Université Claude Bernard Lyon 1

# M1 – Géométrie

## Contrôle continu 2 du lundi 22 octobre 2018

*Les documents sont autorisés mais les calculettes et les téléphones portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.*

**Problème.** – Le but de ce problème est d'étudier l'effet sur les courbes de l'application suivante :

$$\begin{array}{cccc} \Psi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (\rho,\theta) & \longmapsto & (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \end{array}$$

Attention : contrairement aux coordonnées polaires usuelles, l'ensemble de départ étant $\mathbb{R}^2$, on permet à $\rho$ d'être négatif.

### Première partie : Étude d'exemples

1) Écrire l'équation cartésienne de l'image par $\Psi$ des droites suivantes :
 i) $\rho = a$ avec $a \in \mathbb{R}$.
 ii) $\theta = a$ avec $a \in \mathbb{R}$.

2) Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère la courbe $\theta \mapsto \alpha(\theta) = \Psi(a\theta, \theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.
 i) Montrer que la courbe $\alpha$ est régulière.
 ii) Montrer que la courbure $k_{alg}$ en tout point $\theta \in \mathbb{R}$ vaut

$$k_{alg}(\theta) = \frac{2+\theta^2}{a(1+\theta^2)^{3/2}}.$$

 iii) Déterminer sa dérivée $k'_{alg}$.
 iv) En déduire que l'image de la droite $\rho = a\theta$ est composée de l'origine et de l'union de deux spirales.

3) Le but de cette question est de dessiner le support de $\alpha$ pour $a = 1$. On distingue deux cas selon que $\theta \geq 0$ ou que $\theta < 0$.
 i) Étudier $\alpha$ pour $\theta \in [0, +\infty[$ et tracer le support $\alpha([0, +\infty[)$.
 ii) Soit $R$ la réflexion par rapport à l'axe des ordonnées $R(x, y) = (-x, y)$. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $\alpha(-\theta) = R(\alpha(\theta))$.
 iii) Dessiner le support de $\alpha$ pour $\theta \in ]-\infty, 0[$.

## Deuxième partie : Effet de $\Psi$ sur les courbes passant par l'origine

Soient $I$ un intervalle ouvert contenant 0 et

$$\begin{array}{rccc} \delta : & I & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (\rho(t), \theta(t)) \end{array}$$

une courbe paramétrée birégulière de classe $C^\infty$. On considère la courbe paramétrée $\gamma = \Psi \circ \delta : I \to \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, $t \mapsto \rho(t)e^{i\theta(t)}$.

4) Montrer que si $\gamma$ ne passe pas par l'origine alors $\gamma$ est régulière.

5) On suppose maintenant que $\delta$ passe par l'origine au temps $t = 0$ tout en restant birégulière : $\delta(0) = (0, 0)$.

i) Montrer que $\gamma$ est régulière en $t = 0$ si et seulement si la tangente à $\delta$ en $t = 0$ n'est pas verticale.

ii) Montrer que $\gamma$ est birégulière en $t = 0$ (i.e. $\gamma'(0)$ et $\gamma''(0)$ sont linéairement indépendants) si et seulement si la tangente à $\delta$ en $t = 0$ n'est ni verticale, ni horizontale.

6) On suppose maintenant que $\delta$ est birégulière, passe par l'origine au temps $t = 0$ et que sa tangente en ce point est verticale. En particulier, $\gamma$ n'est pas régulière au temps $t = 0$.

i) Montrer que $\gamma''(0) = \rho''(0)e^{i\theta(0)}$ avec $\rho''(0) \neq 0$.

ii) On admet que

$$\gamma'''(0) = (\rho'''(0) + 3i\theta'(0)\rho''(0))e^{i\theta(0)}.$$

Montrer que $\gamma$ admet un point de rebroussement de première espèce en $t = 0$.

## Troisième partie : Effet désingularisant de $\Psi^{-1}$

Soient $p$ et $q$ deux entiers tels que $0 < p < q$ avec $p$ pair et $q$ impair. On note $C_{p,q}(I)$ l'ensemble des courbes paramétrées $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ telles que :

a) $\gamma(0) = (0, 0)$,

b) pour tout $t \in I$, $x(t) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $t = 0$,

c) $x^{(k)}(0) = 0$ pour tout $0 \leq k < p$, $y^{(k)}(0) = 0$ pour tout $0 \leq k < q$ et $x^{(p)}(0) \neq 0$ et $y^{(q)}(0) \neq 0$.

Ces conditions impliquent que la courbe $\gamma$ admet en $t = 0$ un point de rebroussement de première espèce si $q$ est impaire et de seconde espèce sinon.

7) Montrer que $t \mapsto (t^p, t^q)$ est dans $C_{p,q}(\mathbb{R})$. Dessiner le support de cette courbe pour $(p, q) = (2, 3)$ et pour $(p, q) = (2, 4)$.

8) Soit $\gamma \in C_{p,q}(I)$. Montrer que :

i) $\lim_{t\to 0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$.

ii) $\arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) = \frac{p!\, y^{(q)}(0)}{q!\, x^{(q)}(0)} t^{q-p} + o(t^{q-p})$ (on rappelle que $\arctan x = x + o(x)$).

iii) $\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \frac{x^{(p)}(0)}{p!} t^p + o(t^p)$ (on rappelle que $\sqrt{1 + x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$).

Pour tout $\gamma \in C_{p,q}(I)$, on définit

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{\gamma}: & I & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & (\widetilde{x}(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}, \widetilde{y}(t) = \arctan \frac{y(t)}{x(t)}) \end{array}$$

On convient que, en $t = 0$, l'écriture $\arctan \frac{y(0)}{x(0)}$ signifie 0 et on admet que $\widetilde{\gamma}$ est $C^\infty$.

9) Soit $\gamma \in C_{p,q}(I)$. Montrer que $\Psi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$.

10) Soit $\gamma \in C_{p,q}(I)$ (avec toujours $p$ pair).

i) Montrer que si $q - p > p$ alors $\widetilde{\gamma} \in C_{p,q-p}(I)$. La nature du point de rebroussement en $t = 0$ est-elle conservée ?

ii) Montrer que si $q - p < p$ alors $\widetilde{\gamma}$ présente en $t = 0$ un point ordinaire (on dit alors que l'on a « résolu » le point singulier).

iii) Montrer qu'en itérant un nombre fini de fois l'application $\gamma \mapsto \widetilde{\gamma}$, on obtient une courbe qui présente en $t = 0$ un point ordinaire.

*Note culturelle.–* Le procédé esquissé ici est à l'origine d'une méthode de désingularisation très utilisée en géométrie algébrique : l'éclatement. Je vous recommande, une fois remis de cette épreuve, d'en apprendre plus en jetant un oeil au livre d'Étienne Ghys, *A singular mathemacal promenade*, p. 111 et suivantes (pdf disponible gratuitement sur la page de l'auteur). C'est accessible, passionnant et truffé de belles illustrations.