportionnelle au vecteur $\eta(t) - \gamma(t)$.

Une telle courbe est appelée *tractrice de la courbe* η : le point $\gamma(t)$ est tracté depuis $\eta(t)$ via la tige $\eta(t) - \gamma(t)$ qui est de longueur ℓ.



Première partie.– On suppose que $I = \mathbb{R}$ et que $\eta(t) = (t, 0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On considère la courbe $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\gamma(t) = \left(t - \ell \operatorname{th}\left(\frac{t}{\ell}\right), \frac{\ell}{\operatorname{ch}\left(\frac{t}{\ell}\right)} \right).$$

1) Déterminer $\|\gamma'(t)\|$ et trouver les points réguliers de γ (un formulaire de trigonométrie hyperbolique figure en fin de sujet).

Rép.– On a

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= \left(t - \ell \operatorname{th}\left(\frac{t}{\ell}\right), \frac{\ell}{\operatorname{ch}\left(\frac{t}{\ell}\right)}\right)' \\
&= \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{t}{\ell}\right)}, -\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{t}{\ell}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{t}{\ell}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{t}{\ell}\right)}\left(\operatorname{ch}^2\left(\frac{t}{\ell}\right) - 1, -\operatorname{sh}\left(\frac{t}{\ell}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{t}{\ell}\right)}\left(\operatorname{sh}^2\left(\frac{t}{\ell}\right), -\operatorname{sh}\left(\frac{t}{\ell}\right)\right) \\
&= \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{t}{\ell}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{t}{\ell}\right)}\left(\operatorname{sh}\left(\frac{t}{\ell}\right), -1\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$\|\gamma'(t)\|^2 = \frac{\operatorname{sh}^2\left(\frac{t}{\ell}\right)}{\operatorname{ch}^4\left(\frac{t}{\ell}\right)}(\operatorname{sh}^2\left(\frac{t}{\ell}\right) + 1) = \frac{\operatorname{sh}^2\left(\frac{t}{\ell}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{t}{\ell}\right)}$$

et finalement

$$\|\gamma'(t)\| = \frac{\left|\operatorname{sh}\left(\frac{t}{\ell}\right)\right|}{\operatorname{ch}\left(\frac{t}{\ell}\right)} = \left|\operatorname{th}\left(\frac{t}{\ell}\right)\right|.$$

Seul le point $t = 0$ est donc irrégulier.

2) Montrer que $\gamma'(t)$ est proportionnel à $\eta(t) - \gamma(t)$ et déterminer le coefficient de proportionnalité.

Rép.– On a

$$\eta(t) - \gamma(t) = \left(\ell \operatorname{th}\left(\frac{t}{\ell}\right), -\frac{\ell}{\operatorname{ch}\left(\frac{t}{\ell}\right)}\right) = \frac{\ell}{\operatorname{ch}\left(\frac{t}{\ell}\right)}(\operatorname{sh}\left(\frac{t}{\ell}\right), -1)$$

d'où

$$\gamma'(t) = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{t}{\ell}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{t}{\ell}\right)}\left(\operatorname{sh}\left(\frac{t}{\ell}\right), -1\right) = \frac{1}{\ell}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{t}{\ell}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{t}{\ell}\right)}(\eta(t) - \gamma(t))$$

Le coefficient de proportionnalité est donc $\frac{1}{\ell}\operatorname{th}\left(\frac{t}{\ell}\right)$.

3) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\|\eta(t) - \gamma(t)\| = \ell$. En déduire que γ est une tractrice de η.

Rép.– On a

$$\|\eta(t) - \gamma(t)\|^2 = \frac{\ell^2}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{t}{\ell}\right)}(\operatorname{sh}^2\left(\frac{t}{\ell}\right) + 1) = \ell^2.$$

La courbe γ satisfait aux conditions a) et b), c'est donc une tractrice de η.

4) On note $\alpha(t)$ l'angle orienté entre $\eta'(t)$ et $\eta(t)-\gamma(t)$. Montrer que

$$\cos\alpha(t) = \operatorname{th}\left(\frac{t}{\ell}\right).$$

Rép.– Puisque η est paramétrée par la longueur d'arc et que le vecteur $\eta(t)-\gamma(t)$ est de norme ℓ on a

$$\cos\alpha(t) = \langle \frac{1}{\ell}(\eta(t)-\gamma(t)), \eta'(t)\rangle.$$

De $\eta'(t)=(1,0)$ et $\eta(t)-\gamma(t) = \frac{\ell}{\operatorname{ch}\left(\frac{t}{\ell}\right)}(\operatorname{sh}\left(\frac{t}{\ell}\right), -1)$ on déduit $\cos\alpha(t) = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{t}{\ell}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{t}{\ell}\right)}$.

5) Montrer qu'en tout point t tel que $\alpha(t)\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, on a

$$\alpha'(t) + \frac{1}{\ell}\sin\alpha(t) = 0.$$

Rép.– On dérive la relation obtenue à la question précédente.On a d'une part

$$(\cos\alpha(t))' = -\alpha'(t)\sin\alpha(t)$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\operatorname{th}\left(\tfrac{t}{\ell}\right)' &= \frac{1}{\ell}(1-\operatorname{th}^2\left(\frac{t}{\ell}\right))\\ &= \frac{1}{\ell}(1-\cos^2\alpha(t))\\ &= \frac{1}{\ell}\sin^2\alpha(t).\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à égaler et à simplifier.

Seconde partie.– On ne suppose plus que $\eta(t)=(t,0)$. On considère le cas général où $\eta : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe C^∞ régulière et paramétrée par la longueur d'arc. On note $k_{alg} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sa courbure algébrique et $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une tractrice de η (attention, γ n'est pas paramétrée par la longueur d'arc en général). On suppose que $\mathbb{R}^2$ est orientée de façon standard et on note Jv le vecteur obtenu par rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ du vecteur v.

1) Trouver les coordonnées du vecteur $\eta(t)-\gamma(t)$ dans la base $(\eta'(t), J\eta'(t))$ en fonction de $\alpha(t)$ et de ℓ.

Rép.– La base $(\eta'(t), J\eta'(t))$ est orthonormée directe, le vecteur $\eta(t)-\gamma(t)$ est de norme ℓ et fait un angle α par rapport à $\eta'(t)$, on a donc

$$\eta(t)-\gamma(t) = \ell\cos\alpha(t)\eta'(t) + \ell\sin\alpha(t)J\eta'(t).$$

2) Montrer que pour tout $t \in I$ on a

$$\gamma'(t) = (1 + \ell(\alpha'(t) + k_{alg}(t)) \sin \alpha(t))\, \eta'(t) - \ell(\alpha'(t) + k_{alg}(t)) \cos \alpha(t) J\eta'(t).$$

Rép.– De la relation obtenue à la question précédente, on déduit

$$\gamma(t) = \eta(t) - \ell \cos \alpha(t)\eta'(t) - \ell \sin \alpha(t) J\eta'(t).$$

En dérivant, il vient

$$\begin{array}{rcl} \gamma'(t) & = & \eta'(t) + \alpha'(t)\ell \sin \alpha(t)\eta'(t) - \ell \cos \alpha(t)\eta''(t) \\ & & -\alpha'(t)\ell \cos \alpha(t) J\eta'(t) - \ell \sin \alpha(t) J\eta''(t) \end{array}$$

Notons que $\eta''(t) = k_{alg}(t) n_{alg}(t)$ et que $n_{alg}(t) = J\eta'(t)$ ainsi

$$\eta''(t) = k_{alg} J\eta'(t).$$

De plus $J(J\eta'(t)) = -\eta'(t)$, on en déduit :

$$J\eta''(t) = -k_{alg}\eta'(t).$$

Ainsi

$$\begin{array}{rcl} \gamma'(t) & = & (1 + \alpha'(t)\ell \sin \alpha(t) + \ell k_{alg}(t) \sin \alpha(t))\eta'(t) \\ & & -(\alpha'(t)\ell \cos \alpha(t) + \ell k_{alg}(t) \cos \alpha(t)) J\eta'(t) \end{array}$$

ce qui est l'expression demandée.

3) Montrer que pour tout $t \in I$ on a

$$\alpha'(t) + \frac{1}{\ell} \sin \alpha(t) = -k_{alg}(t).$$

Indication : On pourra calculer $\gamma'(t) \wedge (\eta(t) - \gamma(t))$ en considérant $\mathbb{R}^2$ comme un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ pour donner un sens au produit vectoriel.

Rép.– Puisque γ est une tractrice de η, sa dérivée $\gamma'(t)$ est proportionnelle à $\eta(t) - \gamma(t)$ ce qui signifie que $\gamma'(t) \wedge (\eta(t) - \gamma(t)) = 0$. Le calcul explicite donne

$$\begin{array}{rcl} \gamma'(t) \wedge (\eta(t) - \gamma(t)) & = & (A\eta'(t) + BJ\eta'(t)) \wedge (\ell \cos \alpha(t)\eta'(t) + \ell \sin \alpha(t) J\eta'(t)) \\ & = & \ell(A \sin \alpha(t) - B \cos \alpha(t))\eta'(t) \wedge J\eta'(t) \end{array}$$

avec $A = 1 + (\alpha'(t) + k_{alg}(t))\ell \sin \alpha(t)$ et $B = -(\alpha'(t) + k_{alg}(t))\ell \cos \alpha(t)$. Ainsi

$$0 = A \sin \alpha(t) - B \cos \alpha(t) = \sin \alpha(t) + (\alpha'(t) + k_{alg}(t))\ell$$

d'où

$$\alpha'(t) + \frac{1}{\ell} \sin \alpha(t) = -k_{alg}(t)$$

ce qui est la relation demandée.

Troisième partie.– On suppose maintenant que $I = \mathbb{R}$ et que $\eta(t) = \big(R\cos\frac{t}{R}, R\sin\frac{t}{R}\big)$ où $R > \ell$.

1) Déterminer $k_{alg}(t)$ (on prendra soin du signe) ?

Rép.– Avec la paramétrisation donnée pour η, on a $\eta''(t) = -\frac{1}{R^2}\eta(t)$. Or la normale algébrique est $n_{alg}(t) = \frac{1}{R}J\eta'(t) = -\frac{1}{R}\eta(t)$ et donc $k_{alg} = k = \frac{1}{R}$.

2) Soit $\alpha_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Sous quelle(s) condition(s) la fonction constante $\alpha \equiv \alpha_0$ peut-elle être solution de l'équation obtenue au 3) de la seconde partie ?

Rép.– La fonction $\alpha \equiv \alpha_0$ est solution de $\alpha'(t) + \frac{1}{\ell}\sin\alpha(t) = -k_{alg}(t)$ si et seulement si

$$\frac{1}{\ell}\sin\alpha_0 = -k_{alg} \quad \text{i. e.} \quad \sin\alpha_0 = -\frac{\ell}{R}.$$

Puisque $0 < \ell < R$, on a $-\frac{\ell}{R} \in]-1, 0[$. Donc $\alpha \equiv \alpha_0$ est solution si et seulement si $\alpha_0 \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ et $\ell = -R\sin\alpha_0$.

3) On suppose que α est une fonction constante égale à $\alpha_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$. Montrer que $\|\gamma(t)\|^2 = \sqrt{R^2 - \ell^2}$ et en déduire la nature du support de la tractrice.

Rép.– Notons d'abord que $\eta(t) = Rn(t) = -Rn_{alg}(t) = -RJ\eta'(t)$. De

$$\gamma(t) = \eta(t) - \ell\cos\alpha(t)\eta'(t) - \ell\sin\alpha(t)J\eta'(t)$$

on déduit

$$\gamma(t) = -RJ\eta'(t) - \ell\cos\alpha_0\eta'(t) - \ell\sin\alpha_0 J\eta'(t).$$

Puis, comme $\sin\alpha_0 = -\frac{\ell}{R}$, on a aussi $\cos\alpha_0 = \sqrt{1 - \frac{\ell^2}{R^2}}$ d'où

$$\gamma(t) = -\ell\sqrt{1 - \frac{\ell^2}{R^2}}\eta'(t) + (-R + \ell\frac{\ell}{R})J\eta'(t)$$

et

$$\begin{aligned}
\|\gamma(t)\|^2 &= \ell^2\left(1 - \frac{\ell^2}{R^2}\right) + R^2\left(-1 + \frac{\ell^2}{R^2}\right)^2 \\
&= \ell^2 - \frac{\ell^4}{R^2} + R^2 - 2\ell^2 + \frac{\ell^4}{R^2} \\
&= R^2 - \ell^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent le support de γ est un cercle (ou une portion de cercle) de rayon $r = \sqrt{R^2 - \ell^2}$ et de centre l'origine de $\mathbb{R}^2$.

Formulaire de trigonométrie hyperbolique :

$$\begin{array}{lll} \operatorname{ch}' t = \operatorname{sh} t & \operatorname{sh}' t = \operatorname{ch} t & \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1 \\ \operatorname{th} t = \dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} & \operatorname{th}' t = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t} = 1 - \operatorname{th}^2 t & \end{array}$$