

# CM-C4 : Propriétés globales des courbes

Indice de  
rotation

Le théorème  
de Jordan

Camille  
Jordan

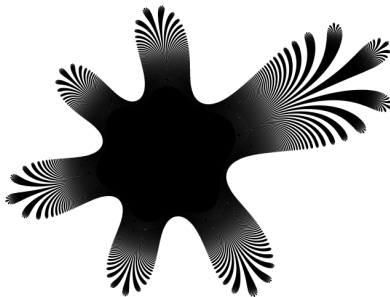
L'inégalité iso-  
périmétrique

Wilhelm  
Wirtinger

Le théorème  
des quatre  
sommets

Vincent Borrelli

Université de Lyon



## Indice de rotation

**Définition.**– Soit

$$\begin{aligned} \gamma : [a, b] &\xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

un lacet dont le support ne contient pas l'origine  $O$ . Le NOMBRE DE TOURS  $N(\gamma, O)$  DE  $\gamma$  PAR RAPPORT À  $O$  est l'entier relatif

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2} dt \in \mathbb{Z}.$$

**Interprétation géométrique.**– Ecrivons  $\gamma$  en polaire

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) &= r(t) \cos \theta(t) \\ y(t) &= r(t) \sin \theta(t) \end{cases}$$

## Indice de rotation

- On a

$$\int_a^b \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2} dt = \int_a^b \theta'(t) dt = \theta(b) - \theta(a).$$

- Comme  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que

$$\theta(b) - \theta(a) = 2\pi n.$$

**Définition.**— Soit  $\gamma : [a, b] \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}^2$  un lacet régulier, on appelle INDICATRICE de  $\gamma$  la courbe

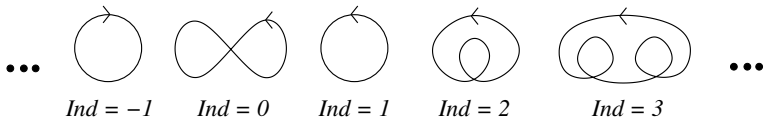
$$\gamma' : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}.$$

Le nombre de tours de  $\gamma'$  par rapport à  $O$  s'appelle l'INDICE DE ROTATION de  $\gamma$  et il se note

$$\text{Ind}(\gamma) := N(\gamma', O).$$

## Indice de rotation

### Exemples.—



**Théorème.—** Soit  $\gamma : [a, b] \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}^2$  un lacet régulier alors

$$Ind(\gamma) = -\frac{1}{2\pi} \int_a^b k_{alg}(t) \|\gamma'(t)\| dt.$$

En particulier, si  $\gamma$  est paramétrée par la l.a. alors :

$$Ind(\gamma) = -\frac{1}{2\pi} \int_a^b k_{alg}(s) ds.$$

**Démonstration.**— En effet, on a

$$\begin{aligned} \text{Ind}(\gamma) &= N(\gamma', O) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{x'y'' - y'x''}{x'^2 + y'^2} dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_a^b k_{\text{alg}}(t) \|\gamma'(t)\| dt. \end{aligned}$$

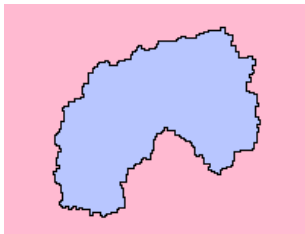
□

- Dans ce théorème, on ne peut pas remplacer  $k_{\text{alg}}$  par  $k$ .

**Théorème des tangentes tournantes (admis).**— *L'indice de rotation d'un lacet régulier simple est  $\pm 1$ , le signe dépendant de l'orientation de la courbe.*

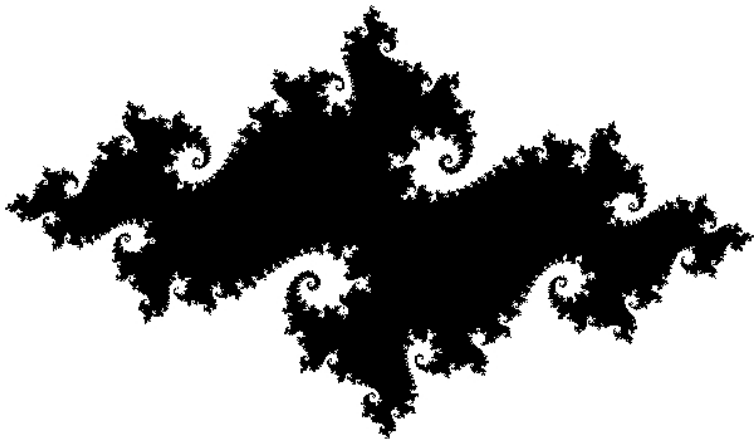
# Le théorème de Jordan

**Théorème de Jordan 1887.** – *Le support d'un lacet simple  $C^0$  du plan sépare  $\mathbb{R}^2$  en deux composantes connexes, une bornée et l'autre non.*



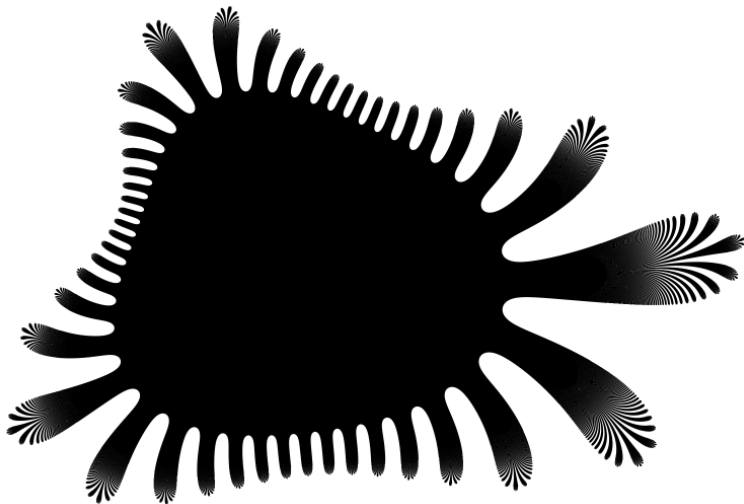
- Attention : résultat célèbre pour le caractère apparemment intuitif de son énoncé et la difficulté de sa démonstration.

# Le théorème de Jordan



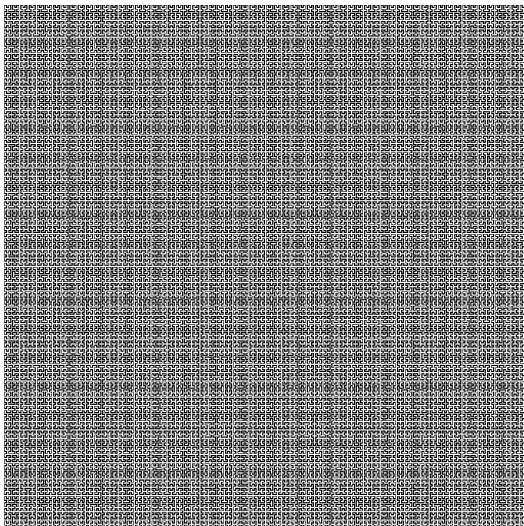
*Un ensemble de Julia*

# Le théorème de Jordan



*Un hérisson*

# Le théorème de Jordan



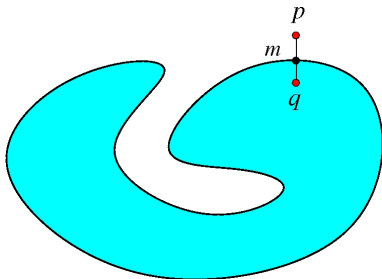
*Une courbe de Péano-Hilbert*

## Le théorème de Jordan

**Idée de la démonstration.**— Pour simplifier, on suppose que le lacet est  $C^\infty$ .

**PREMIÈRE ÉTAPE.**— Soit  $m \in \Gamma = \gamma([a, b])$ . On montre qu'il existe deux points  $p$  et  $q$  de la normale à  $\Gamma$  en  $m$ , situés de part et d'autre de  $m$  tel que

$$|N(\gamma, p) - N(\gamma, q)| = 1.$$



## Le théorème de Jordan

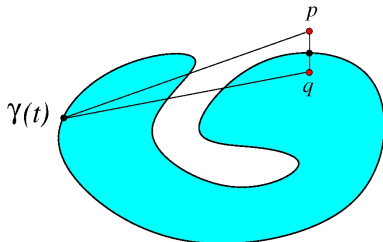
- L'idée pour démontrer que le nombre de rotation change d'une unité c'est de remarquer qu'il s'agit en fait d'un problème local. En effet, si  $\gamma(t)$  est loin de  $p$  et de  $q$  on a

$$\frac{(x(t) - x_p)y'(t) - (y(t) - y_p)x'(t)}{(x(t) - x_p)^2 + (y(t) - y_p)^2}$$
$$\approx$$
$$\frac{(x(t) - x_q)y'(t) - (y(t) - y_q)x'(t)}{(x(t) - x_q)^2 + (y(t) - y_q)^2}.$$

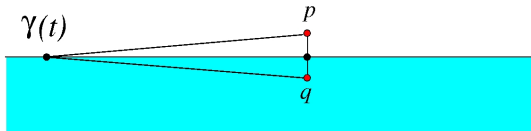
(prendre l'origine en  $m$ ).

## Le théorème de Jordan

- Par conséquent, les expressions dans les intégrales définissant  $N(\gamma, p)$  et  $N(\gamma, q)$  vont être relativement proches sauf éventuellement au voisinage de  $m$ .



- Un modèle local permet ensuite de voir que les nombres de rotation vont différer d'une unité.



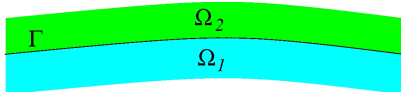
## Le théorème de Jordan

ETAPE 2.— Commençons par observer que l'application

$$\begin{aligned} N(\gamma, \cdot) : \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \rho &\longmapsto N(\gamma, \rho) \end{aligned}$$

est constante sur les composantes connexes de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  puisqu'elle est continue et à valeur dans  $\mathbb{Z}$ .

- Par conséquent, d'après l'étape 1,  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  possède au moins deux composantes connexes.
- En uniformisant le raisonnement de l'étape 1, on montre que le complémentaire de  $\Gamma$  dans un voisinage normal de  $\Gamma$  est formé de deux composantes connexes exactement. On les note  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .



## Le théorème de Jordan

ETAPE 3.— Décomposons  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  en composantes connexes :

$$\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma = C_1 \cup \dots \cup C_n \cup \dots$$

On peut toujours supposer  $\Omega_1 \subset C_1$  et  $\Omega_2 \subset C_2$ .

- Comme  $\Gamma$  est fermée, les  $C_i$  sont ouverts et nécessairement

$$\partial C_i = \overline{C_i} \setminus C_i \subset \Gamma.$$

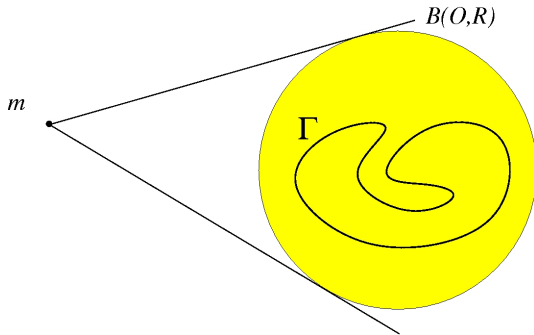
- D'autre part  $\partial C_i \neq \emptyset$  car si  $\partial C_i = \emptyset$  alors  $\overline{C_i} = C_i$ , ce qui signifie que  $C_i$  serait un ouvert-fermé, donc  $C_i = \mathbb{R}^2$ , contradiction.

- Au bilan  $\emptyset \neq \partial C_i \subset \Gamma$ . Mais, d'après l'étape 2, tout point de  $\Gamma$  a un voisinage ne rencontrant que  $\Omega_1 \subset C_1$  et  $\Omega_2 \subset C_2$ . Il ne peut donc y avoir que deux composantes connexes.

## Le théorème de Jordan

ETAPE 4.— Il faut maintenant montrer qu'une des composantes est bornée et l'autre non. Remarquons que  $\overline{C}_1$  et  $\overline{C}_2$  ne peuvent être toutes les deux compacts puisque  $\mathbb{R}^2 = \overline{C}_1 \cup \overline{C}_2$ .

- Puisque  $\Gamma$  est compact, il existe  $R > 0$  tel que  $\Gamma \subset B(O, R)$ . Soit  $m$  dans le complémentaire de  $B(O, R)$ . Notons qu'alors  $N(\gamma, m) = 0$  (le dessin explique pourquoi !)



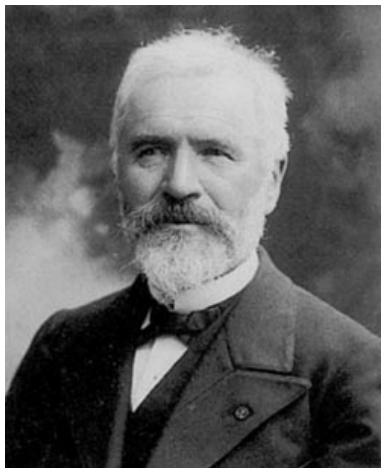
## Le théorème de Jordan

- D'après les étapes précédentes, tout point dans le complémentaire de  $B(O, R)$  appartient donc à la même composante connexe, disons  $C_1$ . Par conséquent, la composante  $C_2$  est contenue dans  $B(O, R)$ , c'est dire qu'elle est bornée. □



**Théorème de Jordan-Schönflies 1906 (admis).** – *La composante bornée est homéomorphe à un disque, la composante non bornée à un disque épointé.*

# Camille Jordan (1838-1922)



## Camille Jordan (1838-1922)

- Mathématicien né à Lyon... le laboratoire de mathématiques de l'université Lyon I porte son nom.
- Petit neveu d'un autre Camille Jordan, homme politique français, meneur royaliste du soulèvement de Lyon contre la Convention nationale en 1793.
- Outre le *théorème de Jordan*, il a laissé son nom à la *réduction de Jordan* (traduction matricielle de la réduction des endomorphismes) et au *théorème de Jordan-Hölder* sur les suites de composition des groupes.
- Pédagogue infatigable, il forme, encourage et fascine toute une génération de mathématiciens.

## Camille Jordan (1838-1922)



*Camille Jordan, élève à l'Ecole Polytechnique.*

# L'inégalité isopérimétrique

**Théorème (Inégalité isopérimétrique).**— Soient  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{E}^2$  un lacet simple continu et de classe  $C^1$  par morceaux et  $C_{int}$  la composante bornée de  $\mathbb{E}^2 \setminus \Gamma$  où  $\Gamma = \gamma(I)$ , alors :

$$\text{Long}^2(\gamma) \geq 4\pi \text{Aire}(C_{int})$$

avec égalité ssi  $\Gamma$  est un cercle.

- Un résultat connu des Grecs mais qui n'a été prouvé rigoureusement que vers la fin du XIXème siècle sous les efforts conjugués de plusieurs mathématiciens dont Jakob Steiner et Hermann Schwarz.

# L'inégalité isopérimétrique

- La démonstration de ce théorème fait intervenir un résultat d'analyse :

**Inégalité de Wirtinger.**— Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue  $C^1$  par morceaux et  $2\pi$ -périodique. On suppose que

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0.$$

Alors

$$\int_0^{2\pi} f'(t)^2 dt \geq \int_0^{2\pi} f^2(t) dt$$

et l'égalité a lieu ssi  $f$  est de la forme  $f(t) = a \cos t + b \sin t$ .

# L'inégalité isopérimétrique

**Démonstration de l'inégalité de Wirtinger.**— On développe  $f$  en série de Fourier

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

- Puisque

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$$

on a  $a_0 = 0$  et l'égalité de Parseval donne

$$\int_0^{2\pi} f^2(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

## L'inégalité isopérimétrique

- La dérivée  $f'$  est continue par morceau, on a donc, au sens  $L^2$ , l'égalité

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nt - na_n \sin nt)$$

et donc

$$\int_0^{2\pi} f'^2(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2).$$

- D'où l'inégalité de Wirtinger, l'égalité ayant lieu ssi  $a_n = b_n = 0$  pour tout  $n \geq 2$ . □

## L'inégalité isopérimétrique

**Démonstration de l'inégalité isopérimétrique.**— Quitte à composer par une homothétie on peut toujours supposer que  $L = \text{Long}(\gamma) = 2\pi$ . En effet que l'inégalité isopérimétrique est homogène : si  $\lambda > 0$  est le rapport de l'homothétie et si  $L' = \lambda L$  et  $A' = \lambda^2 A$  (avec des notations évidentes) alors

$$L^2 \geq 4\pi A \iff L'^2 \geq 4\pi A'.$$

- Quitte à effectuer une translation on peut supposer que

$$\int_0^{2\pi} x(t) dt = \int_0^{2\pi} y(t) dt = 0.$$

- Les nombres  $L$  et  $A$  sont indépendants de la paramétrisation, on peut donc supposer que  $\gamma$  est paramétrée par la longueur d'arc.

## L'inégalité isopérimétrique

- La formule de Green-Riemann permet d'écrire :

$$A = - \int_0^L y(t)x'(t) dt = - \int_0^{2\pi} y(t)x'(t) dt.$$

- Puisque  $L = 2\pi$  il suffit de montrer que  $\pi \geq A$  or :

$$\begin{aligned} 2\pi - 2A &= \int_0^{2\pi} (1 + 2yx') dt \\ &= \int_0^{2\pi} (x'^2 + y'^2 + 2yx') dt \\ &= \int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2) + (y^2 + x'^2 + 2yx') dt \\ &= \int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2) dt + \int_0^{2\pi} (y + x')^2 dt \end{aligned}$$

## L'inégalité isopérimétrique

- D'après l'inégalité de Wirtinger :

$$\int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2) dt \geq 0$$

donc  $\pi \geq A$ .

- L'égalité a lieu ssi

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2) dt = 0 \quad \text{i. e. } y(t) = a \cos t + b \sin t \\ \int_0^{2\pi} (y + x')^2 dt = 0 \quad \text{i. e. } x'(t) = -y(t) \end{array} \right.$$

d'où

$$\begin{cases} x(t) = -a \sin t + b \cos t \\ y(t) = a \cos t + b \sin t \end{cases}$$

qui est l'équation paramétrique d'un cercle.

# Wilhelm Wirtinger (1865-1945)

Indice de  
rotation

Le théorème  
de Jordan

Camille  
Jordan

L'inégalité iso-  
périmétrique

**Wilhelm  
Wirtinger**

Le théorème  
des quatre  
sommets



## Wilhelm Wirtinger (1865-1945)

- Mathématicien autricien connu pour ses travaux en analyse complexe, en géométrie, en théorie des invariants, en théorie des nombres et en physique mathématique (depuis la statique, la théorie des ondes de surface et de l'arc-en-ciel jusqu'à la relativité générale) !
- Reçoit la troisième médaille Sylvester en 1931, après Poincaré et Cantor !
- Plusieurs étudiants illustres, parmi lesquels Kurt Gödel, Johann Radon, Wilhelm Blaschke et Leopold Vietoris.
- Une anecdote : en villégiature au lac Achensee (Tirol) Wirtinger est intrigué par le mouvement des vaguelettes... ses vacances s'arrêteront là ! Il se met à réfléchir au phénomène et l'expliquera tout en améliorant la théorie « des vagues capillaires ».

# Wilhelm Wirtinger (1865-1945)

Indice de  
rotation

Le théorème  
de Jordan

Camille  
Jordan

L'inégalité iso-  
périmétrique

**Wilhelm  
Wirtinger**

Le théorème  
des quatre  
sommets



*Le lac Achensee*



## La reine Didon

- La légende raconte que Didon fille du roi de Tyr et devenue reine à la mort de ce dernier, fut chassée par son frère Pygmalion et dut s'enfuir précipitamment avec une partie de l'aristocratie tyrienne.
- Après de nombreuses aventures ils finirent par accoster sur les côtes africaines et demandèrent au roi Hiarbas de leur accorder une terre pour s'installer. Perfidement, celui-ci leur promit « autant de terre que peut contenir la peau d'un bœuf ».
- La reine Didon respecta scrupuleusement ces paroles, elle découpa une peau en lanières si fines qu'elle put encercler, en les mettant bout-à-bout, un vaste territoire : Carthage était née.

## La reine Didon



*Didon construisant Carthage par Joseph Turner, 1815.*

# Le théorème des quatre sommets

**Définition.**— On appelle SOMMET d'une courbe paramétrée plane  $C^3$  un point où  $k'_{alg}$  s'annule.

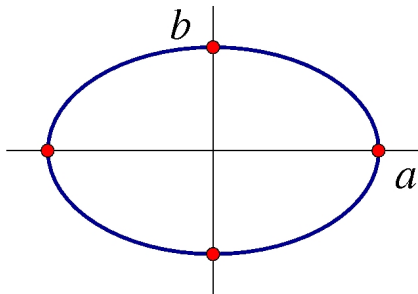
**Exemple.**— L'ellipse

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi[ &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (a \cos t, b \sin t) \end{aligned}$$

a pour courbure

$$k_{alg}(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}.$$

# Le théorème des quatre sommets



- D'où

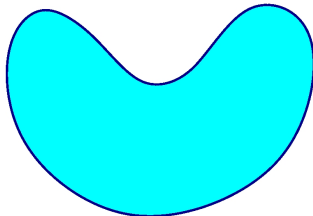
$$k'_{alg}(t) = \frac{3ab(b^2 - a^2) \cos t \sin t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{5}{2}}}.$$

Ainsi  $\gamma$  a quatre sommets correspondant à  $t = 0$ ,  $t = \frac{\pi}{2}$ ,  
 $t = \pi$  et  $t = \frac{3\pi}{2}$ .

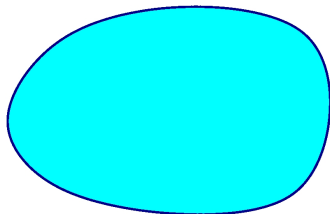
# Le théorème des quatre sommets

**Définition.**— Soit  $\gamma$  une courbe paramétrée  $C^1$  fermée simple. On dit que  $\gamma$  est CONVEXE si la composante bornée qu'elle définit est CONVEXE.

**Exemple.**—



*Non convexe*



*Convexe*

# Le théorème des quatre sommets

**Lemme.**— Soit  $\gamma : [a, b] \xrightarrow{C^3} \mathbb{R}^2$  fermée simple. Alors  $\gamma$  a deux sommets.

**Démonstration.**— La fonction *courbure algébrique*  $k_{alg}$  se prolonge sur  $\mathbb{R}$  en une fonction périodique  $C^1$ . En particulier elle admet un maximum et un minimum dans chaque période. En ces points  $k'_{alg} = 0$ . □

**Théorème des quatre sommets.**— Soit  $\gamma : [a, b] \xrightarrow{C^3} \mathbb{R}^2$  fermée simple et convexe. Alors  $\gamma$  a quatre sommets.

- L'hypothèse « convexe » n'est pas nécessaire mais la démonstration est alors plus difficile.

## Le théorème des quatre sommets

**Démonstration.**— On sait que  $\gamma$  admet au moins deux sommets. On va raisonner par l'absurde en supposant que  $\gamma$  admet seulement deux ou trois sommets. En fait, pour fixer les idées, on va supposer qu'il y a exactement trois sommets

$$m_1 = \gamma(t_1), \quad m_2 = \gamma(t_2), \quad \text{et} \quad m_3 = \gamma(t_3)$$

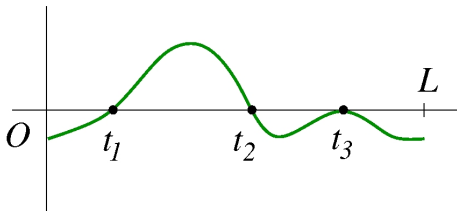
étant entendu que la démonstration s'adapte sans difficulté au cas de deux sommets.

• On suppose en outre que  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est paramétrée par la l.a. En effet, l'annulation de la dérivée de la courbure algébrique est préservée par le reparamétrage par la l.a. puisque

$$\frac{d}{ds}(k_{alg} \circ \varphi)(s) = \varphi'(s) \cdot k'_{alg}(\varphi(s)) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} k'_{alg}(t).$$

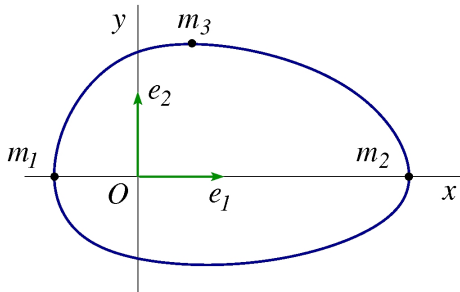
## Le théorème des quatre sommets

- Nécessairement  $k'_{alg}$  change de signe au moins une fois car  $k'_{alg} > 0$  (ou  $k'_{alg} < 0$ ) sur  $[0, L] \setminus \{t_1, t_2, t_3\}$  serait contradictoire avec  $k_{alg}(0) = k_{alg}(L)$ .



- Quitte à changer les indices ou les signes, on peut supposer que  $k'_{alg}$  est positive sur  $]t_1, t_2[$  et négative sur  $[0, L] \setminus ([t_1, t_2] \cup \{t_3\})$ .

# Le théorème des quatre sommets



- On prend pour axe  $(Ox)$  la droite  $(m_1 m_2)$  et on note  $(e_1, e_2)$  une base associée. Puisque  $\gamma$  est convexe, l'arc  $\gamma([t_1, t_2])$  est en dessous de  $(Ox)$  et l'arc  $\gamma([0, L] \setminus [t_1, t_2])$  au dessus de  $(Ox)$ .

## Le théorème des quatre sommets

- On a

$$\begin{aligned}\int_0^L k'_{alg}(s)\gamma(s) ds &= [k_{alg}(s)\gamma(s)]_0^L - \int_0^L k_{alg}(s)\gamma'(s) ds \\ &= 0 - \int_0^L k_{alg}(s)T(s) ds.\end{aligned}$$

- Or (formule de Frenet)

$$-k_{alg}(s)T(s) = \frac{d}{ds}N_{alg}(s)$$

donc

$$\int_0^L k'_{alg}(s)\gamma(s) ds = 0$$

et en particulier

$$\left\langle \int_0^L k'_{alg}(s)\gamma(s) ds, e_2 \right\rangle = \int_0^L k'_{alg}(s)\langle \gamma(s), e_2 \rangle ds = 0.$$

## Le théorème des quatre sommets

- Si  $s \in ]t_1, t_2[$  on a  $\langle \gamma(s), e_2 \rangle \leq 0$  et l'inégalité est stricte sur un ouvert non vide. Comme  $k'_{alg}(s) > 0$  on a donc :

$$\int_{t_1}^{t_2} k'_{alg}(s) \langle \gamma(s), e_2 \rangle ds < 0.$$

- De même sur  $[0, L] \setminus [t_1, t_2]$ , on a  $\langle \gamma(s), e_2 \rangle \geq 0$  et l'inégalité est stricte sur un ouvert non vide. Comme  $k'_{alg}(s) < 0$  on a donc :

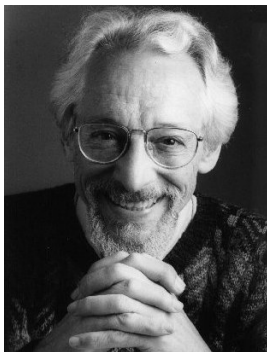
$$\int_{[0, L] \setminus [t_1, t_2]} k'_{alg}(s) \langle \gamma(s), e_2 \rangle ds < 0.$$

- Au bilan

$$\int_0^L k'_{alg}(s) \langle \gamma(s), e_2 \rangle ds < 0.$$

Contradiction.

# Le théorème des quatre sommets



*Robert Osserman*

**Théorème (Osserman, 1985).**– « *Génériquement* », une courbe fermée simple possède au moins six sommets.

## Le théorème des quatre sommets



*Hermann Gluck*

**Théorème (Gluck, 1971).**– *Une fonction périodique est la courbure algébrique d'une courbe fermée simple si elle admet, sur une période, au moins deux maximums séparés par deux minimums.*