CM-C2 : Propriétés métriques des courbes

Vincent Borrelli

Université de Lyon

Spirales logarithmiques

Longueur et courbure

• A partir de maintenant $\mathbb{R}^3$ est muni d'un produit scalaire.

Définition.– Soit $I = (a, b)$ et $\gamma : I \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée. La LONGUEUR de γ est la quantité

$$Long(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt \leq +\infty.$$

L'ABSCISSE CURVILIGNE est la fonction

$$t \longmapsto S(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| \, du.$$

Longueur et courbure

Exemple 1.– Soient

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \gamma_1 & := & \gamma_{|[0,2\pi]} \\ \gamma_2 & := & \gamma_{|[0,4\pi]} \end{array} \right.$$

alors

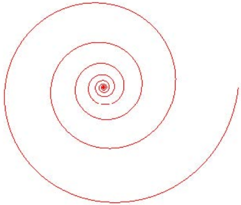
$$Long(\gamma) = +\infty, \quad Long(\gamma_1) = 2\pi \ \text{ et } \ Long(\gamma_2) = 4\pi.$$

Longueur et courbure

Exemple 2 : la spirale logarithmique ou *Spira Mirabilis*.– C'est la courbe paramétrée plane γ définie en polaire par

$$r(\theta) = ae^{b\theta}$$

où $a > 0$, $b \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.



• Notons que $\lim_{\theta \longrightarrow -\infty} \gamma(\theta) = O$, i. e. l'origine est point asymptote.

Longueur et courbure

- Rappelons que

$$\begin{aligned}\|\gamma'(\theta)\|^2 &= r(\theta)^2 + r'(\theta)^2\\ &= a^2(1+b^2)e^{2b\theta}.\end{aligned}$$

- Soit $X > 0$. On a

$$\begin{aligned}\int_{-X}^{\theta}\|\gamma'(u)\|du &= \int_{-X}^{\theta} a\sqrt{1+b^2}\,e^{bu}du\\ &= \left[\frac{a}{b}\sqrt{1+b^2}\,e^{bu}\right]_{-X}^{\theta}\\ &= \frac{\sqrt{1+b^2}}{b}\left(r(\theta)-r(-X)\right).\end{aligned}$$

- D'où, en passant à la limite

$$S(\theta) = \int_{-\infty}^{\theta}\|\gamma'(u)\|du = \frac{\sqrt{1+b^2}}{b}r(\theta).$$

Longueur et courbure

Définition.– On dit qu'une courbe γ est PARAMÉTRÉE PAR LA LONGUEUR D'ARC (ou encore PARAMÉTRÉE PAR L'ABSCISSE CURVILIGNE) si pour tout t on a $\|\gamma'(t)\| = 1$.

Proposition.– *Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ une courbe C^k, $k \geq 1$, régulière. Alors, existe un C^k-reparamétrage $\varphi : [0, L] \longrightarrow [a, b]$ tel que $\beta = \gamma \circ \varphi$ soit paramétrée par la longueur d'arc.*

Démonstration.– La fonction abscisse curviligne est dérivable et

$$S'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0.$$

Par conséquent S est une fonction C^k strictement croissante, c'est donc un C^k-difféomorphisme de $[a, b]$ dans $[0, L]$.

Longueur et courbure

• On pose

$$\varphi = S^{-1} : \begin{array}{ccc} [0, L] & \longrightarrow & [a, b] \\ s & \longmapsto & t = \varphi(s) \end{array}$$

et on a

$$\varphi'(s) = \frac{1}{S'(\varphi(s))} = \frac{1}{\|\gamma'(\varphi(s))\|}.$$

• Posons $\beta := \gamma \circ \varphi : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. On a

$$\beta'(s) = \gamma'(\varphi(s)).\varphi'(s)$$

d'où

$$\|\beta'(s)\| = \|\gamma'(\varphi(s))\|.\frac{1}{\|\gamma'(\varphi(s))\|} = 1.$$

$\square$

Longueur et courbure

Proposition.– *Soit $\beta = \gamma \circ \varphi$ un C^k-reparamétrage ($k \geq 1$) de γ alors $Long(\gamma) = Long(\beta)$.*

Démonstration.– Il s'agit d'appliquer la formule de changement de variables dans une intégrale. En effet

$$\begin{aligned} Long(\beta) &= \int_J \|\beta'(t)\| dt \\ &= \int_J \|(\gamma \circ \varphi)'(t)\| dt \\ &= \int_J \|\gamma'(\varphi(t))\|.\|\varphi'(t)\| dt \\ &= \int_I \|\gamma'(u)\| du \\ &= Long(\gamma). \end{aligned}$$

□

Longueur et courbure

Définition.– Soit $\gamma : I \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ paramétrée par la l.a. Le nombre

$$k(s) := \|\gamma''(s)\|$$

est appelé LA COURBURE de γ en s (ou encore, COURBURE PRINCIPALE).

• Un point $s \in I$ où $k(s) \neq 0$ est dit BIRÉGULIER.

• Soit s un point birégulier, on appelle NORMALE PRINCIPALE en s le vecteur

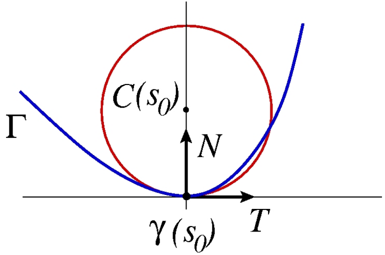
$$N(s) := \frac{1}{\|\gamma''(s)\|}\gamma''(s).$$

• Si $\gamma : I \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est régulière et n'est pas paramétrée par la l.a. alors la COURBURE de γ en t est celle de $\gamma \circ \varphi$ ($\varphi = S^{-1}$) au point $t = \varphi(s)$.

Longueur et courbure

Définition.– On appelle CENTRE DE COURBURE en un point s_0 d'une courbe birégulière paramétrée par la l.a. le point

$$C(s_0) = \gamma(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} N(s_0).$$



• Le CERCLE DE COURBURE au point s_0 est le cercle de centre $C(s_0)$ et de rayon $\dfrac{1}{k(s_0)}$.

Longueur et courbure

Interprétation géométrique.– Le développement de Taylor de γ s'écrit

$$\begin{aligned}\gamma(s)-\gamma(s_0) &= (s-s_0)\gamma'(s_0)+\frac{(s-s_0)^2}{2}\gamma''(s_0)+o((s-s_0)^2)\\ &= (s-s_0)T+k(s_0)\frac{(s-s_0)^2}{2}N+o((s-s_0)^2)\end{aligned}$$

• Un paramétrage par la l.a. δ du cercle de centre $C=\gamma(s_0)+\dfrac{1}{k(s_0)}N$ et de rayon $\dfrac{1}{k(s_0)}$ est donné par

$$\delta(s)=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{k(s_0)}\end{pmatrix}+\frac{1}{k(s_0)}\begin{pmatrix}\sin(k(s_0)(s-s_0))\\ -\cos(k(s_0)(s-s_0))\end{pmatrix}$$

(dans le repère $(\gamma(s_0),T,N)$).

Longueur et courbure

• Le développement de Taylor de δ s'écrit

$$\delta(s)-\delta(s_0)=(s-s_0)T+k(s_0)\frac{(s-s_0)^2}{2}N+o((s-s_0)^2).$$

• Ainsi *le cercle de courbure en s_0 à γ approche γ à l'ordre 2 en s_0.*

Proposition.– *Si γ est C^3, birégulière et si $k'(s_0)\neq 0$ alors le support de γ traverse le cercle osculateur en s_0.*

Démonstration.– Se placer dans le repère $(C(s_0),T,N)$ et définir

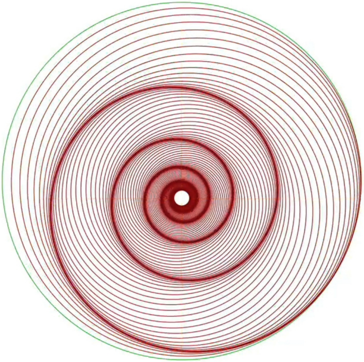
$$s\longmapsto f(s)=\langle\gamma(s),\gamma(s)\rangle.$$

• Faire un d.l. à l'ordre 3 pour constater que

$$f(s)-R^2=-\frac{k'(s_0)}{3k(s_0)}(s-s_0)^3+o((s-s_0)^3).$$

Longueur et courbure

Définition.– On appelle SPIRALE une courbe C^3 birégulière et telle que pour tout t, $k'(t) \neq 0$.

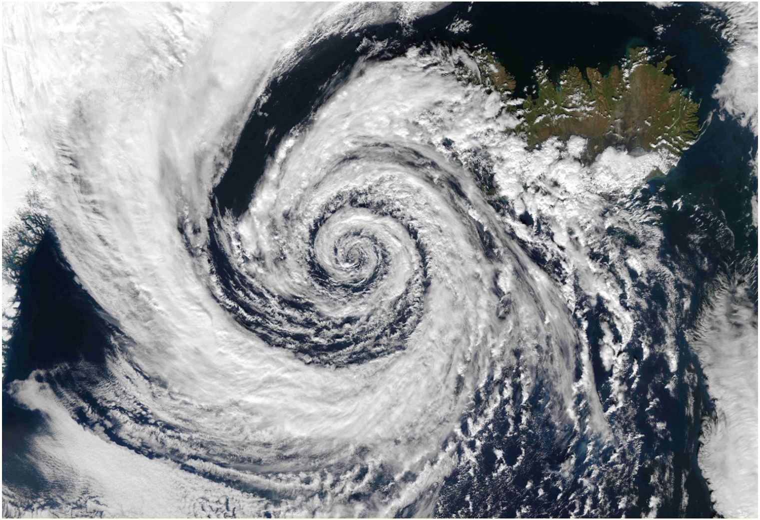


• De telles courbes traversent en tout point leur cercle osculateur.

Spirales dans la Nature

Une spirale logarithmique

Spirales dans la Nature



Une dépression en forme de spirale logarithmique

Spirales dans la Nature

Une galaxie en forme de spirale logarithmique

Spirales dans la Nature

Des escargots

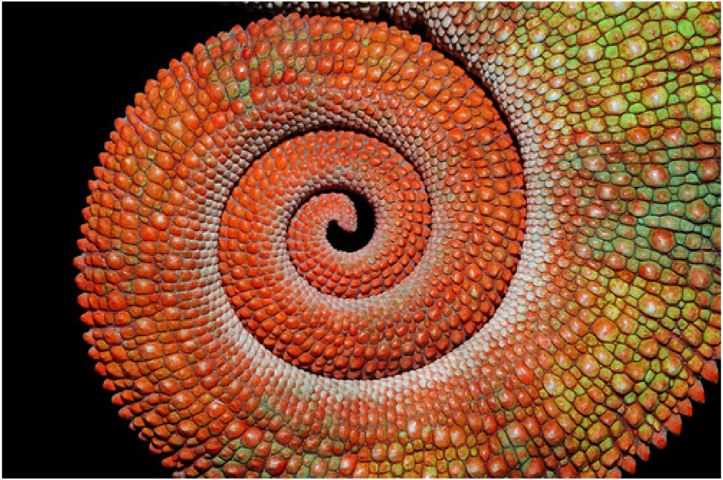
Spirales dans la Nature

Le cœur d'un tournesol

Spirales dans la Nature

La queue d'un caméléon

Spirales dans la Nature

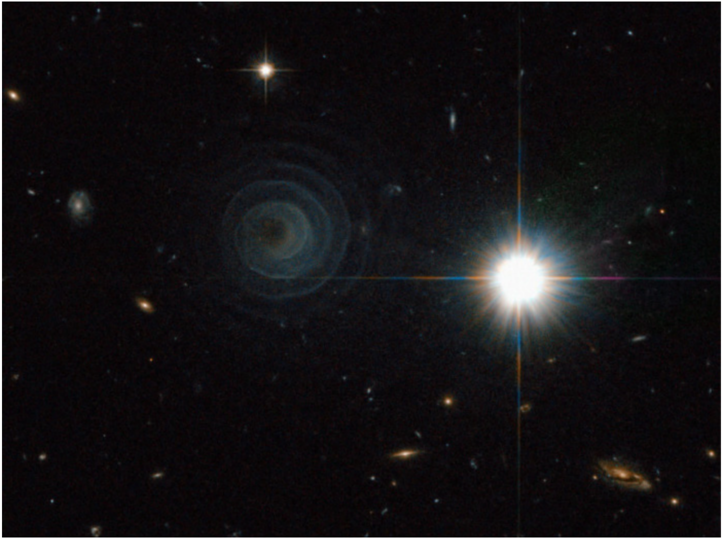


La queue d'un caméléon

Spirales dans la Nature

Un chou romanesco

Spirales dans la Nature



Une nébuleuse en forme de spirale d'Archimède

Courbes du plan

• Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe plane paramétrée par l.a. Pour tout $s \in I$, $(T(s), N(s))$ est une b.o.n. de $\mathbb{E}^2 = (\mathbb{R}^2, \langle ., . \rangle)$.

Formules de Frenet.– *On a*

$$\frac{dT}{ds}(s) = k(s)N(s) \quad \textit{et} \quad \frac{dN}{ds}(s) = -k(s)T(s).$$

Démonstration.– On a

$$\forall s \in I, \quad \langle N(s), N(s) \rangle = 1 \Longrightarrow \forall s \in I, \quad \langle \frac{dN}{ds}(s), N(s) \rangle = 0$$

donc il existe une fonction $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{dN}{ds}(s) = \alpha(s)T(s).$$

Courbes du plan

- D'autre part

$$\forall s \in I, \quad \langle N(s), T(s) \rangle = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\forall s \in I, \quad \langle \frac{dN}{ds}(s), T(s) \rangle = -\langle N(s), \frac{dT}{ds}(s) \rangle.$$

- Or

$$\frac{dT}{ds}(s) = \gamma''(s) = k(s)N(s)$$

d'où

$$\alpha(s) = \langle \frac{dN}{ds}(s), T(s) \rangle = -k(s).$$

$\square$

Courbes du plan

Définition.– Soit γ une courbe birégulière paramétrée par la l.a. de $\mathbb{E}^2$ orienté. La NORMALE ALGÉBRIQUE est le vecteur

$$N_{alg} := Rot_{+\frac{\pi}{2}}(T).$$

La COURBURE ALGÉBRIQUE est le nombre k_{alg} tel que

$$\frac{dT}{ds} = k_{alg} N_{alg}.$$

• Courbure et normale algébriques ne diffèrent au plus que d'un signe de la courbure et la normale principales. Si $N = N_{alg}$ alors $k = k_{alg}$ et si $N = -N_{alg}$ alors $k = -k_{alg}$. Dans tous les cas $|k_{alg}| = k$.

Courbes du plan

Proposition.– *Soit* $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{E}^2$ *une courbe plane régulière mais non nécessairement paramétrée par la l.a. Alors*

$$\forall t \in I, \quad k_{alg}(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Démonstration.– Par définition

$$k_{alg}(t) := \langle (\gamma \circ \varphi)''(s), N_{alg}(\varphi(s)) \rangle$$

avec $\varphi = S^{-1}$ et $t = \varphi(s)$.

• On a

$$\begin{aligned} (\gamma \circ \varphi)''(s) &= (\gamma'(\varphi(s)).\varphi'(s))' \\ &= \gamma''(\varphi(s)).\varphi'(s)^2 + \gamma'(\varphi(s)).\varphi''(s). \end{aligned}$$

Courbes du plan

• On a

$$k_{alg}(t) = \langle (\gamma \circ \varphi)''(s), N_{alg}(\varphi(s)) \rangle$$

et puisque

$$\langle \gamma'(\varphi(s)), N_{alg}(\varphi(s)) \rangle = 0$$

on en déduit

$$k_{alg}(t) = \langle \gamma''(\varphi(s)).\varphi'(s)^2, N_{alg}(\varphi(s)) \rangle.$$

• La normale algébrique est donnée par

$$N_{alg}(\varphi(s)) = \frac{1}{\sqrt{x'(\varphi(s))^2 + y'(\varphi(s))^2}} \begin{pmatrix} -y'(\varphi(s)) \\ x'(\varphi(s)) \end{pmatrix}$$

où $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

Courbes du plan

• Puisque

$$\varphi'(s) = \frac{1}{\|\gamma'(\varphi'(s))\|^2} = \frac{1}{x'(\varphi(s))^2 + y'(\varphi(s))^2}$$

on déduit

$$k_{alg} = \frac{1}{(x'(\varphi(s))^2 + y'(\varphi(s))^2)^{\frac{3}{2}}} \langle \begin{pmatrix} x''(\varphi(s)) \\ y''(\varphi(s)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y'(\varphi(s)) \\ x'(\varphi(s)) \end{pmatrix} \rangle$$

Ce qui est l'expression recherchée. $\square$

Corollaire immédiat.– *Pour une courbe en polaire on a*

$$k_{alg}(\theta) = \frac{r(\theta)^2 + 2r'(\theta)^2 - r(\theta)r''(\theta)}{(r(\theta)^2 + r'(\theta)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Courbes du plan

Exemple : la spirale logarithmique (suite).–

• Puisque $r(\theta) = ae^{b\theta}$ on a

$$r' = br \quad \text{et} \quad r'' = b^2 r$$

d'où

$$r^2 + 2(r')^2 - rr'' = (1 + b^2)r^2 \quad \text{et} \quad r^2 + (r')^2 = (1 + b^2)r^2.$$

• Ainsi

$$\begin{aligned} k_{alg} &= \frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{(r^2 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{(1 + b^2)r^2}{(1 + b^2)^{\frac{3}{2}} r^3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}\, r}. \end{aligned}$$

Courbes du plan

• Le rayon de courbure au point θ est donc

$$R(\theta) = \frac{1}{k(\theta)} = \sqrt{1+b^2}\, r(\theta).$$

• Rappelons que

$$S(\theta) = \frac{\sqrt{1+b^2}}{b} r(\theta)$$

ainsi

$$R(\theta) = bS(\theta).$$

• Pour une spirale logarithmique, rayon de courbure et longueur d'arc sont donc proportionnels.

Courbes du plan

Théorème fondamental des courbes planes.– *Soit* $k_{alg} : [a,b] \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$. *Alors il existe une courbe* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{E}^2$ *paramétrée par la l.a. telle que sa courbure algébrique soit* k_{alg}. *De plus* γ *est unique à déplacement près.*

Démonstration.– Soit

$$\begin{array}{rccc} \theta_0 : & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s & \longmapsto & \displaystyle\int_a^s k_{alg}(u)du \end{array}$$

et $\gamma_0 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{E}^2$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(s) & = & \displaystyle\int_a^s \cos\theta_0(u)\, du \\ y(s) & = & \displaystyle\int_a^s \sin\theta_0(u)\, du \end{array} \right.$$

Courbes du plan

• On a immédiatement $\|\gamma_0'(s)\| = 1$ et $\gamma_0''(s) = k_{alg}(s)N_{alg}(s)$ d'où l'existence.

• Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{E}^2$ ayant la fonction k_{alg} pour courbure algébrique, γ étant paramétrée par la l.a. Il existe

$$\theta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

tel que

$$\forall s \in \ [a,b], \qquad \gamma'(s) = \cos\theta(s)\ e_1 + \sin\theta(s)\ e_2$$

où (e_1, e_2) est la base standard de $\mathbb{E}^2$.

• En particulier

$$\forall s \in \ [a,b], \qquad \theta'(s) = k_{alg}(s).$$

Courbes du plan

• On a donc

$$\theta(s) = \theta(a) + \int_a^s k_{alg}(u)\, du = \theta(a) + \theta_0(s).$$

• Quitte à effectuer une rotation d'angle $-\theta(a)$ on peut supposer que

$$\forall s \in [a, b], \qquad \theta(s) = \theta_0(s).$$

• En intégrant il vient

$$\begin{cases} x(s) = x_0 + \int_a^s \cos\theta_0(u)\, du \\ y(s) = y_0 + \int_a^s \sin\theta_0(u)\, du \end{cases}$$

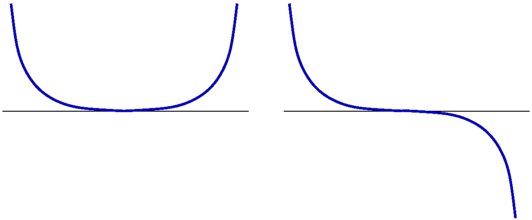
Courbes du plan

• Quitte à effectuer une translation de vecteur $-(x_0, y_0)$, on a donc

$$\forall s \in\ [a, b], \qquad \gamma(s) = \gamma_0(s).$$

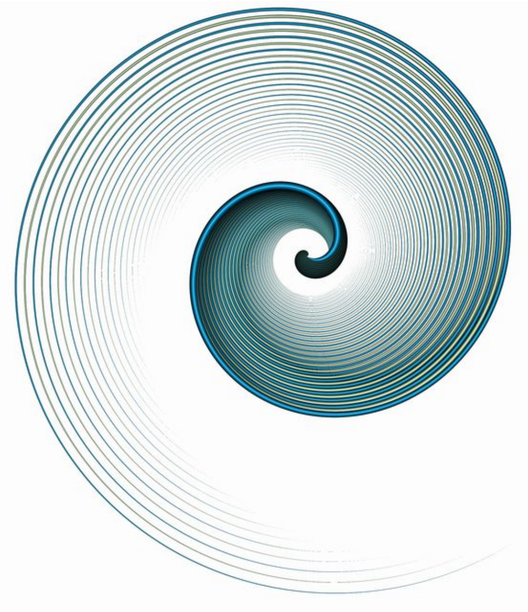
$\square$

• On ne peut pas remplacer k_{alg} par k pour l'unicité.

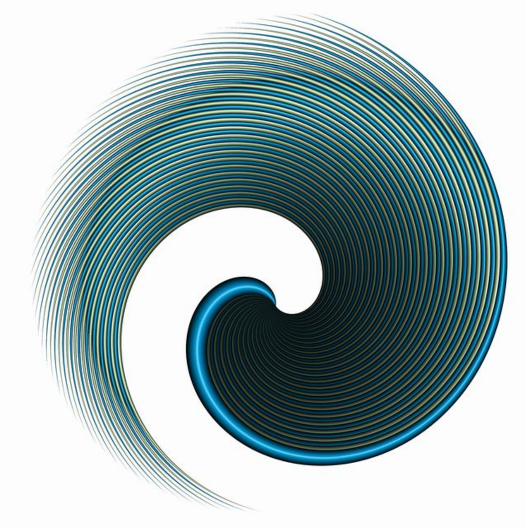


Fonctions k_{alg} différentes mais fonctions k identiques

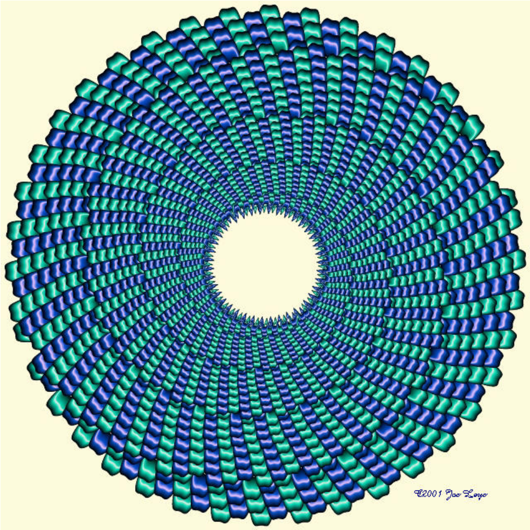
Toujours des spirales



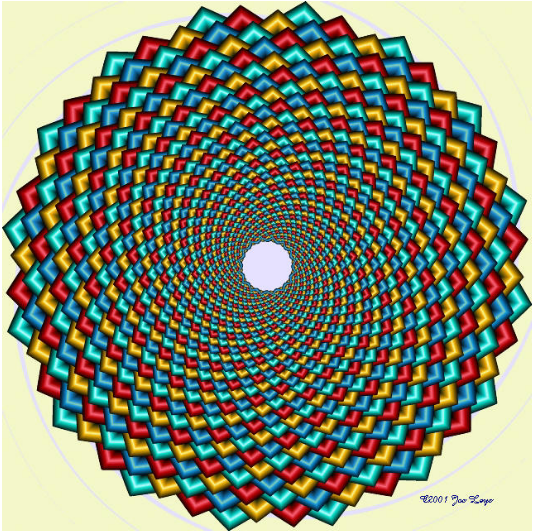
Toujours des spirales



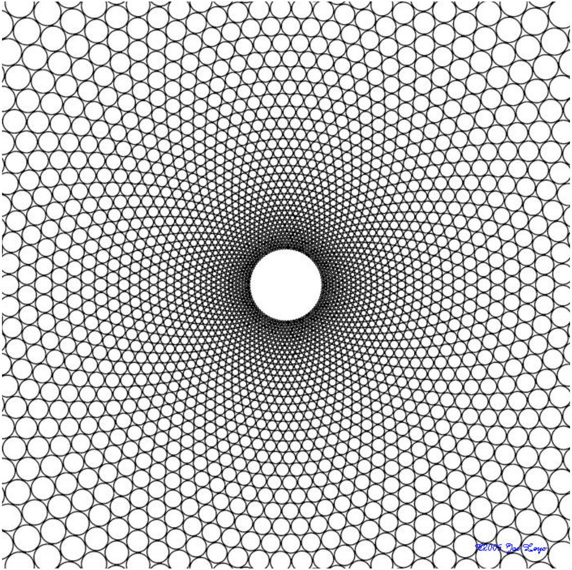
Toujours des spirales



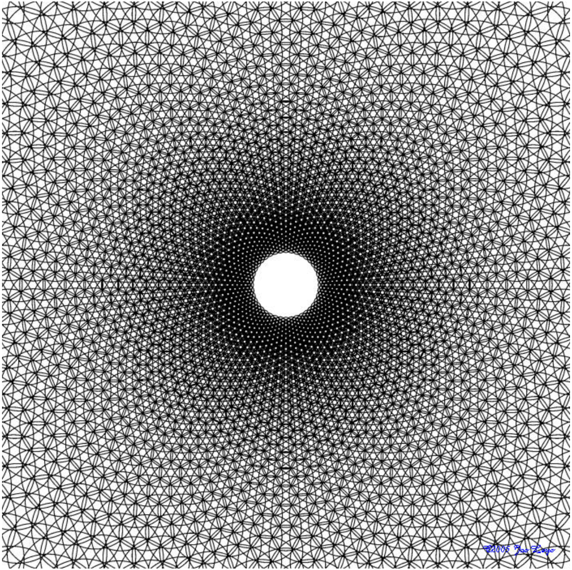
Toujours des spirales



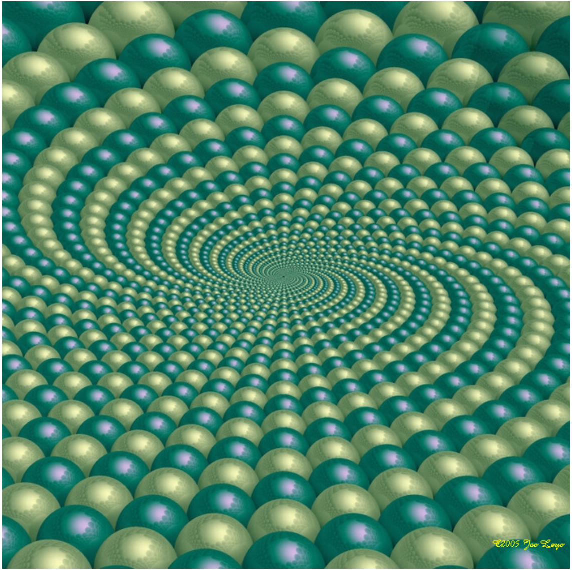
Toujours des spirales



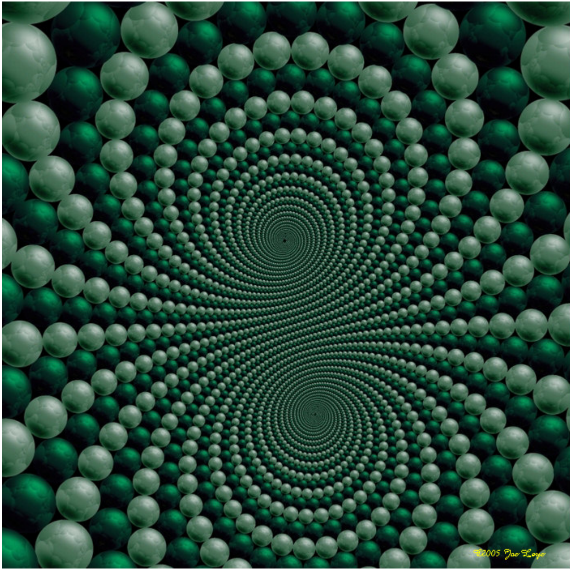
Toujours des spirales



Toujours des spirales



Toujours des spirales



Courbes de l'espace

• On suppose $\gamma : I \xrightarrow{C^3} \mathbb{E}^3$ paramétrée par la l.a. et $\mathbb{E}^3$ orienté.

Définition.– Soit $s \in I$ un point birégulier. Le vecteur $B(s) := T(s) \wedge N(s)$ s'appelle la BINORMALE en s à γ.

• Pour tout $s \in I$, le triplet $(T(s), N(s), B(s))$ est une b.o.n. directe de $\mathbb{E}^3$. Compte tenu de ce que

$$\forall s \in I, \quad \langle N(s), N(s)\rangle = 1 \quad \text{et} \quad \langle B(s), B(s)\rangle = 1$$

en dérivant, on obtient

$$\begin{cases} T' &= kN \\ N' &= aT + bB \\ B' &= cT + dN. \end{cases}$$

Courbes de l'espace

Définition.– Le nombre $b = \langle N', B\rangle$ s'appelle la TORSION de γ et se note τ.

• Les relations

$$\langle N, T\rangle = 0, \quad \langle B, T\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle B, N\rangle = 0$$

montrent que $a = -k$, $c = 0$ et $d = -\tau$ d'où les **formules de Frenet** :

$$\left\{\begin{array}{lcl} T' & = & kN \\ N' & = & -kT + \tau B \\ B' & = & -\tau N. \end{array}\right.$$

• Rappelons que, dans ces formules, les dérivations se font par rapport à l'abscisse curviligne.

Courbes de l'espace

Proposition.– *Soit* $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{E}^3$ *une courbe* C^3 *birégulière mais non nécessairement paramétrée par la l.a. On a*

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \quad B(t) = \frac{\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}, \quad N(t) = B(t) \wedge T(t)$$

$$k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}, \quad \text{et} \quad \tau(t) = \frac{[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)]}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}.$$

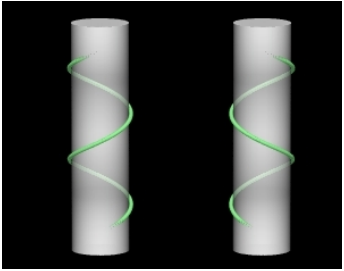
Démonstration.– Procéder de la même façon que pour les courbes planes... $\square$

Courbes de l'espace

Exemple : l'hélice circulaire.– Soit $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$ définie par

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) & = & a\cos t \\ y(t) & = & \pm a\sin t \\ z(t) & = & bt \end{pmatrix}$$

où $a > 0$ et $b > 0$.



Courbes de l'espace

- Un calcul direct montre que l'abscisse curviligne compté depuis $t = 0$ vaut

$$S(t) = \sqrt{a^2 + b^2}\, t.$$

- Puis que

$$k = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

En particulier k et τ sont des fonctions constantes.

Courbes de l'espace

Théorème fondamental des courbes gauches (admis).– *Soit* $k : [a, b] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}_+^*$ *et* $\tau : [a, b] \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$*. Alors il existe une unique courbe (à déplacement près)* $\gamma : [a, b] \xrightarrow{C^3} \mathbb{E}^3$ *paramétrée par la l.a. de courbure* k *et de torsion* τ*.*

• Ce résultat ne se généralise par au cas $k : [a, b] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}_+$.

Interprétation cinématique

• Si on interprète $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{E}^3$ comme la trajectoire d'un point mobile alors $\gamma'(t)$ est le VECTEUR VITESSE à l'instant t et $\gamma''(t)$ le VECTEUR ACCÉLÉRATION.

• On note $V(t)$ la norme du vecteur vitesse et $(\gamma'')^N$ la composante normale de l'accélération.

Proposition.– *On a*

$$\forall t \in I, \quad \|(\gamma''(t))^N\| = \frac{V^2(t)}{R(t)}$$

où $R(t) = \dfrac{1}{k(t)}$ *est le rayon de courbure.*

Interprétation cinématique

Démonstration.– On reparamétrise γ par $\varphi = S^{-1}$ de sorte que $\gamma \circ \varphi$ soit paramétrée par la l.a. On a vu précédemment que

$$(\gamma \circ \varphi)''(s) = \gamma''(\varphi(s)).\varphi'(s)^2 + \gamma'(\varphi(s)).\varphi''(s).$$

• Par conséquent

$$\gamma''(\varphi(s)) = \frac{1}{\varphi'(s)^2}\left((\gamma \circ \varphi)''(s) - \gamma'(\varphi(s)).\varphi''(s)\right) \quad (*)$$

• Or

$$(\gamma \circ \varphi)''(s) = k(\varphi(s)).N(s) \quad \text{et} \quad \gamma'(\varphi(s)) = \|\gamma'(\varphi(s))\|.T(s)$$

Interprétation cinématique

• Les deux termes du membre de droite de la formule $(*)$ donnent donc respectivement la composante normale et la composante tangentielle de l'accélération. En particulier

$$(\gamma''(t))^N = \frac{1}{\varphi'(s)^2}(\gamma\circ\varphi)''(s).$$

• Puisque

$$\varphi'(s) = \frac{1}{\|\gamma'(\varphi(s))\|}$$

on obtient donc

$$(\gamma''(t))^N = k(t)\|\gamma'(t)\|^2$$

ce qui est la formule recherchée. $\square$

Spirales en architecture

Newgrange, 3200 ans av. JC

Spirales en architecture

L'intérieur

Spirales en architecture

La « pierre d'entrée »

Spirales en architecture

Spirales logarithmiques à Corinthe, II siècle avant JC

Spirales en architecture

Les escaliers « Tulip Stairs » de la maison de la reine, à Greenwich 1635

Spirales en architecture

Escaliers de l'abbaye de Melk, Autriche 1736

Spirales en architecture

Escaliers « Giuseppe Momo » en double hélice au musée du Vatican, 1932

Spirales en architecture

Triple hélice au musée Pobo Galego, Espagne 1976

Spirales en architecture

Escaliers en hélice du musée Guggenheim, New York 1959