Université Claude Bernard Lyon 1

M1 – Géométrie

Contrôle continu 2 du 10 novembre 2020 - Durée : 2h

Les documents sont autorisés mais les calculettes et les téléphones portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Problème. – Dans tout le problème, on travaille dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On note $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire. Le but de ce problème est de démontrer le théorème de Holditch. Il est composé de trois parties relativement indépendantes.

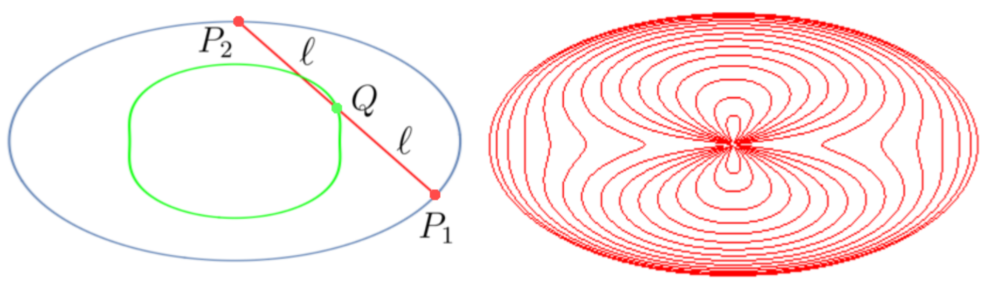
Pour vos calculs, un formulaire de trigonométrie est à votre disposition en fin de sujet.

Première partie : Courbes de Holditch de l'ellipse

Soient $a \geq b > 0$. On note E l'ellipse dont une équation cartésienne est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Deux points quelconques $P_1 = (x_1, y_1)$ et $P_2 = (x_2, y_2)$ de E définissent un segment $[P_1P_2]$ que l'on appelle *une corde de* E. Étant donné $0 < \ell < 1$, on considère l'ensemble des cordes de longueur 2ℓ et on s'intéresse au lieu Γ_ℓ des points milieux $Q = (x, y)$, $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y = \frac{y_1+y_2}{2}$, de toutes les cordes de longueur 2ℓ. Les ensembles Γ_ℓ sont des cas particuliers de supports de *courbes de Holditch*.



Courbes Γ_ℓ de Holditch de l'ellipse pour différentes valeurs de ℓ.

1) On suppose que $a = b = 1$ autrement dit que E est le cercle C de centre l'origine et de rayon 1.

a) Montrer que $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{QP_1}$ sont orthogonaux.

b) En déduire que Q est dans un cercle de rayon $\sqrt{1-\ell^2}$

c) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x_1 - x = -\alpha y \\ y_1 - y = \alpha x \end{cases}$$

et déterminer α^2.

d) En déduire que Γ_ℓ est le cercle $C(O, \sqrt{1-\ell^2})$ de centre l'origine O et de rayon $\sqrt{1-\ell^2}$.

2) On ne suppose plus désormais que $a = b = 1$. Soit

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (ax, by).$$

Montrer que $\Phi(C) = E$.

3) On considère un nouveau produit scalaire, noté $(.|.)$ et défini comme suit

$$(V|W) := \frac{V_1 W_1}{a^2} + \frac{V_2 W_2}{b^2}$$

pour tout $V = (V_1, V_2)$ et $W = (W_1, W_2)$. Ce produit scalaire coïncide avec le produit scalaire usuel $\langle ., . \rangle$ si $a = b = 1$.

a) Montrer [1] que $(\Phi(V)|\Phi(W)) = \langle V, W \rangle$.

b) Soit $V = (V_1, V_2)$ un vecteur non nul. Montrer que $W = (W_1, W_2)$ est orthogonal à V pour $(.|.)$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$W_1 = -\alpha a^2 V_2 \quad \text{et} \quad W_2 = \alpha b^2 V_1$$

4) a) Soient $q = \Phi^{-1}(Q)$, et $p_1 = \Phi^{-1}(P_1)$, $p_2 = \Phi^{-1}(P_2)$. Montrer que q est le point milieu de p_1 et p_2.

b) En utilisant la question $1a$), montrer que $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{QP_1}$ sont orthogonaux pour $(.|.)$.

c) En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$x_1 - x = -\alpha a^2 y \quad \text{et} \quad y_1 - y = \alpha b^2 x$$

1. On identifie l'application affine Φ avec son application linéaire associée.

et montrer que $\alpha^2 = \dfrac{\ell^2}{b^4x^2 + a^4y^2}$.

d) Écrire le théorème de Pythagore pour le produit scalaire $(.|.)$ au triangle (OQP_1) et en déduire que

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(x_1 - x)^2}{a^2} + \frac{(y_1 - y)^2}{b^2}.$$

e) Montrer que si $(x, y) \in \Gamma_\ell$ alors

$$\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right) = \frac{\ell^2}{a^2b^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) \quad (Eq.1).$$

Deuxième partie : Le théorème de Holditch pour les ellipses

5) On note (r, θ) avec $r \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ les coordonnées polaires de (x, y). Montrer que $(x, y) \in E$ si et seulement si

$$r = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}}}$$

6) On considère la paramétrisation polaire de E donnée par

$$\theta \mapsto r(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}}}.$$

avec $\theta \in [0, 2\pi]$.

a) Montrer que l'aire A enclose par E est donnée par

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} r(\theta)^2 d\theta.$$

b) Montrer que, pour tout $\theta \in [0, \pi/2[$, on a

$$r(\theta)^2 = \frac{a^2b^2(1 + \tan^2\theta)}{b^2 + a^2\tan^2\theta}.$$

c) Montrer que

$$A = 2\int_0^{+\infty} \frac{a^2b^2}{b^2 + a^2u^2} du$$

d) En déduire que $A = \pi ab$. On rappelle que

$$\int \frac{c}{c^2+u^2} du = \arctan \frac{u}{c} + Cte.$$

7) On note A_ℓ l'aire enclose par la courbe Γ_ℓ et on cherche à évaluer la différence $A - A_\ell$. On note $\theta \mapsto \rho(\theta)$ une paramétrisation polaire de Γ_ℓ. On admet [2] que

$$A_\ell = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho(\theta)^2 d\theta$$

avec

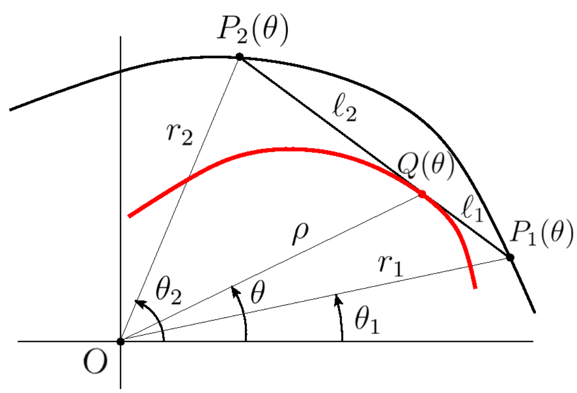
$$\rho(\theta)^2 = r^2(\theta) - \frac{a^2 b^2 \ell^2 (1 + \tan^2 \theta)}{b^4 + a^4 \tan^2 \theta}.$$

Montrer que

$$A - A_\ell = \pi \ell^2.$$

Troisième partie : Le théorème de Holditch dans le cas général

On considère une courbe paramétrée en polaire $\theta \to r(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, ainsi que deux reparamétrages $r_1 = r \circ \varphi_1$ et $r_2 = r \circ \varphi_2$ avec $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On note $P_1(\theta)$ et $P_2(\theta)$ les points de coordonnées polaire $(r_1(\theta), \varphi_1(\theta))$ et $(r_2(\theta), \varphi_2(\theta))$. On suppose que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la longueur de la corde $[P_1(\theta)P_2(\theta)]$ est constante, cette longueur étant notée L.



Dans ce schéma, on a noté θ_1 et θ_2 pour $\varphi_1(\theta)$ et $\varphi_2(\theta)$. Le support de r est en noir, celui de la courbe de Holditch de paramètre ℓ_1 et ℓ_2 est en rouge.

---

2. La paramétrisation polaire ρ s'obtient de la même façon qu'à la question 5) en remplaçant $x = \rho(\theta)\cos\theta$ et $y = \rho(\theta)\sin\theta$ dans l'équation $(Eq.1)$. On vous épargne ce calcul fastidieux.

Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux nombres positifs tels que $L = \ell_1 + \ell_2$. On s'intéresse à la courbe du point $Q(\theta) \in [P_1(\theta)P_2(\theta)]$ défini par

$$\|\overrightarrow{P_1(\theta)Q(\theta)}\| = \ell_1 \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{P_2(\theta)Q(\theta)}\| = \ell_2.$$

Cette courbe est appelée la *courbe de Holditch de paramètres* ℓ_1 *et* ℓ_2 *de* r.

8) On note $(\rho(\theta), \theta)$ les coordonnées polaires de $Q(\theta)$.

a) En remarquant que $Q(\theta)$ est le barycentre des points $(P_1(\theta), \ell_2/L)$ et $(P_2(\theta), \ell_1/L)$, montrer que

$$L\rho\cos\theta = \ell_2 r_1(\theta)\cos\varphi_1(\theta) + \ell_1 r_2(\theta)\cos\varphi_2(\theta)$$

$$L\rho\sin\theta = \ell_2 r_1(\theta)\sin\varphi_1(\theta) + \ell_1 r_2(\theta)\sin\varphi_2(\theta)$$

b) Montrer que

$$L^2 = r_1^2(\theta) + r_2^2(\theta) - 2r_1(\theta)r_2(\theta)\cos(\varphi_2(\theta) - \varphi_1(\theta)).$$

c) Déduire des deux questions précédentes que

$$\rho^2(\theta) = \frac{\ell_2 r_1^2(\theta) + \ell_1 r_2^2(\theta)}{L} - \ell_1\ell_2.$$

9) On suppose désormais que la courbe polaire $\theta \to r(\theta)$ est 2π-pédiodique et quelle est fermée (i.e. $r(0) = r(2\pi)$) et simple (i.e. r est injective sur $[0, 2\pi[$). Il en est donc de même pour r_1 et r_2.. On note A l'aire enclose par la courbe en polaire $\theta \mapsto r(\theta)$.

a) Montrer que

$$A = \frac{\ell_1}{2L}\int_0^{2\pi} r_1^2(\theta)d\theta + \frac{\ell_2}{2L}\int_0^{2\pi} r_2^2(\theta)d\theta.$$

b) On note A_{ℓ_1,ℓ_2} l'aire enclose par la courbe de Holditch en polaire $\theta \mapsto \rho(\theta)$. Montrer que

$$A - A_{\ell_1,\ell_2} = \pi\ell_1\ell_2.$$

Note culturelle. – Ce dernier résultat constitue le *théorème de Holditch.* Il est remarquable en deux points. Le premier est que la différence d'aire est indépendante de la la courbe de départ. La seconde est que cette différence est précisément l'aire d'une ellipse de demi-axes ℓ_1 et ℓ_2.

Formulaire trigonométrique.–

$$1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\begin{aligned}
\cos p + \cos q &= 2\cos\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}\\
\cos p - \cos q &= -2\sin\tfrac{p+q}{2}\sin\tfrac{p-q}{2}\\
\sin p + \sin q &= 2\sin\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}\\
\sin p - \sin q &= 2\sin\tfrac{p-q}{2}\cos\tfrac{p+q}{2}.
\end{aligned}$$